

УДК 517.55, 512.816, 514.7

ОБ ОРБИТАХ В $\mathbb{C}^4$ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ, ИМЕЮЩИХ ДВЕ АБЕЛЕВЫ ПОДАЛГЕБРЫ

А.В. ЛОБОДА, Р.С. АКОПЯН

Аннотация. Статья связана с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств на основе свойств соответствующих этим многообразиям алгебр Ли и их нильпотентных и абелевых подалгебр. С использованием классификаций обширного семейства 7-мерных разрешимых неразложимых алгебр Ли ранее авторами статьи были изучены орбиты алгебр, имеющих «сильные» коммутативные свойства. В частности было установлено, что 7-мерная алгебра Ли, имеющая абелеву подалгебру размерности 5, не допускает в пространстве $\mathbb{C}^4$ Леви-невырожденных орбит.

В настоящей статье изучены все 82 типа разрешимых неразложимых 7-мерных алгебр Ли, имеющих в точности две 4-мерные абелевы подалгебры и 6-мерный ниль-радикал. Доказано, что для 75 таких типов алгебр любая 7-мерная орбита в $\mathbb{C}^4$ либо вырождена по Леви, либо сводится голоморфным преобразованием к трубчатому многообразию. Представлены все (с точностью до локальных голоморфных преобразований координат) реализации 7 исключительных типов абстрактных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$. Для большинства таких реализаций приведены координатные описания орбит, являющихся голоморфно однородными невырожденными вещественными гиперповерхностями этого пространства.

Ключевые слова: алгебра Ли, ниль-радикал, абелев идеал, однородное многообразие, голоморфное преобразование, векторное поле, орбита алгебры, трубчатое многообразие, вещественная гиперповерхность.

Mathematics Subject Classification: 22F30, 57M60, 53C30

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ в настоящей статье изучаются орбиты в этом пространстве 7-мерных алгебр Ли. Уточним, что случай 4-мерного комплексного пространства является следующим после получения полных описаний локально голоморфно однородных гиперповерхностей пространств $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$ (см. [5], [11], [12]). А размерность 7 — это минимально возможная размерность алгебры Ли голоморфных векторных полей на однородной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$.

Семейство абстрактных 7-мерных алгебр Ли весьма обширно. Подсемейство таких алгебр, удовлетворяющих условиям разрешимости и неразложимости, описано в четырех работах [13], [14], [18], [19]; это подсемейство содержит 939 типов алгебр Ли. В настоящей статье мы обсуждаем алгебры Ли из работы [18], содержащей полное описание 7-мерных

A.V. LOBODA, R.S. AKOPYAN, ON ORBITS IN $\mathbb{C}^4$ OF 7-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS POSSESSING TWO ABELIAN SUBALGEBRAS.

© Лобода А.В., Акопян Р.С. 2025.

Исследование А.В. Лободы выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 23-21-00109, (<https://rscf.ru/project/23-21-00109>).

Поступила 3 сентября 2024 г.

(разрешимых неразложимых) алгебр Ли с 6-мерными ниль-радикалами. Отметим, что это описание насчитывает 594 типа алгебр Ли.

Семейство голоморфно однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ также представляется достаточно обширным, в связи с чем естественно рассматривать отдельные подсемейства таких многообразий. Сошлемся, например, на работы [15] и [16], в которых изучаются вырожденные по Леви, но являющиеся k -невыврожденными (при $k = 2, 3$), однородные гиперповерхности комплексных пространств и, в частности, пространства $\mathbb{C}^4$.

В статье [7] рассмотрен вопрос об оценке количества различных голоморфно однородных Леви-невыврожденных нетрубчатых вещественных гиперповерхностей в этом пространстве. Основным результатом работы [7] показывает, что 7-мерные алгебры Ли из списка [18], ассоциированные с Леви-невыврожденными нетрубчатыми вещественными гиперповерхностями пространства $\mathbb{C}^4$, составляют относительно малую часть этого списка. Настоящая статья конкретизирует это качественное утверждение и, по сути, является продолжением [7]. Основной задачей статьи является выделение алгебр, допускающих не сводимые к трубкам Леви-невыврожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$ из списка [18] 7-мерных алгебр Ли, содержащих в точности две 4-мерные абелевы подалгебры.

Такая постановка задачи объясняется результатами работ [6] и [9]. В силу этих результатов у 7-мерной алгебры Ли, содержащей абелеву подалгебру размерности 5 или три абелевых подалгебры размерности 4, любая 7-мерная орбита в $\mathbb{C}^4$ либо вырождена по Леви, либо голоморфно эквивалентна трубчатой гиперповерхности.

В настоящей статье мы уточняем количество 7-мерных алгебр Ли, имеющих 6-мерные ниль-радикалы и содержащих в точности две 4-мерные абелевы подалгебры. Всего в [18] имеется 82 типа таких алгебр.

Основным результатом настоящей статьи является следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Не более 7 из 82 типов 7-мерных алгебр Ли, имеющих 6-мерные ниль-радикалы и содержащих две 4-мерные абелевы подалгебры, допускают не сводимые к трубкам Леви-невыврожденные 7-мерные орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$.*

Отметим, что координатные описания большинства этих орбит получены в работе [8] и приведены в разделе 3 настоящей статьи. Все эти гиперповерхности невырождены по Леви, но вопрос об их возможной сводимости (за счет голоморфных преобразований) к трубкам является более сложным. Ответов на этот вопрос авторы пока не имеют; именно этим объясняется уточнение «не более» в формулировке теоремы 1.1.

2. НИЛЬ-РАДИКАЛЫ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Количество различных 7-мерных алгебр Ли в работе [18], составляющее 594 типа таких алгебр, представляется чрезмерным для практической работы со списком таких объектов. Вместе с тем, все эти почти 600 типов являются продолжениями лишь 34 типов 6-мерных нильпотентных алгебр Ли. В работе [18] эти 6-мерные алгебры представлены своими таблицами коммутационных соотношений в некоторых (канонических) базисах. Еще более упрощаются рассмотрения нашей статьи за счет того, что лишь 10 из 34 типов 6-мерных нильпотентных алгебр имеют 7-мерные продолжения, содержащие в точности две 4-мерные абелевы подалгебры.

Замечание 2.1. *Надежность таких количественных описаний интересующих нас списков алгебр Ли могут обеспечить лишь компьютерные программы. Некоторые из них уже реализованы (см., например, [3]), еще несколько компьютерных алгоритмов и схем их применения в обсуждаемой задаче находятся в разработке.*

В список интересующих нас 6-мерных нильпотентных алгебр Ли входят алгебры, имеющие в [18] следующие коды:

$$[6, 1], [6, 9], [6, 13], [6, 18], [6, 21], [6, 22], [6, 23], [6, 24], [6, 26], [6, 29]. \quad (2.1)$$

Ниже приведены нетривиальные коммутационные соотношения в этих алгебрах (в некоторых канонических базисах $e_1, \dots, e_6$):

$$\text{Алгебра } [6, 1](7) : [e_3, e_6] = e_2, [e_4, e_5] = e_2, [e_4, e_6] = e_3, [e_5, e_6] = e_4;$$

$$\text{Алгебра } [6, 9](8) : [e_3, e_5] = e_2, [e_3, e_6] = e_1, [e_4, e_5] = -e_1, [e_4, e_6] = e_2;$$

$$\text{Алгебра } [6, 13](1) : [e_4, e_5] = e_1, [e_2, e_6] = e_1, [e_3, e_6] = e_2, [e_4, e_6] = e_3, [e_5, e_6] = e_4;$$

$$\text{Алгебра } [6, 18](7) : [e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_6] = e_1, [e_4, e_6] = e_3, [e_5, e_6] = e_4;$$

$$\text{Алгебра } [6, 21](7) : [e_2, e_4] = e_1, [e_3, e_6] = e_1, [e_4, e_6] = e_2, [e_5, e_6] = e_3;$$

$$\text{Алгебра } [6, 22](7) : [e_4, e_5] = e_1, [e_3, e_6] = e_2, [e_4, e_6] = e_3, [e_5, e_6] = e_4;$$

$$\text{Алгебра } [6, 23](10) : [e_3, e_5] = e_2, [e_3, e_6] = e_1, [e_4, e_6] = e_2, [e_5, e_6] = e_4;$$

$$\text{Алгебра } [6, 24](8) : [e_3, e_5] = e_1, [e_4, e_5] = e_1, [e_4, e_6] = e_2, [e_5, e_6] = e_4;$$

$$\text{Алгебра } [6, 26](9) : [e_3, e_5] = e_2, [e_4, e_5] = e_1, [e_4, e_6] = e_2, [e_5, e_6] = e_4;$$

$$\text{Алгебра } [6, 29](18) : [e_2, e_3] = e_1, [e_4, e_6] = e_1, [e_5, e_6] = e_4.$$

Уточним, что число в круглых скобках за кодом каждой из этих 6-мерных алгебр Ли означает количество типов 7-мерных алгебр Ли, имеющих данную 6-мерную алгебру в качестве ниль-радикала (сумма всех десяти чисел в круглых скобках составляет упомянутые выше 82 типа).

Замечание 2.2. Приведенный список отличается от аналогичного списка из работы [7]. Так, в нем отсутствует алгебра $[6, 25]$, 7-мерные продолжения которой содержат единственную 4-мерную абелеву подалгебру. В список работы [7] алгебра $[6, 25]$ попала по недосмотру, исправленному теперь именно за счет перепроверки (с использованием компьютерных алгоритмов) структуры обсуждаемых алгебр.

Замечание 2.3. В ходе этой перепроверки две 6-мерные алгебры $[6, 21]$ и $[6, 29]$, не обсуждавшиеся в [7], наоборот, добавлены в список интересующих нас в этой статье 6-мерных нильпотентных алгебр. Каждая из 7-мерных алгебр Ли, имеющая ниль-радикал $[6, 21]$ или $[6, 29]$, содержит в точности две 4-мерные абелевы подалгебры. Некоторые из таких 7-мерных алгебр допускают невырожденные по Леви 7-мерные орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$. Однако все такие гиперповерхности сводятся к трубкам за счет одной и той же квадратичной замены переменных.

Уточним, что доказательство последнего утверждения для большого семейства из 18 типов 7-мерных алгебр, имеющих ниль-радикалом 6-мерную алгебру $[6, 29]$, представлено в статье [4].

Ниже мы обсуждаем оставшиеся 64 из обозначенных 82 типов 7-мерных алгебр Ли. При этом детально изучаются реализации блока из 7 типов алгебр с ниль-радикалом $[6, 21]$, не вошедших в описания работы [7]. Отдельный раздел 5 статьи посвящен второму блоку из 8 типов алгебр с ниль-радикалом $[6, 9]$. У алгебр из этого блока пересечение двух 4-мерных абелевых подалгебр является 2-мерным, а не 3-мерным (как у всех остальных продолжений нильпотентных алгебр из списка (2.1)). К третьему блоку относится (полученное в [8]) описание невырожденных не сводимых к трубкам орбит остальных 49 типов 7-мерных алгебр Ли, обозначенных выше.

Описание таких орбит у алгебр Ли из трех названных блоков вместе с утверждением об их отсутствии у 18 типов продолжений нильпотентной алгебры $[6, 29]$ составляет полное решение сформулированной во введении основной задачи статьи.

Для наглядного представления выводов об алгебре $[6, 21]$ и 7 типах ее 7-мерных продолжений нам потребуются соответствующие таблицы коммутационных соотношений, отвечающие этим алгебрам. В таблице 1 приведены нетривиальные коммутаторы $[e_k, e_j]$ (k — номер строки таблицы, j — номер столбца) элементов канонического базиса для семейства (типа) алгебр Ли $[7, [6, 21], 1, 1]$ из работы [18].

ТАБЛИЦА 1. Таблица коммутационных соотношений для семейства алгебр Ли $[7, [6, 21], 1, 1]$. Параметром семейства является произвольное вещественное число m ($[e_4, e_7] = me_4$).

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1							$(2m + 1)e_1$
e_2				e_1			$(m + 1)e_2$
e_3						e_1	$2me_3$
e_4		$-e_1$			e_2	e_2	me_4
e_5				$-e_2$		e_3	$(2m - 1)e_5$
e_6			$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$		e_6
e_7	$-(2m + 1)e_1$	$-(m + 1)e_2$	$-2me_3$	$-me_4$	$-(2m - 1)e_5$	$-e_6$	

Таблицы коммутационных соотношений для остальных шести типов 7-мерных алгебр Ли с изоморфным алгебре $[6, 1]$ ниль-радикалом отличаются от таблицы 1 лишь последним столбцом (и, соответственно, последней строкой). Такие столбцы для всех 7-мерных алгебр Ли, имеющих в работе [18] коды $[7, [6, 21], 1, k]$ ($k = 1, \dots, 7$), приведены в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. Коммутаторы $[e_j, e_7]$ ($j = 1, \dots, 6$) для алгебр Ли с ниль-радикалом $[6, 21]$ и кодами $[7, [6, 21], 1, k]$ ($k = 1, \dots, 7$). Столбцы таблицы озаглавлены двумя последними символами кода каждого типа алгебр. Параметр m — произвольное вещественное число, $\varepsilon = \pm 1$.

Тип алгебры	$[1, 1]$	$[1, 2]$	$[1, 3]$	$[1, 4]$	$[1, 5]$	$[1, 6]$	$[1, 7]$
$[e_1, e_7]$	$(2m + 1)e_1$	$2e_1$	$3e_1$	$2e_1$	e_1	$2e_1$	$3e_1$
$[e_2, e_7]$	$(m + 1)e_2$	e_2	$2e_2$	e_2	e_2	e_2	$2e_2 + e_3$
$[e_3, e_7]$	$2me_3$	$2e_3$	$2e_3$	$2e_3$		$2e_3$	$2e_3$
$[e_4, e_7]$	me_4	e_4	e_4	e_4	e_3	$e_2 + e_4$	$e_4 + e_5$
$[e_5, e_7]$	$(2m - 1)e_5$	$2e_5$	e_5	$\varepsilon e_1 + 2e_5$	$-e_5$	$me_1 + 2e_5$	e_5
$[e_6, e_7]$	e_6		$\varepsilon e_5 + e_6$		$e_2 + e_6$		$-e_4 + me_5 + e_6$

Из таблиц 1 и 2 легко увидеть, что каждая из обсуждаемых алгебр $[7, [6, 21], 1, k]$ при $k = 1, \dots, 7$ имеет две абелевых подалгебры $I_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_5 \rangle$ и $I'_4 = \langle e_1, e_3, e_4, e_5 \rangle$.

Замечание 2.4. Первая из них является абелевым идеалом в любой из обсуждаемых 7-мерных алгебр, а вторая лишь абелевой подалгеброй, т.к. $[e_4, e_6] = e_2 \notin I'_4$.

Важно отметить, что пересечение $I_4 \cap I'_4$ этих подалгебр имеет размерность 3.

Кратко напомним теперь изложенную в [7] схему описания невырожденных орбит в $\mathbb{C}^4$ 7-мерных алгебр Ли, использующую наличие у них 6-мерных ниль-радикалов и двух 4-мерных абелевых подалгебр.

1. Каждую из обсуждаемых абстрактных 7-мерных алгебр необходимо представить в виде алгебры голоморфных векторных полей. Для этого достаточно реализовать такими полями базис 7-мерной алгебры. При этом все поля обязаны быть касательными в вещественном смысле к некоторой Леви-невырожденной гиперповерхности-орбите этой алгебры.

2. Обозначим через g_7 и N_6 , соответственно, любую из обсуждаемых 7-мерных алгебр Ли и ее 6-мерный ниль-радикал. Удобно начать обсуждение реализации алгебры g_7 в пространстве $\mathbb{C}^4$ с реализации базиса N_6 , т.к. уже такая задача не всегда имеет решение.
3. Если удалось реализовать в виде голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ базис N_6 , то обсуждение представлений алгебры g_7 сводится к изучению системы 6 линейных дифференциальных уравнений

$$[e_k, e_7] = \sum_{j=1}^6 \alpha_{kj} e_j \quad (2.2)$$

относительно неизвестного поля e_7 с известными (из таблицы коммутационных соотношений) коэффициентами α_{kj} .

4. Описанные выше отдельные этапы общей схемы существенно упрощаются при наличии в обсуждаемой 7-мерной алгебре (а фактически, в ее подалгебре N_6) двух 4-мерных абелевых подалгебр. Согласно основной лемме работ [7], [17] поиск только невырожденных нетрубчатых орбит 7-мерных алгебр в такой ситуации можно вести, считая, что четверка базисных полей нильпотентного идеала N_6 имеет весьма простой вид. В частности, уравнения системы (2.2) оказываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (а не уравнениями в частных производных).
5. На завершающем этапе схемы условия

$$\operatorname{Re}(X(\Phi)|_M) \equiv 0 \quad (2.3)$$

вещественного касания искомой гиперповерхности M любым полем X из обсуждаемой алгебры g_7 записываются в виде системы из 7 уравнений (по числу базисных полей алгебры g_7). Эту систему необходимо проинтегрировать.

В рамках этой схемы в работе [7, Теоремы 1, 2] выписаны реализации в $\mathbb{C}^4$ базисов восьми нильпотентных 6-мерных алгебр Ли из приведенного выше списка (п. 2 схемы). Речь идет об алгебрах, отличных от [6, 21], [6, 29].

Уточним, что вместо обычной записи голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ типа

$$X = a(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + b(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + c(z) \frac{\partial}{\partial z_3} + d(z) \frac{\partial}{\partial z_4}$$

везде ниже мы используем ее сокращенную форму $X = (a(z), b(z), c(z), d(z))$. С учетом такой договоренности при допущении существования невырожденных нетрубчатых орбит у 7-мерных продолжений, например, алгебр Ли [6, 1] и [6, 9] базисы реализаций в $\mathbb{C}^4$ этих 6-мерных алгебр имеют с точностью до локальных голоморфных преобразований вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 0, 1), & e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0), & e_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_3 &= (0, 0, -(z_1 + C_3), D_3), & e_3 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_4 &= (0, 1, 0, 0), & e_4 &= (0, i\varepsilon, i\varepsilon z_1 + C_4, z_1 + D_4), \\ e_5 &= (0, -z_1, z_2, -\frac{1}{2}D_3 z_1^2 + D_5), & e_5 &= (1, 0, z_2, 0), \\ e_6 &= (1, z_1(z_1 + C_3), -z_2(z_1 + C_3), D_3 z_2), & e_6 &= (i\varepsilon, B_6, B_6 z_1 + C_6, z_2 + D_6), \end{aligned} \quad (2.4)$$

соответственно, с некоторыми комплексными константами B_k, C_k, D_k .

Для алгебр [6, 21], [6, 29] несложно получить аналогичные утверждения.

Предложение 2.1. *При условии существования невырожденных нетрубчатых орбит у 7-мерных продолжений алгебр Ли [6, 21] и [6, 29] базисы реализаций в $\mathbb{C}^4$ этих 6-мерных алгебр имеют с точностью до локальных голоморфных преобразований вид*

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0, 0, 0, 1), & e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\
e_2 &= (0, 1, 0, 0), & e_2 &= (0, 1, 0, 0), \\
e_3 &= (0, 0, 1, 0), & e_3 &= (0, B_3, C_3, z_2 + C_3 z_1), \\
e_4 &= (0, -z_1 + B_4, C_4, z_2 + C_4 z_1), & e_4 &= (0, 0, 1, 0), \\
e_5 &= (0, 0, -z_1 + C_5, -\frac{1}{2}z_1^2 + C_5 z_1 + D_5), & e_5 &= (0, 0, -z_1, -\frac{1}{2}z_1^2 + D_5), \\
e_6 &= (1, 0, 0, z_3), & e_6 &= (1, 0, 0, z_3),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

соответственно, где B_k, C_k, D_k — некоторые комплексные константы.

Доказательство. Отметим, что базис реализации в $\mathbb{C}^4$ 6-мерной алгебры Ли [6, 21] из формулировки этого предложения построен в [8, Предложение 2]. Приведем здесь вывод формул для реализованного в $\mathbb{C}^4$ базиса алгебры [6, 29].

Из описания этой алгебры коммутационными соотношениями в начале раздела легко видеть, что 4-мерными абелевыми подалгебрами нильпотентной алгебры [6, 29] являются только $I_4 = \langle e_1, e_2, e_4, e_5 \rangle$ и $I'_4 = \langle e_1, e_3, e_4, e_5 \rangle$. Можно проверить, что для каждого из описанных в [18] 18 продолжений [6, 29] до 7-мерных алгебр Ли их 4-мерными абелевыми подалгебрами также являются только I_4 и I'_4 .

Рассмотрим упорядоченный набор e_1, e_4, e_5, e_2 попарно коммутирующих голоморфных векторных полей, касательных к гипотетической невырожденной гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^4$. Применим далее лемму 1 из [7] (или лемму 4.1 из [6]) о трех вариантах упрощения этого набора голоморфными преобразованиями. В двух из этих трех вариантов реализации [6, 29] можно выпрямить (превратить в дифференцирования по четырем независимым переменным z_k) базисные элементы подалгебры I_4 (первый вариант), либо подалгебры I'_4 (второй вариант). Это автоматически означает трубчатость гиперповерхности M .

Так как мы обсуждаем не сводимые к трубкам однородные гиперповерхности, единственный вариант, в котором такие поверхности могут существовать, связан с упрощением базиса I_4 до вида

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\
e_2 &= (0, 1, 0, 0), \\
e_4 &= (0, 0, 1, 0), \\
e_5 &= (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1))
\end{aligned}$$

за счет голоморфной замены переменных.

Рассмотрим теперь коммутаторы полей e_3, e_6 с тройкой выпрямленных полей e_1, e_2, e_4 . С учетом нетривиальных коммутационных соотношений $[e_2, e_3] = [e_4, e_6] = e_1$, имеющих в алгебре [6, 29], и равенства нулю остальных интересующих нас коммутаторов получаем следующий упрощенный вид этих полей

$$e_3 = (a_3(z_1), b_3(z_1), c_3(z_1), z_2 + d_3(z_1)), \quad e_6 = (a_6(z_1), b_6(z_1), c_6(z_1), z_3 + d_6(z_1))$$

с некоторыми голоморфными функциями $a_k(z_1), b_k(z_1), c_k(z_1), d_k(z_1)$ одного комплексного переменного. Из третьей компоненты последнего нетривиального соотношения $[e_5, e_6] = e_4$ следует неравенство $a_6(z_1) \neq 0$. Приемы работ [1] и [10] позволяют тогда (сохраняя выпрямленные поля e_1, e_2, e_4) привести поле e_6 голоморфной заменой к виду $e_6 = (1, 0, 0, z_3)$. После этого упрощение полей e_3 и e_5 до вида, заявленного в предложении 2.1, становится практически тривиальным. $\square$

Формулы типа (2.4) и (2.5) позволяют перейти к последующим пунктам 3) и 4) представленной выше схемы описания Леви-невырожденных нетрубчатых орбит обсуждаемых

7-мерных алгебр Ли. Уточним, что в [7] представлены в качестве реализованных лишь отдельные пункты этой схемы для некоторых из интересующих нас алгебр. Системным образом мы обсудим этот вопрос в следующих разделах.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ОРБИТ

Для 7-мерных продолжений семи нильпотентных алгебр

$$[6, 1], \quad [6, 13], \quad [6, 18], \quad [6, 22], \quad [6, 23], \quad [6, 24], \quad [6, 26], \quad (3.1)$$

составляющих основной объект исследования в работе [7], приведенная схема изучения орбит доведена до завершения в работе [8]. За счет комбинированных компьютерно-ручных алгоритмов система дифференциальных уравнений (2.2) исследована для 49 типов 7-мерных алгебр Ли, имеющих ниль-радикалами 6-мерные алгебры из списка (3.1). Однако формат статьи [8] и ее ориентированность в первую очередь на алгоритмическую сторону задачи не позволили привести (и обсудить) важные промежуточные результаты. Одним из них является следующее утверждение, представляющее самостоятельный математический интерес.

Предложение 3.1. *Из 49 типов алгебр Ли, имеющих 6-мерный ниль-радикал одного из типов (3.1) и две абелевы 4-мерные подалгебры, невырожденные не сводимые к трубкам орбиты в $\mathbb{C}^4$ могут иметь не более 9 типов. Голоморфными заменами координат базисы таких алгебр, реализуемых в виде алгебр векторных полей в $\mathbb{C}^4$, можно привести к следующим видам:*

$$[7, [6, 1], 1, 1] \quad (\text{Im } D_3 \neq 0) :$$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, -z_1, D_3),$$

$$e_4 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_5 = (0, -z_1, z_2, -\frac{1}{2}D_3 z_1^2),$$

$$e_6 = (1, z_1^2, -z_1 z_2, D_3 z_2),$$

$$e_7 = (z_1, 3z_2, 5z_3, 4z_4);$$

$$[7, [6, 13], 1, 1] :$$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, -z_1, -\frac{1}{2}z_1^2),$$

$$e_4 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_5 = (0, -z_1, \frac{1}{3}z_1^3, z_2),$$

$$e_6 = (1, \frac{5}{6}z_1^3, -z_1 z_2, z_3 - \frac{1}{2}z_1^2 z_2),$$

$$e_7 = (z_1, 4z_2, 6z_3, 7z_4);$$

$$[7, [6, 18], 1, 1] \quad (a = 3, B_5 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) :$$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_4 = (0, 0, -z_1, -\frac{1}{2}z_1^2),$$

$$e_5 = (0, iB_5, \frac{1}{2}z_1^2, z_2 + \frac{1}{3}z_1^3),$$

$$e_6 = (1, 0, 0, z_3),$$

$$e_7 = (z_1, 3z_2, 5z_3, 6z_4);$$

$$[7, [6, 22], 1, 1] \quad (a = 1, \text{Im } D_3 \neq 0) :$$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, -z_1, D_3),$$

$$e_4 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_5 = (0, -z_1, \frac{1}{3}z_1^3, z_2),$$

$$e_6 = (1, -D_3 z_1, -z_1 z_2, D_3 z_2),$$

$$e_7 = (z_1, 2z_2, 4z_3, 3z_4);$$

$[7, [6, 23], 1, 1] \quad (a = 2, D_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) :$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_4 = (0, 0, -z_1, iD_4),$$

$$e_5 = (0, iD_4, z_2 + \frac{1}{2}z_1^2, 0),$$

$$e_6 = (1, 0, 0, z_2),$$

$$e_7 = (z_1, 2z_2, 4z_3, 3z_4);$$

$[7, [6, 24], 1, 2] \quad (C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) :$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, iC_3, -z_1),$$

$$e_4 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_5 = (1, 0, 0, z_2),$$

$$e_6 = (0, z_1, z_2, \frac{1}{2}z_1^2),$$

$$e_7 = (z_1, z_2, z_3, 2z_4);$$

$[7, [6, 24], 1, 4] \quad (\varepsilon = \pm 1, C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) :$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, iC_3, -z_1),$$

$$e_4 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_5 = (1, 0, 0, z_2),$$

$$e_6 = (0, z_1, z_2, \frac{1}{2}z_1^2),$$

$$e_7 = (z_1, z_2, z_3 + \varepsilon z_1, 2z_4);$$

$[7, [6, 24], 1, 5] \quad (\text{Im } C_3 \neq 0) :$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, C_3, -z_1),$$

$$e_4 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_5 = (1, 0, 0, z_2),$$

$$e_6 = (0, z_1, z_2, \frac{1}{2}z_1^2),$$

$$e_7 = (z_1, z_2, z_3 + C_3 z_1, 2z_4 - \frac{1}{2}z_1^2);$$

$[7, [6, 26], 1, 1] \quad (a = \frac{1}{2}, D_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) :$

$$e_1 = (0, 0, 0, 1),$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, -z_1, iD_3),$$

$$e_4 = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_5 = (1, 0, 0, z_2),$$

$$e_6 = (0, z_1, z_2, \frac{1}{2}z_1^2),$$

$$e_7 = (\frac{1}{2}z_1, \frac{3}{2}z_2, \frac{5}{2}z_3, 2z_4).$$

Значительное уменьшение потенциального количества невырожденных в смысле Леви нетрубчатых орбит, зафиксированное в предложении 3.1, проиллюстрировано в [8] на примере продолжений алгебры $[6, 21]$. В соответствии с таблицами 1 и 2, приведенными в разделе 1, всего имеется 7 типов таких продолжений $[7, [6, 21], 1, k]$, $k \in \{1, \dots, 7\}$. Приведем здесь утверждение из [8] об орбитах этих алгебр.

Предложение 3.2. *Реализации алгебр семейства $[7, [6, 21], 1, k]$ в $\mathbb{C}^4$, имеющие невырожденные нетрубчатые орбиты, возможны лишь при $k \in \{1, 3, 7\}$. При этом в соответствии с формулами (2.5) базисные поля e_1, e_2, e_3 обсуждаемых алгебр имеют (в подходящих координатах) вид*

$$e_1 = (0, 0, 0, 1), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad (3.2)$$

а поля e_4, e_5, e_6, e_7 определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
& [7, [6, 21], 1, 1] \quad (m, B_7, D_7 \in \mathbb{R}; C_4, C_7 \in \mathbb{C}; m \cdot C_4 = 0) : \\
& e_4 = (0, -z_1, C_4, z_2 + C_4 z_1), \\
& e_5 = (0, 0, -z_1, -\frac{1}{2}z_1^2), \\
& e_6 = (1, 0, 0, z_3), \\
& e_7 = (z_1, (m+1)z_2 + iB_7, 2mz_3 + C_7, (2m+1)z_4 + C_7 z_1 + iD_7),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
& [7, [6, 21], 1, 3] \quad (\varepsilon = \pm 1; D_6 \in \mathbb{C}) : \\
& e_4 = (0, -z_1, 0, z_2), \\
& e_5 = (0, 0, -z_1, -\frac{1}{2}z_1^2), \\
& e_6 = (1, 0, 0, z_3 + D_6), \\
& e_7 = (z_1, 2z_2, 2z_3 - \frac{\varepsilon}{2}z_1^2, 3z_4 - \frac{\varepsilon}{3}z_1^3 - 2D_6 z_1).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& [7, [6, 21], 1, 7] \quad (m, D_4, D_6 \in \mathbb{R}; D_7 \in \mathbb{C}) : \\
& e_4 = (0, -z_1, 0, z_2 + iD_4), \\
& e_5 = (0, 0, -z_1, -\frac{1}{2}z_1^2), \\
& e_6 = (1, 0, 0, z_3 + iD_6), \\
& e_7 = (z_1, 2z_2 + \frac{1}{2}z_1^2, z_2 + 2z_3 - \frac{m}{2}z_1^2, 3z_4 - \frac{m}{3}z_1^3 + D_7 z_1).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Доказательство. Все обсуждения, связанные с этим предложением, естественно распадаются на две части. В первой из них выводятся формулы (3.3), (3.4) и (3.5), полученные авторами за счет рутинных вычислений с использованием пакета Maple по описанной в разделе 2 схеме. Вторая часть связана с получением противоречий, возникающих при попытках реализации этой же схемы для алгебр обсуждаемого семейства при $k \in \{2, 4, 5, 6\}$.

Так, при $k = 2$ согласно формулам предложения 2.1 первые пять базисных полей алгебры $[6, 21]$ имеют нулевую первую компоненту. При вычислении предварительного вида компонент поля e_7 для этой алгебры воспользуемся видом полей e_1, e_2, e_3, e_6 и столбцом таблицы 2, описывающим коммутаторы $[e_j, e_7]$ в алгебре $[7, [6, 21], 1, 2]$. Так получается следующее описание поля

$$e_7 = (A_7, z_2 + B_7, 2z_3 + C_7, 2z_4 + C_7 z_1 + D_7) \tag{3.6}$$

с некоторыми комплексными константами A_7, B_7, C_7, D_7 .

Значения этих констант и, в первую очередь, интересующего нас параметра A_7 , должны удовлетворять еще двум необходимым условиям, а именно, коммутационным соотношениям $[e_4, e_7] = e_4$ и $[e_5, e_7] = e_5$. С учетом (3.6) вторая компонента первого из этих соотношений имеет следующий вид:

$$(-z_1 + B_4) + A_7 = (-z_1 + B_4).$$

Это означает, что первая компонента поля e_7 оказывается нулевой при $k = 2$. Эти же рассуждения (не затрагивающие коммутатор $[e_5, e_7]$) сохраняют силу и при $k = 4$. При $k = 6$ аналогично приходим к выводу $A_7 = 1$, так что у базисного поля $e_7^* = e_7 - e_6$ реализации алгебры $[7, [6, 21], 1, 6]$ снова получаем нулевую первую компоненту.

Легко видеть, что наличие у 7-мерной алгебры Ли в пространстве $\mathbb{C}^4$ шести базисных векторных полей с нулевой z_1 -компонентой приводит, в силу тождества (2.2), к независимости уравнения любой ее орбиты от трех комплексных переменных z_2, z_3, z_4 . Тем самым, результатом процедуры, нацеленной на поиск невырожденных орбит, у 7-мерных алгебр $[7, [6, 21], 1, k]$ при $k = 2, 4, 6$ оказываются только вырожденные гиперповерхности.

Еще одна алгебра, отвечающая случаю $k = 5$, также не допускает реализаций на невырожденных нетрубчатых гиперповерхностях пространства $\mathbb{C}^4$. Здесь формула, аналогичная (3.6), имеет вид

$$e_7 = (z_1 + A_7, z_1 + z_2 + B_7, C_7, z_4 + C_7 z_1 + D_7).$$

При этом согласно таблице 2 для этой алгебры должно выполняться соотношение $[e_4, e_7] = e_3$. Однако третьи компоненты обоих полей e_4 и e_7 являются константами, а потому у их коммутатора эта компонента равна нулю. Это противоречит виду $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ и, как следствие, существованию реализаций алгебры $[7, [6, 21], 1, 5]$ с обсуждаемыми свойствами. $\square$

4. ТРУБЧАТЫЕ ОРБИТЫ ОБСУЖДАЕМЫХ АЛГЕБР

Предложения 3.1 и 3.2 подтверждают качественный результат работы [7] о «малом» количестве алгебр Ли, обладающих орбитами с двумя свойствами:

- А) невырожденность,
- Б) несводимость к трубкам.

При этом уменьшение с 56 рассматриваемых типов алгебр Ли из двух блоков до $9 + 3$ выписанных конкретных типов базисов является существенным продвижением в обсуждаемой задаче. Однако в этом разделе мы покажем, что и оценка числом 12 также является неокончательной и сильно завышенной.

Сформулируем точные утверждения, позволяющие сделать такой вывод.

Предложение 4.1 ([8]). *Все невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$ 7-мерных алгебр Ли четырех типов*

$$[7, [6, 18], 1, 1], \quad [7, [6, 24], 1, 2], \quad [7, [6, 24], 1, 4] \quad \text{и} \quad [7, [6, 24], 1, 5]$$

из предложения 3.1 голоморфно эквивалентны трубчатым многообразиям.

Предложение 4.2. *Все регулярные 7-мерные орбиты алгебр $[7, [6, 21], 1, k]$ из предложения 3.2 голоморфно эквивалентны трубчатым многообразиям.*

Доказательства этих утверждений можно получить за счет непосредственного интегрирования систем уравнений в частных производных, отвечающих выписанным выше базисам реализаций всех алгебр из предложений 3.1 и 3.2. Процедура такого интегрирования дает наглядные описания орбит этих алгебр, но является достаточно утомительной. Мы приведем здесь рассуждение, доказывающее общим образом (без детальных вычислений) трубчатый характер изучаемых орбит всех трех типов алгебр Ли из предложения 4.2.

Доказательство. С точностью до сдвига переменной $z_3^* = z_3 + D_6$ базисы всех трех типов, определяемые формулами (3.2), (3.3), (3.4) и (3.5), можно представить в единой обобщенной форме

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\
e_2 &= (0, 1, 0, 0), \\
e_3 &= (0, 0, 1, 0), \\
e_4 &= (0, -z_1, C_4, T_1(z)), \\
e_5 &= (0, 0, -z_1, -\frac{1}{2}z_1^2), \\
e_6 &= (1, 0, 0, z_3), \\
e_7 &= (z_1, T_2(z), T_3(z), T_4(z)),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $T_k(z)$ — некоторые голоморфные функции от $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, точный вид которых не является существенным для последующих обсуждений.

Уточним, что орбита в пространстве $\mathbb{C}^4$ алгебры Ли с таким базисом может, вообще говоря, иметь размерность меньше 7. Гарантией существования именно 7-мерной орбиты M , проходящей через точку $Q \in \mathbb{C}^4$, является (в силу теоремы Фробениуса [2]) условие полноты ранга (7×8) -матрицы, составленной из вещественных и мнимых частей компонент базисных полей алгебры в точке Q .

Отметим, что наличие трех выпрямленных полей в этой алгебре означает независимость определяющей функции любой из орбит алгебры от трех вещественных переменных $x_k = \operatorname{Re} z_k$ ($k = 2, 3, 4$). Это позволяет упростить проверку полноты ранга за счет удаления из названной (7×8) -матрицы трех строк (и, соответственно, трех столбцов), отвечающих этим полям. Получаемая таким образом матрица размеров (4×5) для базиса, описываемого формулами (4.1), имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y_1 & C_{42} & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y_3 \\ x_1 & y_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $x_1 = \operatorname{Re} z_1$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$, $t_k = \operatorname{Im} T_k$, $C_{42} = \operatorname{Im} C_4$.

Ясно, что при $y_1 = 0$ строки матрицы (4.2) линейно зависимы, так что орбиты алгебры (4.1), проходящие через точки пространства $\mathbb{C}^4$ с нулевой координатой $\operatorname{Im} z_1$, не являются регулярными гиперповерхностями. А при $y_1 \neq 0$ минор 4-го порядка матрицы (4.1), получаемый отбрасыванием из нее последнего столбца и равный $-y_1^3$, отличен от нуля. Этим обеспечивается полный ранг матрицы (4.2) и совокупности полей (4.1).

Совокупность уравнений (2.3) для 7 полей (4.1) является системой линейных уравнений относительно 8 частных производных

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

В усеченном варианте, связанном с матрицей (4.2), эта система линейна относительно пяти производных

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Для алгебры Ли с базисом (4.1) рассмотрим значение производной $\frac{\partial \Phi}{\partial y_4}$ в некоторой точке регулярной орбиты M в пространстве $\mathbb{C}^4$. Эта производная не может обращаться в нуль, т.к. тогда в этой точке (в силу отличия от нуля рассмотренного выше минора) все 8 частных производных оказались бы нулевыми. Это противоречит условию регулярности обсуждаемой орбиты.

А пользуясь неравенством $\frac{\partial \Phi}{\partial y_4} \neq 0$, мы можем записать уравнение обсуждаемой орбиты M (вблизи фиксированной точки) в разрешенном относительно y_4 виде

$$y_4 = F(x_1, y_1, y_2, y_3). \quad (4.3)$$

Тогда для определяющей функции M имеем

$$\Phi = -y_4 + F(x_1, y_1, y_2, y_3) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} = -1.$$

Для точки $Q \in \mathbb{C}^4$ с ненулевой координатой y_1 и 7-мерной орбиты алгебры (4.1), заданной уравнением (4.3) и проходящей через эту точку, рассмотрим соотношения (2.3), отвечающие второй и третьей строкам матрицы (4.2). Они имеют вид

$$\frac{\partial F(x_1, y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} = x_1, \quad \frac{\partial F(x_1, y_1, y_2, y_3)}{\partial x_1} = y_3.$$

Это означает, что любая 7-мерная регулярная орбита в пространстве $\mathbb{C}^4$ для алгебр с базисом вида (4.1) может быть описана уравнением

$$y_4 = x_1 y_3 + G(y_1, y_2) \quad (4.4)$$

с некоторой аналитической функцией двух переменных G . Добавляя и вычитая в правой части полученного уравнения выражение $x_3 y_1$ и учитывая равенство

$$\text{Im}(z_1 z_3) = x_1 y_3 + x_3 y_1,$$

получаем после голоморфной замены переменных $z_3^* = -i z_3$, $z_4^* = z_4 - z_1 z_3$ трубчатое уравнение поверхности (4.4) вида

$$y_4^* = y_1 y_3^* + G(y_1, y_2).$$

Предложение 4.2 доказано. $\square$

5. ОРБИТЫ АЛГЕБР С НИЛЬ-РАДИКАЛОМ [6, 9]

Перейдем к изложению результата, аналогичного предложениям 3.1 и 3.2 и связанного с алгеброй [6, 9]. Прежде всего, дополним список коммутационных соотношений этой алгебры, приведенный в разделе 1, коммутаторами базисных полей этой 6-мерной алгебры с полем e_7 в рамках каждого из 8 ее 7-мерных продолжений. Эту информацию представим в виде следующих таблиц.

ТАБЛИЦА 3. Таблица коммутационных соотношений для алгебр Ли $[7, [6, 9], 1, k]$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Параметрами отдельных алгебр являются произвольные вещественные числа m, n .

Тип алгебры	$[7, [6, 9], 1, 1]$	$[7, [6, 9], 1, 2]$	$[7, [6, 9], 1, 3]$	$[7, [6, 9], 1, 4]$
$[e_1, e_7]$	$2e_1 - 2me_2$	$-2e_2$		$2e_1$
$[e_2, e_7]$	$2me_1 + 2e_2$	$2e_1$		$2e_2$
$[e_3, e_7]$	$(n+1)e_3 - me_4$	$me_3 - e_4$	e_3	
$[e_4, e_7]$	$me_3 + (n+1)e_4$	$e_3 + me_4$	e_4	
$[e_5, e_7]$	$(1-n)e_5 + me_6$	$-me_5 + e_6$	$-e_5$	$2e_5$
$[e_6, e_7]$	$-me_5 + (1-n)e_6$	$e_5 + me_6$	$-e_6$	$e_1 + 2e_6$

ТАБЛИЦА 4. Таблица коммутационных соотношений для алгебр Ли $[7, [6, 9], 2, k]$ ($k = 1, 2$) и $[7, [6, 9], 3, k]$ ($k = 1, 2$). Параметрами являются $m, n, p \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Тип алгебры	$[7, [6, 9], 2, 1]$	$[7, [6, 9], 2, 2]$	$[7, [6, 9], 3, 1]$	$[7, [6, 9], 3, 2]$
$[e_1, e_7]$	$2e_1 - 2me_2$	$-2e_2$	$2me_1 - 2ne_2$	$2me_1 + 2e_2$
$[e_2, e_7]$	$2me_1 + 2e_2$	$2e_1$	$2ne_1 + 2me_2$	$-2e_1 + 2me_2$
$[e_3, e_7]$	$e_3 - me_4$	$-e_4$	$(m + p)e_3 - (n + \varepsilon)e_4$	$4e_4$
$[e_4, e_7]$	$me_3 + e_4$	e_3	$(n + \varepsilon)e_3 + (m + p)e_4$	$-4e_3$
$[e_5, e_7]$	$\varepsilon e_3 + e_5 + me_6$	$\varepsilon e_3 + e_6$	$(m - p)e_5 + (n - \varepsilon)e_6$	$2me_5 + 2e_6$
$[e_6, e_7]$	$-\varepsilon e_4 + me_5 + e_6$	$-\varepsilon e_4 - e_5$	$-(n - \varepsilon)e_5 + (m - p)e_6$	$e_1 - 2e_5 + 2me_6$

Предложение 5.1. Из 8 типов 7-мерных алгебр Ли списка [18], имеющих 6-мерный ниль-радикал $[6, 9]$, невырожденные не сводимые к трубкам орбиты в $\mathbb{C}^4$ могут иметь не более 3 типов. Для всех реализаций этих трех типов базисные поля $e_1, \dots, e_5$ имеют с точностью до голоморфных замен координат следующий общий вид ($\varepsilon = \pm 1$):

$$e_1 = (0, 0, 0, 1), \quad e_2 = (0, 0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 1, 0, 0), \quad e_4 = (0, i\varepsilon, i\varepsilon z_1, z_1), \quad e_5 = (1, 0, z_2, 0).$$

Два оставшихся поля каждой из алгебр описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} [7, [6, 9], 1, 1] \quad (m \in \mathbb{R}, n \geq 0; B_k, C_k, D_k, \hat{B}_7 \in \mathbb{C}; n \cdot B_6 = 0) : \\ e_6 = (i\varepsilon, B_6, B_6 z_1 + C_6, z_2 + D_6), \quad e_7 = (a_7(z), b_7(z), c_7(z), d_7(z)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_7(z) &= (i\varepsilon m + 1 - n)z_1, \quad b_7(z) = (n + 1 - i\varepsilon m)z_2 + mB_6 z_1 + B_7, \\ c_7(z) &= -i\varepsilon m z_1 z_2 + 2z_3 - 2mz_4 + mB_6 z_1^2 + \hat{B}_7 z_1 + C_7, \\ d_7(z) &= -mz_1 z_2 + 2mz_3 + 2z_4 + mD_6 z_1 + D_7; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [7, [6, 9], 1, 2] \quad (m \geq 0; B_k, C_k, D_k, \hat{B}_7 \in \mathbb{C}; m \cdot B_6 = 0) : \\ e_6 = (i\varepsilon, B_6, B_6 z_1 + C_6, z_2), \quad e_7 = (a_7(z), b_7(z), c_7(z), d_7(z)), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} a_7(z) &= -(m - i\varepsilon)z_1, \quad b_7(z) = (m - i\varepsilon)z_2 + B_6 z_1 + 2C_6, \\ c_7(z) &= -2z_4 - i\varepsilon z_1 z_2 + B_6 z_1^2 + im\varepsilon C_6 z_1, \quad d_7(z) = 2z_3 - z_1 z_2; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [7, [6, 9], 1, 3] \quad (D_6 \in \mathbb{C}, C_7, D_7 \in \mathbb{R}) : \\ e_6 = (i\varepsilon, 0, -i\varepsilon D_6, z_2 + D_6), \quad e_7 = (-z_1, z_2 + D_6, D_6 z_1 + C_7, D_7). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Доказательство. Здесь, как и при доказательстве предложения 3.2, все обсуждение можно разбить на две части.

В одной из них получаются формулы (5.1)–(5.3) для базисных полей e_6, e_7 каждого из трех семейств, допускающих реализации в $\mathbb{C}^4$, удовлетворяющие необходимым условиям А) и Б). Эта часть доказательства базируется на формулах (2.4), общих для всех алгебр с ниль-радикалом $[6, 9]$.

Так, для алгебры $[7, [6, 9], 1, 3]$ рассмотрение четырех коммутационных соотношений $[e_j, e_7]$, $j = 1, 2, 3, 5$ приводит к (предварительной) формуле

$$e_7 = (-(z_1 + A_7), z_2 + B_7, B_7 z_1 + C_7, D_7) \quad (5.4)$$

с некоторыми комплексными константами A_7, B_7, C_7, D_7 .

Остается выписать компоненты двух соотношений $[e_4, e_7] = e_4$ и $[e_6, e_7] = -e_6$ для уточнения возможных значений этих констант, а также части параметров из формул (2.4) для полей e_4, e_6 . Так, вычисляя коммутатор $[e_4, e_7]$, имеем

$$[e_4, e_7] = i\varepsilon(0, 1, 0, 0) + (z_1 + A_7)(0, 0, i\varepsilon, 1).$$

Приравнивая компоненты этого векторного поля компонентам e_4 , получим равенства

$$A_7 = D_4, \quad C_4 = i\varepsilon D_4. \quad (5.5)$$

Из соотношения $[e_6, e_7] = -e_6$ аналогичным образом получаем следующие необходимые условия для его выполнения:

$$B_6 = 0, \quad C_6 = -i\varepsilon B_7, \quad B_7 = D_6. \quad (5.6)$$

Подставляя формулы (5.5) и (5.6) в (2.4) и (5.4), получим (с учетом возможности замены поля e_7 на $e_7 - (\operatorname{Re} C_7)e_2 - (\operatorname{Re} D_7)e_1$) утверждение предложения 5.1 для алгебры $[7, [6, 9], 1, 3]$. Аналогичные действия для семейств алгебр $[7, [6, 9], 1, 1]$ и $[7, [6, 9], 1, 2]$ приводят (после гораздо более объемных вычислений) к заявленным формулам для базисных полей этих алгебр.

Вторая часть доказательства связана с оставшимися алгебрами Ли, имеющими ниль-радикал $[6, 9]$, и с получением для них выводов, противоречащих обсуждаемым необходимым условиям А) невырожденности и Б) несводимости к трубкам (из раздела 4). Приведем здесь для иллюстрации обсуждение одной из таких алгебр, а именно $[7, [6, 9], 1, 4]$.

Для нее коммутаторы четверки полей e_1, e_2, e_3, e_5 с полем e_7 описываются последним столбцом таблицы 3 (компоненты самих этих полей представлены в формулах (2.4)). В силу этих уточнений для поля e_7 получаем следующий предварительный вид

$$e_7 = (2z_1 + A_7, B_7, 2z_3 + B_7z_1 + C_7, 2z_4 + D_7) \quad (5.7)$$

с некоторыми комплексными константами A_7, B_7, C_7, D_7 .

Рассмотрим теперь коммутационное соотношение $[e_6, e_7] = e_1 + 2e_6$. С учетом (5.7) и формулы $e_6 = (i\varepsilon, B_6, B_6z_1 + C_6, z_2 + D_6)$ из (2.4) левая часть этого соотношения имеет в векторной форме вид

$$i\varepsilon \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ B_7 \\ 0 \end{pmatrix} + (B_6z_1 + C_6) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (z_2 + D_6) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - (2z_1 + A_7) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_6 \\ 0 \end{pmatrix} - B_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда в покомпонентной записи рассматриваемое соотношение принимает вид системы четырех скалярных уравнений

$$\begin{aligned} 2i\varepsilon &= 2i\varepsilon, & 0 &= 2B_6, \\ i\varepsilon B_7 + 2(B_6z_1 + C_6) - B_6(2z_1 + A_7) &= 2(B_6z_1 + C_6), \\ 2(z_2 + D_6) - B_7 &= 2(z_2 + D_6) + 1. \end{aligned}$$

С учетом второго из этих уравнений в двух последних равенствах приходим к противоречивым требованиям

$$B_7 = 0 \quad \text{и} \quad B_7 = -1.$$

Это означает невозможность реализации алгебры $[7, [6, 9], 1, 4]$ в $\mathbb{C}^4$ с выполнением необходимых условий существования у этой реализации хотя бы одной невырожденной нетрубчатой орбиты.

Алгебры семейств $[7, [6, 9], 2, k]$ ($k = 1, 2$) и $[7, [6, 9], 3, k]$ ($k = 1, 2$) обсуждаются аналогично. Предложение 5.1 считаем доказанным. $\square$

Предложение 5.2. При любых значениях параметров, входящих в формулы (5.3), все вещественные гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$, являющиеся орбитами голоморфных реализаций алгебры [7, [6, 9], 1, 3], оказываются вырожденными по Леви.

Доказательство. Наличие тройки выпрямленных полей в базисе (5.3) означает, что определяющая функция орбиты не зависит от переменных $x_k = \operatorname{Re} z_k$ ($k = 1, 2, 3$). Отвечающая оставшимся базисным полям система 4-х уравнений для определяющей функции $\Phi(x_1, y_1, y_2, e_3, y_4)$ любой из искомым орбит имеет вид:

$$\begin{aligned} e_4 : \quad & \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \varepsilon x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} + y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} = 0, \\ e_5 : \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + (y_2 - D_{62}) \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = 0, \\ e_6 : \quad & \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \varepsilon D_{61} \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} = 0, \\ e_7 : \quad & -x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + (C_{72} + D_{61}y_1 + D_{62}x_1) \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} + D_{72} \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Решением второго, самого короткого, из этих уравнений является функция

$$\Phi = F(y_3 - x_1(y_2 - D_{62}), y_1, y_2, y_4). \quad (5.9)$$

Обозначая аргументы этой функции, соответственно, через t_1, t_2, t_3, t_4 , подставим (5.9) в три оставшихся уравнения системы (5.8). Уравнение, отвечающее полю e_4 , примет в новых переменных вид

$$\varepsilon \frac{\partial F}{\partial t_3} + y_1 \frac{\partial F}{\partial t_4} = 0,$$

а его решением является $F = G(t_1, t_2, t_4 - \varepsilon t_2 t_3)$. В новых переменных $s_1 = t_1, s_2 = t_2, s_3 = t_4 - \varepsilon t_2 t_3$ два последних уравнения изучаемой системы запишутся в форме

$$\varepsilon \left(\frac{\partial G}{\partial s_2} - D_{61} \frac{\partial G}{\partial s_1} \right) = 0, \quad (C_{72} + D_{61}) \frac{\partial G}{\partial s_1} - s_2 \frac{\partial G}{\partial s_2} + D_{72} \frac{\partial G}{\partial s_3} = 0.$$

В переменных $\xi_1 = s_1 + D_{61}s_2, \xi_2 = s_3$ решение системы этих двух уравнений имеет вид

$$G = \varphi(D_{72}\xi_1 - C_{72}\xi_2)$$

с произвольной аналитической функцией одного переменного. Это означает, что решение исходной системы четырех уравнений описывается формулой

$$\Phi = D_{72}\xi_1 - C_{72}\xi_2 = A = \text{const.}$$

Возвращаясь к исходным переменным, имеем общее решение системы (5.8) в виде

$$y_2(\varepsilon C_{72}y_1 - D_{72}x_1) + (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma y_3 + \delta y_4) - A = 0 \quad (5.10)$$

с некоторыми вещественными коэффициентами в линейной части. Если в этой формуле хотя бы один из пары коэффициентов (γ, δ) равен нулю, то итоговое уравнение (5.10) гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ оказывается не зависящим от одной из комплексных переменных. Это означает представимость полученной поверхности в виде прямого произведения комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и некоторого 5-мерного многообразия, а значит, голоморфную вырожденность и, как следствие, вырожденность по Леви. Но и при наличии в этой паре ненулевого коэффициента линейная комбинация $\gamma z_3 + \delta z_4$, рассматриваемая как новая комплексная переменная z_3^* , позволяет говорить о независимости уравнения (5.2) от переменной $z_4^* = z_4$. Таким образом, и в этом случае поверхность (5.2) вырождена по Леви. $\square$

Аналогично можно проинтегрировать два типа алгебр $[7, [6, 9], 1, 1]$ и $[7, [6, 9], 1, 2]$ при всех значениях содержащихся в них параметров. Однако получаемые при этом формулы (как промежуточные, так и окончательные), описывающие орбиты этих алгебр, являются чрезмерно громоздкими. В связи с этим мы приведем здесь лишь два примера однородных гиперповерхностей, отвечающих этим алгебрам и полученных их интегрированием при некоторых частных значениях параметров.

Пример 5.1. Орбиты алгебр $[7, [6, 9], 1, 1]$, определяемых формулами (5.1) при

$$B_6 = C_6 = D_6 = B_7 = \hat{B}_7 = C_7 = D_7 = 0, \quad n = 0, \quad m \neq 0,$$

сводятся голоморфными преобразованиями к поверхностям с уравнениями

$$(y_3 - x_1 y_2)^2 + (y_4 - \varepsilon y_1 y_2)^2 = \exp \left(\frac{2}{m} \operatorname{arctg} \left(\frac{y_4 - \varepsilon y_1 y_2}{y_3 - x_1 y_2} \right) \right).$$

Пример 5.2. Орбиты алгебр $[7, [6, 9], 1, 2]$, определяемых формулами (5.2) при $B_6 = C_6 = 0$, сводятся голоморфными преобразованиями к Леви-невырожденной гиперповерхности с уравнением

$$(y_3 - x_1 y_2)^2 + (y_4 - \varepsilon y_1 y_2)^2 = 1,$$

независимо от допустимых значений m .

Несложно проверить, например, с помощью символьных вычислений, что такие обобщения плоских логарифмических спиралей (из примера 5.1) и окружности (пример 5.2) являются Леви-невырожденными гиперповерхностями пространства $\mathbb{C}^4$ в точках общего положения.

6. ИТОГОВЫЕ ВЫВОДЫ

Главным выводом статьи можно считать ее основной результат, т.е. теорему 1.1 из введения. В качестве конкретных дополнений к этой теореме уточним, что 7 упоминаемых в ней типов — это пять типов алгебр Ли из предложения 3.1 и два типа алгебр из предложения 5.1. Для двух последних типов в разделе 5 статьи приведены примеры орбит, соответствующие некоторым частным значениям входящих в описания алгебр параметров; алгебры этих типов содержат ниль-радикал [6, 9].

Первые пять типов 7-мерных алгебр Ли, связанные с ниль-радикалами [6, 1], [6, 13], [6, 22], [6, 23], [6, 26], проинтегрированы в [8] при всех возможных значениях параметров, описывающих реализации в $\mathbb{C}^4$ этих алгебр. Приведем здесь описание всех таких Леви-невырожденных (не сводимых к трубкам) интегральных многообразий, являющихся голоморфно однородными вещественными гиперповерхностями 4-мерного комплексного пространства.

Теорема 6.1 ([8]). Любая невырожденная нетрубчатая орбита 7-мерной алгебры, имеющей 6-мерный ниль-радикал одного из типов (3.1), описывается с точностью до голоморфных замен координат уравнением одного из 5 следующих видов (A, B, C, D, Q, R — это некоторые вещественные константы):

$$\begin{aligned} [7, [6, 1], 1, 1] : \quad y_4 &= 2y_1 y_2 + (x_1^4 - 2x_1^2 y_1^2) + \frac{2}{y_1} (2y_3 - x_1^2 y_2) \\ &\quad + \frac{2}{y_1^2} + Q \cdot \left(x_1 y_2 - \frac{2}{3} x_1^3 y_1 \right) + R \cdot y_1^4; \end{aligned}$$

$$[7, [6, 13], 1, 1] : \quad y_4 = x_1 y_3 + \frac{1}{3} x_1 y_2 (3x_1^2 - y_1^2) + \frac{5}{36} x_1^2 y_1 (-3x_1^4 + 3x_1^2 y_1^2 - y_1^4) - B y_1^7 - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{y_1};$$

$$\begin{aligned}
[7, [6, 22], 1, 1] : \quad y_4 &= \frac{B}{3}y_1y_2 + \frac{AB}{3}x_1(x_1^2 - y_1^2) + \frac{B^2}{6}x_1^2y_1 \\
&\quad - \frac{1}{y_1}\left(\frac{B^2}{4}x_1^4 + Bx_1^2y_2 + By_3 + \frac{1}{2}y_2^2\right) + Cy_1^3; \\
[7, [6, 23], 1, 1] : \quad y_3 &= By_1^4 - 2x_1y_1y_2 + 2y_1y_4 - y_2^2; \\
[7, [6, 26], 1, 1] : \quad y_3 &= y_1y_4 + x_1y_1y_2 \pm \frac{y_2^2}{y_1} + By_1^5.
\end{aligned}$$

Завершая обсуждения 64 рассмотренных типов 7-мерных алгебр Ли, уточним, что вопрос о выполнении или нарушении свойства Б) для гиперповерхностей из 7 полученных семейств пока остается открытым. Для получения ответов необходимы дополнительные исследования.

Дадим в заключение еще один вариант краткой формулировки результатов статьи: *из 10 нильпотентных 6-мерных алгебр Ли, содержащих две 4-мерные абелевы подалгебры, не более шести алгебр имеют 7-мерные (неразложимые разрешимые) продолжения с Леви-невыврожденными не сводимыми к трубкам 7-мерными орбитами в пространстве $\mathbb{C}^4$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Атанов, А.В. Лобода. *Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **173**, 86–115 (2019).
2. Р.Л. Бишоп, Р.Д. Криттенден. *Геометрия многообразий*. М.: Мир. 1967.
3. В.В. Крутских, А.В. Лобода. *Компьютерная обработка данных в одной многомерной математической задаче* // В: Информатика: проблемы, методы, технологии, ООО «ВЭЛ-БОРН», Воронеж, 411–419 (2021).
4. В.В. Крутских, А.В. Лобода. *Применение системного анализа и компьютерных алгоритмов при изучении орбит 7-мерных алгебр Ли* // Матем. физика и компьютер. моделирование **27:3**, 38–59 (2024).
5. А.В. Лобода. *Голоморфно-однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$* // Тр. моск. мат. о.-ва **81:2**, 205–280 (2020).
6. А.В. Лобода, В.К. Каверина. *О вырожденности орбит нильпотентных алгебр Ли* // Уфим. мат. ж. **14:1**, 57–83 (2022).
7. А.В. Лобода. *О 7-мерных алгебрах Ли, допускающих Леви-невыврожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$* // Тр. моск. мат. о.-ва **84:2**, 205–230 (2023).
8. А.В. Лобода, А.В. Атанов, П.Е. Албуткина. *Об алгоритмах описания однородных подмногообразий многомерных пространств*. В: Информатика: проблемы, методология, технологии, ВГУ, Воронеж, 380–391 (2024).
9. A.V. Atanov, A.V. Loboda. *On degenerate orbits of real Lie algebras in multidimensional complex spaces* // Russ. J. Math. Phys. **30:4**, 432–442 (2023).
10. V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy. *Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic* // J. Geom. Anal. **20:3**, 538–564 (2010).
11. E. Cartan. *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes* // Ann. Math. Pura Appl. **11**, 17–90 (1933).
12. B. Doubrov, J. Merker, D. The. *Classification of simply-transitive Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$* // Int. Math. Res. Not. **2022:19**, 15421–15473 (2022).
13. M.P. Gong. *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$)*. PhD Thesis, Univ. Waterloo, Waterloo (1998).
14. F. Hindleleh, G. Thompson. *Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical* // Algebras Groups Geom. **25:3**, 243–265 (2008).

15. M. Kolář, I. Kossovskiy, D. Sykes. *New examples of 2-nondegenerate real hypersurfaces in $\mathbb{C}^N$ with arbitrary nilpotent symbols* // J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **110**:2, e12962 (2024).
16. B. Kruglikov, A. Santi. *On 3-nondegenerate CR manifolds in dimension 7. I: The transitive case* // J. Reine Angew. Math. **2025**:820, 167–211 (2025).
17. A.V. Loboda, R.S. Akopyan, V.V. Krutskikh. *On the orbits of nilpotent 7-dimensional Lie algebras in 4-dimensional complex space* // Ж. сиб. фед. унив., мат. физ. **13**:3, 360–372 (2020).
18. A.R. Parry. *Classification of Real Indecomposable Solvable Lie Algebras of Small Dimension with Codimension One Nilradicals*. Master's Thesis, Logan, Utah (2007).
19. A.L. Vu, T.A. Nguyen, T.T.C. Nguyen, T.T.M. Nguyen, T.N. Vo. *Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals* // Commun. Algebra **51**:5, 1866–1885 (2023).

Александр Васильевич Лобода,
Воронежский государственный технический университет,
Московский пр., 14,
394026, г. Воронеж, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: lobvgasu@yandex.ru

Рипсима Сергеевна Акопян,
МИРЭА – Российский технологический университет,
Пр-т Вернадского, д. 78,
119454, Москва, Россия
E-mail: akrim111@yandex.ru