

УДК 517.984

О ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ДВУМЯ ЗАМОРОЖЕННЫМИ АРГУМЕНТАМИ

М.А. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. Обратные спектральные задачи заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Задача восстановления оператора Штурма — Лиувилля с одним замороженным аргументом по одному спектру рассматривалась ранее в работах различных авторов. В данной статье исследуется единственность восстановления оператора с двумя замороженными аргументами и различными коэффициентами p, q по спектрам двух краевых задач. Данный случай является существенно более трудным, чем случай одного замороженного аргумента, поскольку оператор больше не является одномерным возмущением. Мы докажем, что оператор с двумя замороженными аргументами в общем случае не восстанавливается по двум спектрам. Для единственности восстановления нужно наложить некоторые условия на коэффициенты. Мы предположим, что коэффициенты p и q являются нулевыми на некотором отрезке и докажем теорему единственности. Также мы получим формулы регуляризованных следов для двух спектров. Результат сформулирован в терминах сходимости определенного ряда, что позволяет избежать требования гладкости коэффициентов.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, замороженный аргумент, нелокальный оператор, оператор Штурма — Лиувилля, формула регуляризованных следов, теорема единственности.

Mathematics Subject Classification: 34K29, 34A55

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается обратная спектральная задача для оператора Штурма — Лиувилля с двумя замороженными аргументами:

$$\ell y = -y''(x) + p(x)y(a) + q(x)y(b), \quad x \in (0, \pi),$$

где $p, q \in L_2(0, \pi)$ комплекснозначны, а параметры $a, b \in (0, \pi)$ фиксированы и называются замороженными аргументами. В отличие от чисто дифференциальных операторов, изученных в рамках классической теории обратных спектральных задач [3], [5], [14], [21], [34], оператор ℓy является нелокальным. Нелокальные операторы обладают особыми спектральными свойствами (см. [9], [10], [12], [18], [28], [31], [33]) и требуют развития методов, отличающихся от методов классической теории обратных спектральных задач.

В предыдущих работах изучались операторы Штурма — Лиувилля с одним замороженным аргументом (т.е. в случае, когда $q = 0$) и различными краевыми условиями (см. [2], [9], [11], [13], [15]–[17], [19], [25]–[28], [30], [32]). Рассматривалась следующая постановка

M.A. KUZNETSOVA, ON RECOVERING PROBLEM FOR STURM — LIOUVILLE OPERATOR WITH TWO FROZEN ARGUMENTS.

© Кузнецова М.А. 2025.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 24-71-10003 (<https://rscf.ru/project/24-71-10003/>).

Поступила 10 марта 2025 г.

обратной задачи: по спектру оператора восстановить коэффициент p . Наиболее полные результаты были получены для краевых условий

$$y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(\pi) = 0,$$

где $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ обозначают порядок производной. В рациональном случае $\frac{a}{\pi} \in \mathbb{Q}$ часть спектра может вырождаться (т.е. она не зависит от p), и для единственности восстановления p кроме спектра необходимы дополнительные данные (см. [13], [15], [16]). В иррациональном случае $\frac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ эффект вырождения не возникает, и p восстанавливается по спектру однозначно (см. [32]). Таким образом, при п.в. $a \in (0, \pi)$ имеет место единственность восстановления одного коэффициента по одному спектру.

Общий подход к обоим случаям был развит в работах [25] и [26], впоследствии он был обобщен на операторы вида

$$\tilde{\ell}y = -y''(x) + p(x)y(a) + r(x)y(x)$$

(см. [27]). В статье [19] было замечено, что оператор Штурма — Лиувилля с одним замороженным аргументом является одномерным возмущением дифференциального оператора $\ell_0 y = -y''$, и была исследована обратная задача для соответствующего класса одномерных возмущений. В последнее время возник интерес к операторам с несколькими замороженными аргументами, при которых берутся одинаковые коэффициенты (см. [29]):

$$\ell_1 y = -y''(x) + \sum_{k=1}^m y(a_k)p(x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Они являются одномерными возмущениями того типа, который изучен в работе [19]. Рассмотрение этих операторов не приводит к ситуации, существенно отличающейся от случая одного замороженного аргумента, и обратные спектральные задачи могут быть исследованы методами работ [19], [25]–[27]. В то же время, интересующий нас оператор ℓy не является одномерным возмущением, и для него нет известных методов теории обратных спектральных задач.

Введем краевую задачу $\mathcal{L}_j(p, q)$ с номером $j = 0, 1$:

$$\ell y = \lambda y(x), \tag{1.1}$$

$$y^{(j)}(0) = y(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

и обозначим через $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$ её спектр. Рассмотрим следующую обратную задачу:

Обратная задача 1.1. По спектрам $\{\lambda_{n0}\}_{n \geq 1}$ и $\{\lambda_{n1}\}_{n \geq 1}$ найти p и q .

Прежде всего нас интересует единственность решения данной обратной задачи, т.е. всегда ли различным парам (p, q) соответствуют различные пары спектров $(\{\lambda_{n0}\}_{n \geq 1}, \{\lambda_{n1}\}_{n \geq 1})$. Сразу заметим, что при $a = b$ имеет значение только сумма p и q , в этом случае решение обратной задачи 1.1 неединственно. Чтобы исключить эту ситуацию, наложим ограничение

$$0 < a < b < \pi. \tag{1.3}$$

Мы получим, что при любых a и b , удовлетворяющих (1.3), решение обратной задачи 1.1 неединственно. Для единственности нахождения p и q следует уточнить постановку обратной задачи, задавая дополнительную информацию. Мы предположим, что коэффициенты p и q являются нулевыми одновременно на $[0, b]$ или $[a, \pi]$. При этом условии мы докажем теорему единственности восстановления p и q по двум спектрам.

Также мы получим формулы регуляризованных следов для спектров $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$, $j = 0, 1$. Под регуляризованным следом понимается ряд из разностей собственных значений двух операторов, один из которых является возмущением другого. С физической точки зрения

это понятие отражает меру дефекта энергии квантовой системы (см. [4]). Основополагающие результаты теории регуляризованных следов приведены в обзоре [7].

Формулы регуляризованных следов для операторов с одним замороженным аргументом были получены в работах [20], [22]–[24] при абсолютно непрерывном коэффициенте p . В [22] при условиях $p \in W_2^1[0, \pi]$ и $q \equiv 0$ было доказано, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{nj} - \left(n - \frac{j}{2} \right)^2 \right) = p(a), \quad j = 0, 1.$$

Мы получим формулы регуляризованных следов при более общих условиях $p, q \in L_1[0, \pi]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{nj} - \left(n - \frac{j}{2} \right)^2 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{nj}, \quad j = 0, 1, \quad (1.4)$$

где s_{nj} выражаются через коэффициенты Фурье функций p и q по системе собственных функций невозмущенного оператора $-y''$. Формула (1.4) понимается таким образом, что либо оба ряда расходятся, либо сходятся к одному и тому же числу. Если p абсолютно непрерывна в окрестности точки a , и q абсолютно непрерывна в окрестности точки b , то имеет место сходимость к числу $p(a) + q(b)$. Формулы регуляризованных следов для операторов с двумя замороженными аргументами можно также получить из результатов работ [6] и [8], однако требуются более сильные ограничения на коэффициенты.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 мы построим характеристические функции и получим асимптотические формулы для спектров (см. теорему 2.1). В разделе 3 мы построим пример различных пар (p, q) , приводящих к одинаковой паре спектров (см. теорему 3.1). В разделе 4 мы приведем уточненную постановку обратной задачи и докажем для нее теорему единственности (см. теорему 4.1). В разделе 5 мы получим формулы регуляризованных следов для спектров $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$ (см. теорему 5.1). В приложении даны детали доказательства формулы (2.3) для характеристических функций.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Получим характеристические функции краевых задач $\mathcal{L}_j(p, q)$ при $j = 0, 1$. Известно, что при $f \in L_2(0, \pi)$ любое решение уравнения $-y''(x) + f(x) = \lambda y(x)$ может быть представлено в виде

$$y(x) = x_1 \frac{\sin \rho x}{\rho} + x_2 \cos \rho x + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} f(t) dt, \quad \rho^2 = \lambda, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{C}.$$

Полагая $f(t) = x_3 p(t) + x_4 q(t)$, получим

$$y(x) = x_1 \frac{\sin \rho x}{\rho} + x_2 \cos \rho x + x_3 \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} p(t) dt + x_4 \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) dt. \quad (2.1)$$

Эта функция — решение уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда $y(a) = x_3$ и $y(b) = x_4$. Чтобы данное решение было нетривиальным, необходимо и достаточно, чтобы вектор $(x_j)_{j=1}^4$ был ненулевым.

Подставив выражение (2.1) в условия (1.2) при $j = 0, 1$ и равенства $y(a) = x_3$, $y(b) = x_4$, приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_{2-j} &= 0, \\ x_1 \frac{\sin \rho \pi}{\rho} + x_2 \cos \rho \pi + x_3 \int_0^\pi \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt + x_4 \int_0^\pi \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} q(t) dt &= 0, \\ x_1 \frac{\sin \rho a}{\rho} + x_2 \cos \rho a + x_3 \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} p(t) dt + x_4 \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} q(t) dt &= x_3, \\ x_1 \frac{\sin \rho b}{\rho} + x_2 \cos \rho b + x_3 \int_0^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} p(t) dt + x_4 \int_0^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} q(t) dt &= x_4. \end{aligned} \quad (2.2)$$

У системы существует ненулевое решение $(x_k)_{k=1}^4$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_j(\lambda) := \begin{vmatrix} \varphi_j(\rho, \pi) & \int_0^\pi \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^\pi \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} q(t) dt \\ \varphi_j(\rho, a) & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} p(t) dt - 1 & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} q(t) dt \\ \varphi_j(\rho, b) & \int_0^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} q(t) dt - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где используется обозначение

$$\varphi_j(\rho, z) = \begin{cases} \rho^{-1} \sin \rho z, & j = 0, \\ \cos \rho z, & j = 1. \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем обозначать зависимость от p и q набором аргументов после точки с запятой: таким образом, $\Delta_j(\lambda) = \Delta_j(\lambda; p, q)$. Эта зависимость может быть не указана, если нет акцента на конкретных значениях p и q .

При $j = 0, 1$ функция $\Delta_j(\lambda)$ является характеристической функцией краевой задачи $\mathcal{L}_j(p, q)$: нули данной функции совпадают со спектром краевой задачи. Поскольку разложения Тейлора целых функций $\rho^{-1} \sin \rho z$ и $\cos \rho z$ содержат ρ только в четных степенях, функции Δ_0 и Δ_1 являются целыми функциями от λ .

Раскрывая определители, после преобразований получим представления

$$\Delta_j(\lambda) = \varphi_j(\rho, \pi) + A_{j0}(\lambda) + A_{j1}(\lambda) + B_j(\lambda), \quad j = 0, 1, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_{j0}(\lambda) &= A_{j0}(\lambda; p) = \varphi_j(\rho, a) \int_a^\pi \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt + \frac{\sin \rho(\pi - a)}{\rho} \int_0^a \varphi_j(\rho, t) p(t) dt, \\ A_{j1}(\lambda) &= A_{j1}(\lambda; q) = \varphi_j(\rho, b) \int_b^\pi \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} q(t) dt + \frac{\sin \rho(\pi - b)}{\rho} \int_0^b \varphi_j(\rho, t) q(t) dt, \end{aligned} \quad (2.4)$$

а $B_j(\lambda)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_j(\lambda) = B_j(\lambda; p, q) = & \frac{\sin \rho(\pi - b)}{\rho} \left(\int_0^a \varphi_j(\rho, t) p(t) dt \int_a^b \frac{\sin \rho(\xi - a)}{\rho} q(\xi) d\xi \right. \\
& - \int_0^a \varphi_j(\rho, \xi) q(\xi) d\xi \int_a^b \frac{\sin \rho(t - a)}{\rho} p(t) dt \Big) \\
& + \frac{\sin \rho(b - a)}{\rho} \left(\int_0^a \varphi_j(\rho, t) p(t) dt \int_b^\pi \frac{\sin \rho(\pi - \xi)}{\rho} q(\xi) d\xi \right. \\
& - \int_0^a \varphi_j(\rho, \xi) q(\xi) d\xi \int_b^\pi \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt \Big) \\
& + \varphi_j(\rho, a) \left(\int_b^\pi \frac{\sin \rho(\pi - \xi)}{\rho} q(\xi) d\xi \int_a^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} p(t) dt \right. \\
& - \int_b^\pi \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt \int_a^b \frac{\sin \rho(b - \xi)}{\rho} q(\xi) d\xi \Big) \\
& + \varphi_j(\rho, a) \frac{\sin \rho(\pi - b)}{\rho} \int_a^b \int_a^b \frac{\sin \rho(\xi - t)}{\rho} q(\xi) p(t) dt d\xi
\end{aligned} \tag{2.5}$$

(выкладки см. в приложении). Из представления (2.3) ясно, что $\Delta_j(\lambda)$ являются целыми функциями порядка $\frac{1}{2}$ типа π . С помощью стандартного метода, основанного на применении теоремы Руше (см. [21]), доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *При $j = 0, 1$ выполнены асимптотические формулы*

$$\lambda_{nj} = \left(n - \frac{j}{2}\right)^2 + \varkappa_{nj}, \quad \{\varkappa_{nj}\}_{n \geq 1} \in \ell_2.$$

В дальнейшем важную роль будут играть некоторые свойства слагаемых из представления (2.3). Слагаемые $A_{j0}(\lambda; p)$ и $A_{j1}(\lambda; q)$ зависят линейно от p и q , соответственно. Слагаемое $B_j(\lambda; p, q)$ зависит билинейно от p и q . Из формулы (2.5) ясно, что эта зависимость антисимметричная: $B_j(\lambda; p, q) = -B_j(\lambda; q, p)$ (пары антисимметричных членов объединены в скобки в (2.5)). По этой причине, если $p = q$, то $B_j(\lambda; p, q) = 0$. В силу билинейности отсюда следует, что

$$B_j(\lambda; q, \alpha q) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) можно также заметить, что $B_j(\lambda; p, q) = 0$, если

$$\begin{cases} p(x) \equiv 0, & q(x) \equiv 0, & x \in [a, \pi], \\ p(x) \equiv 0, & q(x) \equiv 0, & x \in [0, b]. \end{cases} \tag{2.7}$$

Построение характеристической функции для краевой задачи $\mathcal{L}_0$ рассматривалось в [29] в частном случае $p = q$. При данном условии $B_j(\lambda) = 0$, и наше представление (2.3) согласуется с полученной там формулой. Еще один случай, когда $B_j(\lambda) = 0$ — это $q = 0$. При этом условии также имеем $A_{j1}(\lambda) = 0$, и формула (2.3) дает представление для характеристической функции оператора с одним замороженным аргументом, которое согласуется с полученным ранее (см. [13], [15], [16]).

3. НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1.1

В данном разделе мы построим различные пары коэффициентов (p, q) , которые приводят к одинаковым парам спектров $(\{\lambda_{n0}\}_{n \geq 1}, \{\lambda_{n1}\}_{n \geq 1})$. Этим мы докажем неединственность решения обратной задачи 1.1.

Продолжим функции p и q на $\mathbb{R} \setminus [0, \pi]$ нулем. Действуя аналогично доказательству леммы 1 в [16], получим представления

$$\begin{aligned} A_0(\lambda; p, q) &:= A_{00}(\lambda) + A_{01}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \rho t}{\rho^2} W_0(t) dt, \\ A_1(\lambda; p, q) &:= A_{10}(\lambda) + A_{11}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \rho t}{\rho} W_1(t) dt, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} W_j(t; p, q) &= (-1)^{j+1} p(t + a - \pi) + (-1)^{j+1} p(\pi - t + a) \\ &\quad + (-1)^j p(\pi - a + t) + p(\pi - a - t) \\ &\quad + (-1)^{j+1} q(t + b - \pi) + (-1)^{j+1} q(\pi - t + b) \\ &\quad + (-1)^j q(\pi - b + t) + q(\pi - b - t), \quad t \in [0, \pi], \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

Лемма 3.1. Положим $T = \min\{a, b - a, \pi - b\}$. Пусть $G(t) \in L_2(\mathbb{R})$ — любая четная нетривиальная функция, которая тождественно 0 вне отрезка $[-T, T]$. Тогда для функций

$$s(t) = G(b - t), \quad r(t) = -G(a - t) \quad (3.2)$$

выполнено $A_j(\lambda; s, r) = 0$, $j = 0, 1$.

Доказательство. При $t \in [0, \pi]$ введем функции

$$\begin{aligned} u_0(t; p, q) &:= \frac{W_0(t) + W_1(t)}{2} = p(\pi - a - t) + q(\pi - b - t), \\ u_1(t; p, q) &:= \frac{W_0(t) - W_1(t)}{2} = -p(t + a - \pi) - p(\pi - t + a) + p(\pi - a + t) \\ &\quad - q(t + b - \pi) - q(\pi - t + b) + q(\pi - b + t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим, что s и r тождественны 0 вне $[0, \pi]$, поэтому в (3.3) можно формально заменить p на s и q на r . Докажем, что $u_0(t; s, r) = u_1(t; s, r) = 0$.

В самом деле,

$$u_0(t; s, r) = s(\pi - a - t) + r(\pi - b - t) \stackrel{(3.2)}{=} G(b - \pi + a + t) - G(a - \pi + b + t) = 0.$$

В $u_1(t; s, r)$ сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1(t; s, r) &= -(s(t + a - \pi) + r(\pi - t + b)) \\ &\quad - (s(\pi - t + a) + r(t + b - \pi)) + (s(\pi - a + t) + r(\pi - b + t)). \end{aligned}$$

Применяя (3.2) к каждой паре слагаемых и используя четность функции $G(t)$, придем к тождеству $u_1(t; s, r) = 0$.

Из того, что $u_0(t; s, r) = u_1(t; s, r) = 0$, следует $W_0(t; s, r) = 0$ и $W_1(t; s, r) = 0$. В силу (3.1) получим $A_j(\lambda; s, r) = 0$ при $j = 0, 1$. $\square$

Теорема 3.1. Различные пары коэффициентов

$$(p, q) = (-r, s + r) \quad \text{и} \quad (p, q) = (-s - r, s)$$

приводят к одинаковой паре спектров $(\{\lambda_{n0}\}_{n \geq 1}, \{\lambda_{n1}\}_{n \geq 1})$. Таким образом, обратная задача 1.1 не имеет единственного решения.

Доказательство. Поскольку G в лемме 3.1 нетривиальная функция, s и r также нетривиальные функции, поэтому $(-r, s+r) \neq (-s-r, s)$. Пусть $j = 0, 1$. В силу линейности $A_{j0}(\lambda; p)$ и $A_{j1}(\lambda; q)$ относительно p и q мы имеем

$$\begin{aligned} A_j(\lambda; -r, s+r) - A_j(\lambda; -s-r, s) &= A_{j0}(\lambda; -r) + A_{j1}(\lambda; s+r) - A_{j0}(\lambda; -s-r) - A_{j1}(\lambda; s) \\ &= A_{j0}(\lambda; s) + A_{j1}(\lambda; r) = A_j(\lambda; s, r) = 0, \end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу леммы 3.1. Таким образом,

$$A_j(\lambda; -r, s+r) = A_j(\lambda; -s-r, s).$$

Используя свойство (2.6) и билинейность $B_j(\lambda; p, q)$ относительно p и q , получим

$$B_j(\lambda; -r, s+r) = B_j(\lambda; -r, s) = B_j(\lambda; -s-r, s).$$

По формуле (2.3) имеем $\Delta_j(\lambda; -r, s+r) = \Delta_j(\lambda; -s-r, s)$. Это значит, что пары $(p, q) = (-r, s+r)$ и $(p, q) = (-s-r, s)$ дают одинаковый спектр $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$. $\square$

Если выбрать какую-либо функцию G , удовлетворяющую условиям леммы 3.1, то в теореме 3.1 получим конкретные пары коэффициентов (p, q) .

Пример 3.1. Пусть $a = \frac{\pi}{4}$ и $b = \frac{\pi}{2}$. Тогда условиям леммы 3.1 удовлетворяет функция

$$G(t) = \chi_{[-T, T]}(t), \quad T = \frac{\pi}{4}, \quad \chi_S(t) := \begin{cases} 1, & t \in S, \\ 0, & t \notin S. \end{cases}$$

Получим $s(t) = \chi_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]}(t)$ и $r(t) = -\chi_{[0, \frac{\pi}{2}]}(t)$. По теореме 3.1 следующие пары коэффициентов (p, q) приводят к одинаковым парам спектров:

$$\begin{aligned} p(t) &= \chi_{[0, \frac{\pi}{2}]}(t), & q(t) &= \chi_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]}(t) - \chi_{[0, \frac{\pi}{2}]}(t); \\ p(t) &= -\chi_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]}(t) + \chi_{[0, \frac{\pi}{2}]}(t), & q(t) &= \chi_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]}(t). \end{aligned}$$

Непосредственная подстановка каждой пары (p, q) в формулы (2.3)–(2.5) подтверждает, что характеристические функции совпадают:

$$\begin{aligned} \Delta_0(\lambda; p, q) &= \frac{1}{\rho} \sin \rho\pi + \frac{1}{2\rho^3} \left(-3 \sin \rho\pi + 5 \sin \frac{3\rho\pi}{4} - 2 \sin \frac{\rho\pi}{2} + \sin \frac{\rho\pi}{4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho^5} \left(\sin \frac{\rho\pi}{2} \left[\cos \frac{\rho\pi}{4} - 1 \right]^2 + 2 \sin \frac{\rho\pi}{4} \left[\cos \frac{\rho\pi}{4} - 1 \right] \left[\cos \frac{\rho\pi}{2} - \cos \frac{\rho\pi}{4} \right] \right), \\ \Delta_1(\lambda; p, q) &= \cos \rho\pi + \frac{1}{2\rho^2} \left(-3 \cos \rho\pi + 3 \cos \frac{3\rho\pi}{4} + \cos \frac{\rho\pi}{4} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho^4} \left(\sin \frac{\rho\pi}{2} \sin \frac{\rho\pi}{4} \left[1 - \cos \frac{\rho\pi}{4} \right] + \sin^2 \frac{\rho\pi}{4} \left[\cos \frac{\rho\pi}{4} - \cos \frac{\rho\pi}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\rho\pi}{4} \left[\cos \frac{\rho\pi}{4} - \cos \frac{\rho\pi}{2} \right] \left[1 - \cos \frac{\rho\pi}{4} \right] \right). \end{aligned}$$

4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим обратную задачу 1.1 при дополнительных условиях на p и q :

Обратная задача 4.1. Известно, что пара функций (p, q) удовлетворяет условиям (2.7). По спектрам $\{\lambda_{n0}\}_{n \geq 1}$ и $\{\lambda_{n1}\}_{n \geq 1}$ восстановить p и q .

Докажем теорему единственности решения обратной задачи 4.1. Кроме краевых задач $\mathcal{L}_0(p, q)$ и $\mathcal{L}_1(p, q)$ рассмотрим краевые задачи $\mathcal{L}_0(\tilde{p}, \tilde{q})$ и $\mathcal{L}_1(\tilde{p}, \tilde{q})$ с некоторыми коэффициентами $\tilde{p}, \tilde{q} \in L_2(0, \pi)$. При $j = 0, 1$ обозначим через $\{\tilde{\lambda}_{nj}\}_{n \geq 1}$ спектр краевой задачи $\mathcal{L}_j(\tilde{p}, \tilde{q})$.

Теорема 4.1. Пусть функции $p, q, \tilde{p}$ и $\tilde{q}$ удовлетворяют одному из двух условий:

1. Каждая функция является нулевой на $[a, \pi]$;
2. Каждая функция является нулевой на $[0, b]$.

Тогда из равенств $\{\lambda_{n0}\}_{n \geq 1} = \{\tilde{\lambda}_{n0}\}_{n \geq 1}$ и $\{\lambda_{n1}\}_{n \geq 1} = \{\tilde{\lambda}_{n1}\}_{n \geq 1}$ следует, что $p = \tilde{p}$ и $q = \tilde{q}$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1. Характеристические функции однозначно восстанавливаются по спектрам:

$$\Delta_j(\lambda) = \pi^{1-j} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{kj} - \lambda}{(n - \frac{j}{2})^2}, \quad j = 0, 1.$$

Доказательство леммы стандартно (см. доказательство теоремы 1.1.4 в [21]). В нем применяются асимптотические формулы теоремы 2.1, а также формулы

$$\Delta_0(\lambda) = \frac{\sin \rho \pi}{\rho} + O\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{\rho^2}\right), \quad \Delta_1(\lambda) = \cos \rho \pi + O\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{\rho}\right), \quad \tau = \operatorname{Im} \rho,$$

которые следуют из (2.3)–(2.5).

Доказательство теоремы 4.1. Из леммы 4.1 следует, что

$$\Delta_j(\lambda; p, q) = \Delta_j(\lambda; \tilde{p}, \tilde{q}), \quad j = 0, 1.$$

Поскольку $B_j(\lambda; p, q) = B_j(\lambda; \tilde{p}, \tilde{q}) = 0$, в представлении (2.3) имеем $A_j(\lambda; p, q) = A_j(\lambda; \tilde{p}, \tilde{q})$, и в (3.1) получим $W_j(t; p, q) = W_j(t; \tilde{p}, \tilde{q})$, $j = 0, 1$. Отсюда

$$u_j(t; p, q) = u_j(t; \tilde{p}, \tilde{q}), \quad j = 0, 1. \quad (4.1)$$

Обозначим $\hat{p} = p - \tilde{p}$ и $\hat{q} = q - \tilde{q}$. Из (3.3) и (4.1) следует, что

$$\begin{aligned} \hat{p}(\pi - a - t) + \hat{q}(\pi - b - t) &= 0, \\ -\hat{p}(t + a - \pi) - \hat{p}(\pi - t + a) + \hat{p}(\pi - a + t) &= 0, \\ -\hat{q}(t + b - \pi) - \hat{q}(\pi - t + b) + \hat{q}(\pi - b + t) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $t \in [0, \pi]$. Рассматривая первое равенство в (4.2) при $t \in [0, \pi - a]$, после замены $z = \pi - a - t$ получим

$$\hat{p}(z) + \hat{q}(z + a - b) = 0, \quad z \in [0, \pi - a]. \quad (4.3)$$

Для определенности предположим, что $p, q, \tilde{p}$ и $\tilde{q}$ являются нулевыми на $[0, b]$. Рассматривая второе равенство в (4.2) при $t \in [0, a]$, с учетом того, что $\hat{p} = \hat{q} = 0$ на $[0, b]$, получим $\hat{p}(\pi - a + t) + \hat{q}(\pi - b + t) = 0$. Замена $z = \pi - a - t$ дает равенство (4.3) при $z \in [\pi - a, \pi]$. Таким образом, мы приходим к формуле

$$\hat{p}(z) + \hat{q}(z + a - b) = 0, \quad z \in [0, \pi]. \quad (4.4)$$

Аналогично, второе равенство в (4.2) при $t \in [b, \pi]$ дает $\hat{p}(\pi - t + a) + \hat{q}(\pi - t + b) = 0$, и после замены мы получим

$$\hat{p}(z + a - b) + \hat{q}(z) = 0, \quad z \in [b, \pi]. \quad (4.5)$$

Поскольку $\hat{p} = \hat{q} = 0$ на $[0, b]$, рассматривая $b \leq z \leq \min(2b - a, \pi)$ в формулах (4.4) и (4.5), придем к равенствам $\hat{p}(z) = \hat{q}(z) = 0$. Повторяя этот шаг, по индукции докажем

$$\hat{p} = \hat{q} = 0, \quad b + (k - 1)(b - a) \leq z \leq \min(b + k(b - a), \pi), \quad k = 1, \dots, n,$$

где $n \in \mathbb{N}$ такое наименьшее число, что $b + n(b - a) \geq \pi$. Данные тождества означают, что $\hat{p} = \hat{q} = 0$ на $[b, \pi]$, и утверждение теоремы доказано. Случай, когда $p, q, \tilde{p}$ и $\tilde{q}$ тождественны 0 на $[a, \pi]$, рассматривается аналогично. $\square$

5. ФОРМУЛЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

При $n \geq 1$ положим

$$\begin{aligned} a_{n0} &= \frac{2}{\pi} \sin na \int_0^\pi \sin nt p(t) dt, & a_{n1} &= \frac{2}{\pi} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)a \int_0^\pi \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)t p(t) dt, \\ b_{n0} &= \frac{2}{\pi} \sin nb \int_0^\pi \sin nt q(t) dt, & b_{n1} &= \frac{2}{\pi} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)b \int_0^\pi \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)t q(t) dt \end{aligned}$$

и введем числа $s_{nj} = a_{nj} + b_{nj}$, $j = 0, 1$.

Теорема 5.1. Пусть $p, q \in L_1[0, \pi]$ и $j = 0, 1$. Ряд $\sum_{n=1}^\infty \left(\lambda_{nj} - \left(n - \frac{j}{2}\right)^2\right)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty s_{nj}$. В случае сходимости выполнена формула (1.4).

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.1. Пусть $c < d$, и дана функция $f \in L_1[c, d]$. Тогда

$$\int_c^d e^{i\rho(t-c)} f(t) dt = o(e^{|\tau|(d-c)}), \quad \int_c^d e^{i\rho(d-t)} f(t) dt = o(e^{|\tau|(d-c)}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

где $\tau = \operatorname{Im} \rho$.

Доказательство. После замены переменной интегрирования оба равенства в (5.1) сводятся к асимптотической формуле

$$I(\rho) := \int_0^z e^{i\rho t} g(t) dt = o(e^{|\tau|z}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (5.2)$$

где $z = d - c > 0$ и $g \in L_1[0, z]$. Для доказательства (5.2) рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Существует непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{g} \in C^{(1)}[0, z]$ такая, что

$$\int_0^z |\tilde{g}(t) - g(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначив

$$I_1(\rho) = \int_0^z e^{i\rho t} \tilde{g}(t) dt,$$

имеем

$$\left| \int_0^z e^{i\rho t} g(t) dt \right| \leq \int_0^z |e^{i\rho t}| |\tilde{g}(t) - g(t)| dt + |I_1(\rho)| \leq e^{|\tau|z} \frac{\varepsilon}{2} + |I_1(\rho)|. \quad (5.3)$$

Интегрируя по частям $I_1(\rho)$, получим

$$|I_1(\rho)| \leq |\rho|^{-1} M_\varepsilon e^{|\tau|z}, \quad M_\varepsilon = 2 \sup_{t \in [0, z]} |\tilde{g}(t)| + \int_0^{\pi-a} |\tilde{g}'(t)| dt.$$

При достаточно больших $|\rho| > 2\varepsilon^{-1} M_\varepsilon$ имеем $|I_1(\rho)| \leq e^{|\tau|z} \frac{\varepsilon}{2}$. Применяя эту оценку к правой части (5.3), для произвольного $\varepsilon > 0$ получим неравенство

$$|I(\rho)| \leq \varepsilon e^{|\tau|z}, \quad |\rho| > 2\varepsilon^{-1} M_\varepsilon,$$

что означает (5.2). $\square$

Доказательство теоремы 5.1. Для определенности рассмотрим случай $j = 0$ (выкладки для $j = 1$ аналогичны). Обозначим

$$S(\lambda) = \frac{\sin \rho \pi}{\rho}, \quad \Gamma_N = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 \right\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$I_N := \sum_{n=1}^N (\lambda_{n0} - n^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \lambda \left(\ln \frac{\Delta_0(\lambda)}{S(\lambda)} \right)' d\lambda. \quad (5.4)$$

При $\lambda \in \Gamma_N$ оценим

$$\frac{\Delta_0(\lambda)}{S(\lambda)} = 1 + f(\lambda), \quad f(\lambda) := \frac{A_{00}(\lambda) + A_{01}(\lambda) + B_0(\lambda)}{S(\lambda)}.$$

Стандартным способом (см. [21]) доказывается, что

$$|S(\lambda)| \geq C \frac{e^{|\tau|\pi}}{|\rho|}, \quad \lambda \in \Gamma_N. \quad (5.5)$$

Поскольку

$$\sin \rho \xi = \frac{e^{i\rho \xi} - e^{-i\rho \xi}}{2i}, \quad \cos \rho \xi = \frac{e^{i\rho \xi} + e^{-i\rho \xi}}{2},$$

к каждому интегралу в (2.4) и (2.5) можно применить лемму 5.1. После этого мы придем к асимптотикам

$$A_{00}(\lambda) = o\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{\rho^2}\right), \quad A_{01}(\lambda) = o\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{\rho^2}\right), \quad B_0(\lambda) = o\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{\rho^3}\right). \quad (5.6)$$

Таким образом, в силу (5.5) и (5.6) имеем $f(\lambda) = o(\rho^{-1})$, $\lambda \in \Gamma_N$, и при больших N приращение аргумента $\Delta_0(\lambda)/S(\lambda)$ на контуре Γ_N равно 0. Интегрируя (5.4) по частям, приходим к формуле

$$I_N = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \ln(1 + f(\lambda)) d\lambda.$$

Применяя разложение Тейлора к $\ln(1 + f(\lambda))$, с учетом равенств

$$f(\lambda) = o(\rho^{-1}) \quad \text{и} \quad \frac{B_0(\lambda)}{S(\lambda)} = o(\rho^{-2})$$

получим

$$I_N = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \left(\frac{A_{00}(\lambda)}{S(\lambda)} + \frac{A_{01}(\lambda)}{S(\lambda)} + o\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \right) d\lambda = -\sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{\lambda=n^2} \frac{A_{00}(\lambda)}{S(\lambda)} - \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{\lambda=n^2} \frac{A_{01}(\lambda)}{S(\lambda)} + o(1).$$

Вычисляя

$$\operatorname{Res}_{\lambda=n^2} \frac{A_{00}(\lambda)}{S(\lambda)} = -a_{n0}, \quad \operatorname{Res}_{\lambda=n^2} \frac{A_{01}(\lambda)}{S(\lambda)} = -b_{n0},$$

приходим к формуле

$$I_N = \sum_{n=1}^N s_{n0} + o(1).$$

Устремляя N к ∞ , получим утверждение теоремы. $\square$

Тригонометрические системы функций $\{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin nt\}_{n \geq 1}$ и $\{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(n - \frac{1}{2})t\}_{n \geq 1}$ являются ортонормированными базисами в $L_2(0, \pi)$ (это системы собственных функций невозмущенного оператора $-y''$ с краевыми условиями (1.2) при $j = 0$ и $j = 1$ соответственно). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nj}$ является рядом Фурье функции p в точке a , ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_{nj}$ является рядом Фурье функции q в точке b . Для тригонометрических систем известно несколько признаков сходимости рядов Фурье функции f в отдельной точке (см. [1]). В частности, достаточно потребовать абсолютную непрерывность f в окрестности точки, чтобы ряд сходился к значению f в данной точке. Если $p \in AC[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ и $q \in AC[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} = p(a), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{nj} = q(b),$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{nj} - \left(n - \frac{j}{2} \right)^2 \right) = p(a) + q(b),$$

что согласуется с результатами предыдущих работ [20], [22]. Заметим, что сходимость рядов в (1.4) может иметь место, даже если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nj}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_{nj}$ расходятся.

Пример 5.1. Пусть $j = 0$, $a = \frac{\pi}{3}$ и $b = \pi - a$. Возьмем функции $p, q \in L_2(0, \pi)$ такие, что

$$\int_0^{\pi} p(t) \sin nt \, dt = \frac{\pi}{2n} \operatorname{sgn}(\sin na), \quad n \geq 1, \quad q(t) = -p(\pi - t).$$

Тогда $a_{n0} = \frac{\sqrt{3}}{2n}$ при n , не кратном 3, и $a_{n0} = 0$ в противном случае. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} \right) > \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k},$$

и ряд расходится. С другой стороны, используя свойства $b = \pi - a$ и $q(t) = -p(\pi - t)$, получим $b_{n0} = -a_{n0}$ и $s_{n0} = 0$, $n \geq 1$. Таким образом, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n0}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n0}$ расходятся, а

$\sum_{n=1}^{\infty} s_{n0} = 0$. В силу теоремы 5.1 приходим к формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n0} - n^2) = 0.$$

Последнее равенство имеет место во всяком случае, когда $b = \pi - a$ и $q(t) = -p(\pi - t)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (2.3)

Для определенности рассмотрим случай $j = 0$. Раскладывая определитель на сумму по третьему столбцу, а затем на суммы по второму столбцу, получим

$$\Delta_0(\lambda) = D_{00} + D_{01} + D_{10} + D_{11},$$

где

$$D_{00} := \begin{vmatrix} \frac{\sin \rho \pi}{\rho} & 0 & 0 \\ \frac{\sin \rho a}{\rho} & -1 & 0 \\ \frac{\sin \rho b}{\rho} & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad D_{11} := \begin{vmatrix} \frac{\sin \rho \pi}{\rho} & \int_0^{\pi} \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^{\pi} \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} q(t) dt \\ \frac{\sin \rho a}{\rho} & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} q(t) dt \\ \frac{\sin \rho b}{\rho} & \int_0^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} q(t) dt \end{vmatrix},$$

$$D_{01} := \begin{vmatrix} \frac{\sin \rho \pi}{\rho} & \int_0^{\pi} \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt & 0 \\ \frac{\sin \rho a}{\rho} & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} p(t) dt & 0 \\ \frac{\sin \rho b}{\rho} & \int_0^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} p(t) dt & -1 \end{vmatrix}, \quad D_{10} := \begin{vmatrix} \frac{\sin \rho \pi}{\rho} & 0 & \int_0^{\pi} \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} q(t) dt \\ \frac{\sin \rho a}{\rho} & -1 & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} q(t) dt \\ \frac{\sin \rho b}{\rho} & 0 & \int_0^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} q(t) dt \end{vmatrix}.$$

Ясно, что $D_{00} = \frac{\sin \rho \pi}{\rho}$, что дает первое слагаемое в (2.3). Рассмотрим D_{01} :

$$\begin{aligned} D_{01} &= \frac{\sin \rho a}{\rho} \int_0^{\pi} \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt - \frac{\sin \rho \pi}{\rho} \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} p(t) dt \\ &= \frac{\sin \rho a}{\rho} \int_a^{\pi} \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt + \frac{1}{\rho^2} \int_0^a [\sin \rho a \sin \rho(\pi - t) - \sin \rho \pi \sin \rho(a - t)] p(t) dt. \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобятся тригонометрические формулы

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) - \sin \beta \sin(\alpha - \gamma) &= \sin \gamma \sin(\beta - \alpha), \\ \sin \alpha \cos(\beta - \gamma) - \cos \beta \sin(\alpha - \gamma) &= \sin \gamma \cos(\beta - \alpha). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Применяя первую формулу из (5.7), получим

$$\sin \rho a \sin \rho(\pi - t) - \sin \rho \pi \sin \rho(a - t) = \sin \rho t \sin \rho(\pi - a),$$

и приходим к равенству $D_{01} = A_{00}(\lambda)$. Аналогично $D_{10} = A_{01}(\lambda)$.

Положим $B_0(\lambda) = D_{11}$ и приведем $B_0(\lambda)$ к нужному виду (2.5). Разложим определитель D_{11} последовательно на суммы по второму и третьему столбцам, разбивая интегралы на суммы

$$\int_0^\pi = \int_0^a + \int_a^b + \int_b^\pi, \quad \int_0^b = \int_0^a + \int_a^b.$$

Выпишем слагаемое, которое содержит интегралы функций p и q только на отрезках $[0, a]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin \rho \pi}{\rho} \int_0^a \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^a \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} q(t) dt \\ \frac{\sin \rho a}{\rho} \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} q(t) dt \\ \frac{\sin \rho b}{\rho} \int_0^a \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^a \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} q(t) dt \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Вычтем из первой строки вторую, умноженную на $\cos \rho(\pi - a)$, и вычтем из третьей строки вторую, умноженную на $\cos \rho(b - a)$. Обозначив

$$x_1 = \frac{\sin \rho(\pi - a)}{\rho}, \quad x_3 = \frac{\sin \rho(b - a)}{\rho},$$

получим

$$\begin{vmatrix} x_1 \cos \rho a & x_1 \int_0^a \cos \rho(a - t) p(t) dt & x_1 \int_0^a \cos \rho(a - t) q(t) dt \\ \frac{\sin \rho a}{\rho} & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} p(t) dt & \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} q(t) dt \\ x_3 \cos \rho a & x_3 \int_0^a \cos \rho(a - t) p(t) dt & x_3 \int_0^a \cos \rho(a - t) q(t) dt \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку первая и третья строки линейно зависимы. Таким образом, определитель (5.8) равен нулю, и в (2.5) отсутствует слагаемое, содержащее в качестве множителей интеграл функции p на $[0, a]$ и интеграл функции q на $[0, a]$.

Выпишем слагаемое, которое содержит в качестве множителей интеграл p на $[0, a]$ и интеграл q на $[a, b]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin \rho \pi}{\rho} \int_0^a \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} p(t) dt & \int_a^b \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} q(t) dt \\ \frac{\sin \rho a}{\rho} \int_0^a \frac{\sin \rho(a - t)}{\rho} p(t) dt & 0 \\ \frac{\sin \rho b}{\rho} \int_0^a \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} p(t) dt & \int_a^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} q(t) dt \end{vmatrix}.$$

Умножим третью строку на $\cos \rho(\pi - b)$ и вычтем из первой, затем умножим вторую строку на $\cos \rho(b - a)$ и вычтем из третьей. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \rho(\pi - b)}{\rho^3} \begin{vmatrix} \cos \rho b & \int_0^a \cos \rho(b - t)p(t) dt & \int_a^b \cos \rho(b - t)q(t) dt \\ \sin \rho a & \int_0^a \sin \rho(a - t)p(t) dt & 0 \\ \sin \rho(b - a) \cos \rho a & \sin \rho(b - a) \int_0^a \cos \rho(a - t)p(t) dt & \int_a^b \sin \rho(b - t)q(t) dt \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sin \rho(\pi - b)}{\rho^3} \left(\int_a^b \cos \rho(b - \xi)q(\xi) d\xi \int_0^a [\sin \rho a \sin \rho(b - t) - \sin \rho b \sin \rho(a - t)]p(t) dt \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b \sin \rho(b - \xi)q(\xi) d\xi \int_0^a [\sin \rho a \cos \rho(b - t) - \cos \rho b \sin \rho(a - t)]p(t) dt \right). \end{aligned}$$

Применяя к слагаемым в квадратных скобках формулы (5.7), приходим к выражению

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \rho(\pi - b)}{\rho^3} \int_0^a \sin \rho t p(t) dt \int_a^b (\sin \rho(b - a) \cos \rho(b - \xi) - \cos \rho(b - a) \sin \rho(b - \xi))q(\xi) d\xi \\ &= \frac{\sin \rho(\pi - b)}{\rho^3} \int_0^a \sin \rho t p(t) dt \int_a^b \sin \rho(\xi - a) q(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

что дает первый член в первых скобках в (2.5). Остальные слагаемые в разложении определителя D_{11} рассматриваются аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.К. Бари. *Тригонометрические ряды*. М.: Физматгиз. 1961.
2. М.А. Кузнецова. *Обратная задача для оператора Штурма — Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале* // Итоги науки тех., Сер. соврем. мат. прилож., Темат. обз. **208**, 49–62 (2022).
3. Б.М. Левитан. *Обратные задачи Штурма — Лиувилля*. М.: Наука. 1984.
4. И.М. Лифшиц. *Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой* // Усп. мат. наук **7**:1(47), 171–180 (1952).
5. В.А. Марченко. *Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения*. Киев: Наукова Думка. 1977.
6. В.А. Садовничий, В.А. Любишкин. *Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов* // Функц. анал. прилож. **20**:3, 55–65 (1986).
7. В.А. Садовничий, В.Е. Подольский. *Следы операторов* // Усп. мат. наук **61**:5(371), 89–156 (2006).
8. И.Д. Цопанов. *Общие формулы регуляризованных следов для нагруженных уравнений* // Уфимск. матем. журн. **7**:1, 72–85 (2015).
9. S. Albeverio, R.O. Hryniv, L.P. Nizhnik. *Inverse spectral problems for non-local Sturm — Liouville operators* // Inverse Probl. **23**:2, 523–535 (2007).
10. N.P. Bondarenko. *An inverse problem for an integro-differential pencil with polynomial eigenparameter-dependence in the boundary condition* // Anal. Math. Phys. **9**:4, 2227–2236 (2019).

11. N.P. Bondarenko. *Finite-difference approximation of the inverse Sturm – Liouville problem with frozen argument* // Appl. Math. Comput. **413**, 126653 (2022).
12. N.P. Bondarenko. *Inverse problem for a differential operator on a star-shaped graph with nonlocal matching condition* // Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser. **29**:1, 2 (2023).
13. N.P. Bondarenko, S.A. Buterin, S.V. Vasiliev. *An inverse spectral problem for Sturm – Liouville operators with frozen argument* // J. Math. Anal. Appl. **472**:1, 1028–1041 (2019).
14. G. Borg. *Eine Umkehrung der Sturm – Liouvilleschen Eigenwertaufgabe* // Acta Math. **78**:1, 1–96 (1946).
15. S.A. Buterin, S.V. Vasiliev. *On recovering a Sturm – Liouville-type operator with the frozen argument rationally proportioned to the interval length* // J. Inverse Ill-Posed Probl. **27**:3, 429–438 (2019).
16. S. Buterin, M. Kuznetsova. *On the inverse problem for Sturm – Liouville-type operators with frozen argument: rational case* // Comput. Appl. Math. **39**:1, 5 (2020).
17. S. Buterin, Y.–T. Hu. *Inverse spectral problems for Hill-type operators with frozen argument* // Anal. Math. Phys. **11**:2, 75 (2021).
18. S.A. Buterin, M.A. Malyugina, C.–T. Shieh. *An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays* // Appl. Math. Comput. **411**, 126475 (2021).
19. O. Dobosevych, R. Hryniv. *Reconstruction of differential operators with frozen argument* // Axioms **11**:1, 24 (2022).
20. O. Dobosevych, R. Hryniv. *Trace formula for differential operators with frozen argument* // Appl. Math. Lett. **159**, 109270 (2025).
21. G. Freiling, V.A. Yurko. *Inverse Sturm – Liouville Problems and Their Applications*. NOVA Science Publishers, New York. 2001.
22. Y.–T. Hu, N.P. Bondarenko, C.–F. Yang. *Traces and inverse nodal problem for Sturm – Liouville operators with frozen argument* // Appl. Math. Lett. **102**, 106096 (2020).
23. Y.–T. Hu, Z.–Y. Huang, C.–F. Yang. *Traces for Sturm – Liouville operators with frozen argument on star graphs* // Result. Math. **75**:1, 37 (2020).
24. Y.–T. Hu, M. Şat. *Trace formulae for second-order differential pencils with a frozen argument* // Mathematics **11**:18, 3996 (2023).
25. M. Kuznetsova. *Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm – Liouville operators with frozen argument* // Appl. Math. Lett. **131**, 108035 (2022).
26. M.A. Kuznetsova. *Uniform stability of recovering Sturm – Liouville-type operators with frozen argument* // Result. Math. **78**:5, 169 (2023).
27. M.A. Kuznetsova. *On recovering non-local perturbation of non-self-adjoint Sturm – Liouville operator* // Izv. Sarat. Univ. Math. Mech. Inform. **24**:4, 488–497 (2024).
28. L.P. Nizhnik. *Inverse nonlocal Sturm – Liouville problem* // Inverse Probl. **26**:12, 125006 (2010).
29. C.–T. Shieh, T.–M. Tsai. *Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators with many frozen arguments* // Appl. Math. Comput. **492**, 129235 (2025).
30. T.–M. Tsai, H.–F. Liu, S. Buterin, L.–H. Chen, C.–T. Shieh. *Sturm – Liouville-type operators with frozen argument and Chebyshev polynomials* // Math. Methods Appl. Sci. **45**:16, 9635–9652 (2022).
31. B. Vojvodić, V. Vladičić, N. Djurić. *Inverse problem for Dirac operators with two constant delays* // J. Inverse Ill-Posed Probl. **32**:3, 573–586 (2024).
32. Y.–P. Wang, M. Zhang, W. Zhao, X. Wei. *Reconstruction for Sturm – Liouville operators with frozen argument for irrational cases* // Appl. Math. Lett. **111**, 106590 (2021).
33. C.–F. Yang, V. Yurko. *On the determination of differential pencils with nonlocal conditions* // J. Inverse Ill-Posed Probl. **26**:5, 577–588 (2018).
34. V.A. Yurko. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. VSP, Utrecht (2002).

Мария Андреевна Кузнецова,
 Саратовский государственный университет,
 ул. Астраханская, 83,
 410012, г. Саратов, Россия
 E-mail: kuznetsovama@sgu.ru