

УДК 519.644.5

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ ВБЛИЗИ И НА ГРАНИЦЕ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Д.Ю. ИВАНОВ

Аннотация. Нормальные производные потенциала двойного слоя (НП ПДС) задаются на границе области сильно сингулярными интегралами. Поэтому как на самой границе, так и вблизи нее нельзя с удовлетворительной точностью вычислить НП ПДС с помощью традиционных квадратурных формул, позволяющих вычислить НП ПДС с хорошей точностью на достаточном удалении от границы. В настоящей работе получены полуаналитические аппроксимации НП ПДС для двумерного уравнения Лапласа, равномерно сходящиеся с почти кубической скоростью в замкнутой приграничной области, включающей саму границу. Для этого используются точное интегрирование по гладкой компоненте функции расстояния вблизи точки наблюдения, аддитивно-мультипликативный способ выделения особенности и кусочно-квадратичная интерполяция медленно изменяющихся функций. Приведены результаты вычисления НП ПДС в замкнутой приграничной области единичного круга, подтверждающие равномерную почти кубическую сходимость предлагаемых аппроксимаций.

Ключевые слова: квадратурные формулы, аналитическое интегрирование, потенциал двойного слоя, сингулярный интеграл, равномерная сходимость.

Mathematics Subject Classification: 3108, 65E05

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод граничных элементов (МГЭ) наряду с методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) является одним из основных методов приближенного решения краевых задач [3, п. 2.5]. В МГЭ дискретизация осуществляется только на границе $\partial\Omega$ области Ω , в отличие от МКЭ и МКР, где необходимо дискретизировать всю область Ω . В основе МГЭ лежит аналитический метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [16, п. 1.1]. В рамках метода ГИУ решение краевой задачи в любой точке $x \in \Omega$ ищется в виде так называемого потенциала, который с помощью интегрального оператора выражается через неизвестную функцию плотности, заданную на границе $\partial\Omega$ как решение ГИУ. В двумерных задачах потенциалы имеют вид криволинейных интегралов по длине дуги s . Оператор ГИУ также выражается через потенциалы и их производные, заданные на границе $\partial\Omega$. Например, решения внутренней и внешней задач Дирихле имеют вид потенциала двойного слоя (ПДС), где функция плотности является решением соответствующего ГИУ второго рода, интегральный оператор которого также имеет вид ПДС [10, § 3.4]. Поэтому для осуществления МГЭ требуется аппроксимация потенциалов и их производных. Для этого в рамках двумерного МГЭ кривая $\partial\Omega$ разбивается на дуги, так

D.Y. IVANOV, SEMIANALYTIC APPROXIMATION OF NORMAL DERIVATIVE OF DOUBLE LAYER POTENTIAL NEAR AND AT BOUNDARY OF TWO-DIMENSIONAL DOMAIN.

© ИВАНОВ Д.Ю. 2025.

Поступила 14 июля 2024 г.

называемые граничные элементы (ГЭ). На каждом ГЭ функция плотности аппроксимируется полиномом, совпадающим с функцией плотности в заданных узловых точках, то есть осуществляется кусочно-полиномиальная интерполяция. Возникающие после этого интегралы на ГЭ в общем случае не могут быть вычислены точно. Для их вычисления используются квадратурные формулы, обычно это формулы Гаусса [2, гл. 3, § 5, п. 3]. Формулы Гаусса позволяют получить удовлетворительную точность, если потенциал вычисляется на достаточном удалении от границы $\partial\Omega$. Если же точка наблюдения x , в которой вычисляется потенциал, находится достаточно близко от узлов формулы Гаусса, точность, как правило, становится неудовлетворительной. Это явление, называемое эффектом пограничного слоя [32], связано с тем, что ядро интегрального оператора $K(x, x')$ имеет особенность при $x = x' \in \partial\Omega$, и в узлах формулы Гаусса вычисление потенциала невозможно. Интегралы на ГЭ называются сингулярными (СИ), если точка наблюдения x принадлежит ГЭ, и почти сингулярными (ПСИ), если точка x находится достаточно близко от ГЭ [28].

Необходимость вычислений вблизи границы области возникает при решении задач в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, пленках, на концах трещин [23], [25], [31]. Для вычисления СИ и ПСИ применяются специальные методы, в том числе, полуаналитические [11]–[14], [17], [23], [24], [27], [29], [30], [31]. Один из таких методов, намеченный в работах [24], [27], [31] и предложенный для аппроксимации двумерных потенциалов и их производных вблизи границы и на самой границе $\partial\Omega$, основан на переходе от переменной интегрирования s к переменной $\rho = (r^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}$, где r и d — расстояния от точки наблюдения x до точки интегрирования $x' \in \partial\Omega$ и до кривой $\partial\Omega$ соответственно. Интегралы по ρ вычисляются точно. Для этого применяется мультипликативный способ выделения особенности: подынтегральная функция разбивается на два множителя, один из которых, включающий якобиан, является медленно изменяющейся функцией и поэтому аппроксимируется полиномами, а другой множитель, сингулярный или близкий к сингулярному, берется в качестве весовой функции. Такой подход обладает двумя преимуществами. Во-первых, как было показано в работе автора [4], он может быть реализован для любой достаточно гладкой аналитически заданной кривой $\partial\Omega$, так как интегралы по переменной ρ во многих известных случаях вычисляются точно и зависят от кривой $\partial\Omega$ только параметрически, то есть координатные функции кривой $\partial\Omega$ не могут принципиально изменить вид подынтегральной функции. Во-вторых, не существует видимых причин, не позволяющих неограниченно увеличивать порядок аппроксимации в рамках данного метода. Действительно, порядок аппроксимации определяется порядком полинома, который находится в числителе, следовательно, сложность интеграла при увеличении порядка полинома принципиально не возрастает. Заметим, что в рамках полуаналитических методов, основанных на аппроксимации непосредственно интегралов по длине дуги s , неограниченному увеличению порядка аппроксимации мешает то обстоятельство, что степени функции расстояния r^{2n} ($n \in \mathbb{N}$) находятся в знаменателе подынтегрального выражения. Действительно, для того чтобы точное интегрирование стало возможным, функция r^2 заменяется многочленом по степеням s . Поскольку многочлен находится в знаменателе, его степень не может быть больше двух, иначе получение аналитического выражения для первообразной становится затруднительным. Поэтому в основном используется линейная аппроксимация координатных функций [11]–[14], [17], [23], [29]. Если используется квадратичная аппроксимация, то многочлен, получающийся вместо r^2 , все равно обрезается до квадратичного [30], и при таком подходе использование полиномов более высоких степеней для аппроксимации координатных функций лишено смысла.

В работах автора с помощью точного интегрирования по переменной ρ получены равномерно сходящиеся вблизи границы двумерной области аппроксимации теплового потенциала простого слоя (ППС) [4], аппроксимации теплового ПДС [5], аппроксимации ПДС для

уравнения Лапласа [6], аппроксимации нормальной производной (НП) теплового ППС [7], аппроксимации ПДС для диссипативного уравнения Гельмгольца [8], аппроксимации НП ППС для уравнения Лапласа [9]. В настоящей работе на основе точного интегрирования по переменной ρ получены равномерно сходящиеся аппроксимации НП ПДС для двумерного уравнения Лапласа вблизи границы и на самой границе. Необходимость вычисления значений НП ПДС на границе $\partial\Omega$ возникает при решении различных ГИУ [10, §§ 3.5–3.7, 3.9]. Если решение задачи Дирихле ищется в виде ПДС, то НП ПДС для уравнения Лапласа может быть использована для вычисления стационарного теплового потока, скорости жидкости при стационарном течении, напряженности электростатического поля. Отметим, что получение решения задачи Дирихле в виде ПДС обладает тем преимуществом, что при этом используются устойчивые ГИУ второго рода, тогда как при получении решения задачи Дирихле с помощью ППС используются неустойчивые ГИУ первого рода.

Известно, что для ПДС с непрерывной плотностью производные на границе, вообще говоря, не существуют, но если функция плотности достаточно гладкая, то НП ПДС может быть доопределена на границе до непрерывной во всем пространстве функции [15, § 2.5]. Под НП ПДС на границе подразумеваются значения, полученные в результате продолжения по непрерывности НП ПДС из области Ω . Они могут быть вычислены с помощью сильно сингулярных интегралов, существующих только в смысле конечного значения по Адамару, у которых подынтегральная функция имеет особенность r^{-2} [15, § 1.6]. В монографии [15, § 13.6] НП ПДС на границе приближенно вычисляется на основе полуаналитической аппроксимации таких интегралов в опорных точках, являющихся серединами ГЭ: на каждом ГЭ функция плотности заменяется постоянной функцией с узлом в опорной точке, и возникающие после этого интегралы в случае уравнения Лапласа вычисляются аналитически методом дискретных вихрей. В работе [21] показано, что НП ПДС на границе может быть выражена через менее сингулярные интегралы, существующие в смысле главного значения по Коши. В работах [1], [22] НП ПДС, выраженная через такие интегралы, аппроксимируется в опорных точках, являющихся серединами ГЭ, на основе квадратурной формулы средних прямоугольников. Аппроксимации НП ПДС на границе двумерной области Ω , полученные в монографии [15, § 13.6] и работах [1], [22], имеют ошибки $O(h \ln h)$ и $O(h^{\frac{1}{2}})$ соответственно (h — длина ГЭ).

В настоящей работе аппроксимации НП ПДС построены в замкнутой приграничной области, включающей саму границу, с полушириной, равной трети радиуса круга Ляпунова. На границе аппроксимируются интегралы, полученные в результате продолжения по непрерывности и существующие только в смысле конечного значения по Адамару. На первом этапе граница разбивается на равные по длине ГЭ и при фиксированных d вычисляются аппроксимации НП ПДС в опорных точках, проекции которых на кривую $\partial\Omega$ совпадают с серединами ГЭ. Для аппроксимации функции плотности используется кусочно-квадратичная интерполяция (ККИ) с тремя узлами на концах и в середине ГЭ. Точное интегрирование по переменной ρ осуществляется в некоторой окрестности проекции каждой опорной точки, где якобиан остается положительным и ограниченным (не на СИ и ПСИ, как в работах [24], [27], [31], а на дугах фиксированной длины). Интеграл по ρ представляется в виде суммы трех интегралов разной степени сингулярности, каждый из которых аппроксимируется на основе описанного выше мультипликативного способа выделения особенности. Для аппроксимации медленно изменяющихся множителей в подынтегральных функциях также используется ККИ. Для достижения наибольшего порядка аппроксимации осуществляется дополнительная дискретизация по переменной ρ , таким образом, чтобы ГЭ по переменной ρ располагались симметрично относительно каждой опорной точки. Для такой дополнительной дискретизации не требуются дополнительные значения функции плотности. Вне окрестностей, где осуществляется точное интегрирование по ρ , для аппроксимации интегралов, возникающих после ККИ функции плотности,

используются формулы Гаусса с порядком не ниже пятого. На втором этапе, для того чтобы удвоить число используемых опорных точек, не привлекая новые значения функции плотности, все ГЭ сдвигаются на половину длины ГЭ, а затем так же, как на первом этапе, вычисляются аппроксимации НП ПДС в опорных точках, соответствующих серединам новых ГЭ. На третьем этапе при фиксированных d осуществляется ККИ по переменной s с узлами в опорных точках. Это позволяет вычислить приближенные значения НП ПДС в любой точке замкнутой приграничной области, заданной криволинейными координатами s и d . Доказано, что полученные таким образом аппроксимации НП ПДС сходятся в замкнутой приграничной области равномерно со скоростью $O(h^3 \ln h)$. В заключительном разделе приведены результаты вычисления НП ПДС в замкнутой приграничной области единичного круга, которые подтверждают почти кубическую скорость равномерной сходимости полуаналитических аппроксимаций, а также демонстрируют невозможность использования исключительно формул Гаусса для аппроксимации интегралов, возникающих после интерполяции функции плотности.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω_+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах (x_1, x_2) зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{x}(s) := (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, и увеличивается, когда область Ω_+ при обходе границы $\partial\Omega$ остается слева. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbb{R}$), периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $[-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $I_S := [-S, S]$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0, n}$, $i = 1, 2$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$. Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если не оговорено особо.

Через $C(\partial\Omega)$ обозначим банахово пространство периодических с периодом $2S$ и непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ вещественных функций $f(s)$, с нормой

$$\|f\|_{C(\partial\Omega)} := \sup_{s \in I_S} |f(s)|.$$

Через $C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве I_S производные $f^{(l)}(s)$ ($l = \overline{1, n}$), с нормой

$$\|f\|_{C^n(\partial\Omega)} := \sum_{l=0}^n \|f^{(l)}\|_{C(\partial\Omega)} \quad (C^0(\partial\Omega) = C(\partial\Omega)).$$

Обозначим через $\vec{e}(s)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$ в сторону увеличения параметра s , а через $\vec{n}(s)$ — единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$, направленную внутрь области Ω_+ . Векторы $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$ образуют правую систему, и их координаты (x_1, x_2) вычисляются с помощью формул: $\vec{e}(s) = (\tilde{x}'_1(s), \tilde{x}'_2(s))$, $\vec{n}(s) = (-\tilde{x}'_2(s), \tilde{x}'_1(s))$.

Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\tilde{x}(s)$ и осями абсцисс и ординат, сонаправленными с векторами $\vec{e}(s)$ и $\vec{n}(s)$ соответственно. Точки $\tilde{x}_d(s)$ ($d \in \mathbb{R}$) с местными координатами $(\xi_s, \eta_s) = (0, d)$ образуют нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через $\tilde{x}(s)$ ($\tilde{x}_0(s) := \tilde{x}(s)$). Существует множество I_D вида $[-D_1, 0) \cup (0, D_2]$ ($D_1, D_2 > 0$), такое, что при $(s, d) \in T := I_S \times I_D$ соответствие между точками $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}_d(s)$ взаимно однозначное. Например, $I_D = [-D, 0) \cup (0, D]$, где D — треть радиуса круга Ляпунова [18, п. 102]. Так как $\partial\Omega \in C^2$, при фиксированном $d \in I_D$ точки

$\tilde{x}_d(s)$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, а нормали $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)$ к кривой $\partial\Omega$ являются и нормальными к кривой $\partial\Omega_d$. Кривые $\partial\Omega_d$ называются кривыми, параллельными кривой $\partial\Omega$.

На множестве T зададим функцию u :

$$u(s, d) := \int_{I_S} g v(s + \sigma) d\sigma. \quad (2.1)$$

Здесь

$$g(s, \sigma, d) := \partial_{\vec{n}(s)} \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} \ln r^{-1} = -2^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} \left[\frac{(\partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2)}{r^2} \right],$$

$$v \in C(\partial\Omega), \quad r(s, \sigma, d) := |\vec{r}|, \quad \vec{r}(s, \sigma, d) := \overrightarrow{\tilde{x}_d(s)\tilde{x}(s+\sigma)};$$

дифференцирования $\partial_{\vec{n}(s)}$ и $\partial_{\vec{n}(s+\sigma)}$ осуществляются по точкам $\tilde{x}_d(s)$ и $\tilde{x}(s+\sigma)$ в направлениях $\vec{n}(s)$ и $\vec{n}(s+\sigma)$ соответственно. Условимся, что мы можем иногда для краткости не писать аргументы функции, если они такие же, какие используются при определении функции. Функция $U(\tilde{x}_d(s)) := (2\pi)^{-1}u$ — НП двумерного ПДС с плотностью v в приграничной области Ω_D , образованной точками $\tilde{x}_d(s)$ при $(s, d) \in T$.

В силу известных теорем [10, § 2.5, теоремы 2.21, 2.23] функция $U(\tilde{x}_d(s))$ может быть доопределена по непрерывности при $d = 0$, $s \in I_S$. Здесь будут получены аппроксимации $\check{U}(\tilde{x}_d(s))$ функции $U(\tilde{x}_d(s))$, равномерно сходящиеся на множестве $\bar{T}$ со скоростью $O(h^3 \ln h)$, то есть для них будут выполняться оценки:

$$|\check{U} - U| \leq ch^3 |\ln h| \quad ((s, d) \in \bar{T}), \quad (2.2)$$

где c — не зависящая от h и (s, d) положительная постоянная.

3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Рассмотрим квадратичную интерполяцию, которая будет здесь использована, на примере некоторой вещественной функции $f(z)$. Пусть $h > 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $z_{\pm 1} := z_0 \pm h$. Обозначим через $C^k(I_h)$ ($k = 0, 1, \dots$) банаховы пространства непрерывных на промежутке $I_h \equiv [z_{-1}, z_1]$ функций $f(z)$, имеющих непрерывные на I_h производные $f^{(l)}(z)$ ($l = \overline{1, k}$), с нормой

$$\|f\|_{C^k(I_h)} \equiv \sum_{l=0}^k \sup_{z \in I_h} |f^{(l)}(z)|.$$

Пусть $f \in C^0(I_h)$. Зададим интерполяционный многочлен Лагранжа $\hat{f}(z)$ с равноотстоящими узлами z_{-1}, z_0, z_1 [2, гл. 2, § 5]:

$$\hat{f}(z) := f(z_{-1}) + (z - z_{-1})f_1(z_{-1}, z_1) + (z - z_{-1})(z - z_1)f_2(z_{-1}, z_1, z_0).$$

Здесь $f_1(z_{-1}, z_1)$, $f_2(z_{-1}, z_1, z_0)$ — разделенные разности 1-го и 2-го порядков с несовпадающими значениями аргумента [2, гл. 2, § 5, п. 1]:

$$f_1(z_{-1}, z_1) := \frac{f(z_1) - f(z_{-1})}{z_1 - z_{-1}},$$

$$f_2(z_{-1}, z_1, z_0) := \frac{f_1(z_1, z_0) - f_1(z_{-1}, z_1)}{z_0 - z_{-1}}.$$

Разделенные разности являются симметрическими функциями, то есть их значения не изменяются при любой перестановке аргументов [2, гл. 2, § 5, п. 1, свойство 3]. В узлах

выполняются равенства: $\tilde{f}(z_m) = f(z_m)$ ($m = \overline{-1, 1}$). При $z \in (z_{-1}, z_0) \cup (z_0, z_1)$ имеют место следующие две формулы:

$$f(z) = \hat{f}(z) + (z - z_{-1})(z - z_1)(z - z_0)f_3(z, z_{-1}, z_1, z_0) \quad (f \in C^0(I_h)), \quad (3.1)$$

$$f(z) = \hat{f}(z) + (z - z_{-1})(z - z_1)(z - z_0)f_3(z_{-1}, z_1, z_0, z_0) + (z - z_{-1})(z - z_1)(z - z_0)^2f_4(z, z_{-1}, z_1, z_0, z_0) \quad (f \in C^1(I_h)) \quad (3.2)$$

(см. формулы остаточного члена интерполяционной формулы Ньютона [2, гл. 2, § 5, п. 3], [2, гл. 2, § 11, п. 5]). Здесь f_3, f_4 — разделенные разности 3-го и 4-го порядков, некоторые из аргументов которых совпадают или могут совпадать:

$$f_3(z, z_{-1}, z_1, z_0) := \frac{f_2(z_{-1}, z_1, z_0) - f_2(z, z_{-1}, z_1)}{z_0 - z} \quad (z \in (z_{-1}, z_0) \cup (z_0, z_1), f \in C^0(I_h)),$$

$$f_3(z_m, z_{-1}, z_1, z_0) := \lim_{z' \rightarrow z_m} f_3(z', z_{-1}, z_1, z_0) \quad (m = \overline{-1, 1}, f \in C^1(I_h));$$

$$f_4(z, z_{-1}, z_1, z_0, z_0) := \frac{f_3(z_{-1}, z_1, z_0, z_0) - f_3(z, z_{-1}, z_1, z_0)}{z_0 - z} \quad (z \in (z_{-1}, z_0) \cup (z_0, z_1), f \in C^1(I_h)),$$

$$f_4(z_m, z_{-1}, z_1, z_0, z_0) := \lim_{z' \rightarrow z_m} f_4(z', z_{-1}, z_1, z_0, z_0) \quad (m = \overline{-1, 1}, f \in C^2(I_h)).$$

Для любого $z \in [z_{-1}, z_1]$ существуют $\zeta_1(z), \zeta_2(z) \in [z_{-1}, z_1]$, такие, что

$$f_3(z, z_{-1}, z_1, z_0) = 6^{-1}f^{(3)}(\zeta_1) \quad (f \in C^3(I_h)), \quad (3.3)$$

$$f_4(z, z_{-1}, z_1, z_0, z_0) = 24^{-1}f^{(4)}(\zeta_2) \quad (f \in C^4(I_h)) \quad (3.4)$$

(см. [2, гл. 2, § 5, п. 3], [2, гл. 2, § 11, п. 5]). В силу формул (3.1), (3.3) имеет место мажорантная оценка погрешности интерполяции на промежутке $[z_{-1}, z_1]$:

$$|\hat{f}(z) - f(z)| \leq c_\lambda \sup_{z \in [z_{-1}, z_1]} |f^{(3)}(z)| h^3 \quad \left(z \in [z_{-1}, z_1], f \in C^3(I_h), c_\lambda := \frac{\sqrt{3}}{27} \right). \quad (3.5)$$

Интерполяционный многочлен $\hat{f}(z)$ также может быть записан в виде суммы:

$$\hat{f}(z) = \sum_{m=-1}^1 f(z_m) \Lambda_m^{[z_{-1}, z_1]}(z) \quad (z \in [z_{-1}, z_1]), \quad (3.6)$$

где

$$\Lambda_m^{[z_{-1}, z_1]}(z) := \prod_{j=-1 \atop (j \neq m)}^1 \frac{z - z_j}{z_m - z_j} \quad (m = \overline{-1, 1})$$

(см. [2, гл. 2, § 2, п. 1]). На основе формулы (3.6) и неравенств

$$|\Lambda_m^{[z_{-1}, z_1]}(z)| \leq 1 \quad (z \in [z_{-1}, z_1], m = \overline{0, 2})$$

с помощью теоремы о среднем получаем при $z \in [z_{-1}, z_1]$, оценки:

$$|\hat{f}(z)| \leq c_{\Lambda,0} \max_{m=\overline{-1,1}} |f(z_m)| \quad (f \in C^0(I_h), c_{\Lambda,0} := 3), \quad (3.7)$$

$$|\hat{f}(z) - f(z)| \leq c_{\lambda,0} \sup_{z \in [z_{-1}, z_1]} |f^{(1)}(z)| h \quad (f \in C^1(I_h), c_{\lambda,0} := 3). \quad (3.8)$$

При $z \in [z_{-1}, z_1]$ для производных $\hat{f}^{(j)}(z)$ ($j = 1, 2$) справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(1)}(z) &= \frac{(2z - z_0 - z_1) \int_{z_0}^{z_{-1}} f^{(1)}(\zeta) d\zeta}{(z_{-1} - z_0)(z_{-1} - z_1)} + \frac{(2z - z_0 - z_{-1}) \int_{z_0}^{z_1} f^{(1)}(\zeta) d\zeta}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_{-1})} \quad (f \in C^1(I_h)), \\ \hat{f}^{(2)}(z) &= \frac{2 \int_{z_0}^{z_{-1}} f^{(2)}(\zeta) (z_{-1} - \zeta) d\zeta}{(z_{-1} - z_0)(z_{-1} - z_1)} + \frac{2 \int_{z_0}^{z_1} f^{(2)}(\zeta) (z_1 - \zeta) d\zeta}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_{-1})} \quad (f \in C^2(I_h)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

полученные с помощью представления (3.6) и формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла (ФТДЧОИ) [19, п. 318]. С помощью теоремы о среднем формулы (3.9) позволяют получить при $z \in [z_{-1}, z_1]$ оценки:

$$\left| \hat{f}^{(j)}(z) \right| \leq c_{\Lambda, j} \sup_{z \in [z_{-1}, z_1]} |f^{(j)}(z)| \quad (f \in C^j([z_{-1}, z_1]), j = 1, 2), \quad (3.10)$$

$$\left| \hat{f}^{(j)}(z) - f^{(j)}(z) \right| \leq c_{\Lambda, j} \sup_{z \in [z_{-1}, z_1]} |f^{(j+1)}(z)| h \quad (f \in C^{j+1}([z_{-1}, z_1]), j = 1, 2), \quad (3.11)$$

где $c_{\Lambda, 1} := 3$, $c_{\Lambda, 2} := 2^{-1}$, $c_{\Lambda, 1} := 4$, $c_{\Lambda, 2} := 2$.

4. АДДИТИВНО-МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ВЫДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ

Здесь рассмотрена возможность перехода от переменной интегрирования σ к переменной интегрирования ρ в интегралах (2.1), которая будет использована для полуаналитической аппроксимации НП ПДС.

Пусть $\vec{r}_0(s, \sigma) := \tilde{x}(s)\tilde{x}(s + \sigma)$, $r_0(s, \sigma) := |\vec{r}_0|$. Зададим на множестве $\Theta := I_S \times I_S$ функции $\psi_i(s, \sigma)$ ($i = \overline{0, 4}$): при $\sigma \neq 0$ равенствами

$$\psi_i := \frac{\varphi_i}{\sigma^2} \quad (i = \overline{0, 2}), \quad \psi_i := \frac{\varphi_i}{\sigma} \quad (i = 3, 4),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0(s, \sigma) &:= r_0^2 = [\tilde{x}_1(s + \sigma) - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s + \sigma) - \tilde{x}_2(s)]^2, \\ \varphi_1(s, \sigma) &:= 2^{-1} \partial_{\vec{n}(s + \sigma)} r_0^2 = -\tilde{x}_2'(s + \sigma) [\tilde{x}_1(s + \sigma) - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}_1'(s + \sigma) [\tilde{x}_2(s + \sigma) - \tilde{x}_2(s)] \\ &= (\vec{n}(s + \sigma), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, \\ \varphi_2(s, \sigma) &:= 2^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} r_0^2 = -\tilde{x}_2'(s) [\tilde{x}_1(s) - \tilde{x}_1(s + \sigma)] + \tilde{x}_1'(s) [\tilde{x}_2(s) - \tilde{x}_2(s + \sigma)] \\ &= -(\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, \\ \varphi_3(s, \sigma) &:= 2^{-1} \partial_\sigma \varphi_0 = \tilde{x}_1'(s + \sigma) [\tilde{x}_1(s + \sigma) - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}_2'(s + \sigma) [\tilde{x}_2(s + \sigma) - \tilde{x}_2(s)] \\ &= (\vec{e}(s + \sigma), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, \\ \varphi_4(s, \sigma) &:= \partial_\sigma \varphi_2 = \tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1'(s + \sigma) - \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2'(s + \sigma) = -(\vec{n}(s), \vec{e}(s + \sigma))_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

$((\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$), а при $\sigma = 0$ равенствами:

$$\psi_0 = \psi_3 := 1, \quad \psi_1 = \psi_2 = 2^{-1} \psi_4 := 2^{-1} (\tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1''(s) - \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2''(s)) = -2^{-1} K(s).$$

Здесь $K(s)$ — кривизна со знаком [20, п. 250] кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$. По аналогии с теоремой [8, теорема 2.1] можно показать, что при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \psi_i$ ($k = \overline{0, n-l}$, $l = \overline{0, n}$ при $i = \overline{0, 2, 4}$; $k = \overline{0, n+1-l}$, $l = \overline{0, n+1}$ при $i = 3$).

Местные координаты (ξ_s, η_s) точек $\tilde{x}_d(s)$ и $\tilde{x}(s+\sigma)$ равны $(0, d)$ и $((\vec{e}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, (\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2})$ соответственно, поэтому

$$r^2 = \left| \overrightarrow{\tilde{x}_d(s)\tilde{x}(s+\sigma)} \right|^2 = r_0^2 - 2d (\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2} + d^2.$$

На множестве $\Upsilon := \Theta \times \bar{I}_D = I_S \times \bar{T}$ зададим функции $\varphi'_0(s, \sigma, d)$, $\psi'_0(s, \sigma, d)$, $\psi'_1(s, \sigma, d)$:

$$\varphi'_0 := r^2 - d^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_2, \quad \psi'_0 := \psi_0 + 2d\psi_2, \quad \psi'_1 := \psi_3 + d\psi_4.$$

Так как $\varphi'_0 \geq 0$ при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$ ($\varphi'_0 > 0$ при $\sigma \neq 0$, $\varphi'_0 = 0$ при $\sigma = 0$) [8, § 2], на множестве Υ может быть задана функция $\rho'(s, \sigma, d)$:

$$\rho' := \sqrt{\varphi'_0}, \quad \text{если } \sigma \geq 0; \quad \rho' := -\sqrt{\varphi'_0}, \quad \text{если } \sigma < 0.$$

Так как

$$r^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_2 + d^2,$$

имеем

$$2^{-1}\partial_{\vec{n}(s+\sigma)}r^2 = \varphi_1 + d\varphi_5,$$

где

$$\varphi_5(s, \sigma) := -\tilde{x}'_1(s)\tilde{x}'_1(s+\sigma) - \tilde{x}'_2(s)\tilde{x}'_2(s+\sigma) \quad \text{и} \quad \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} \ln r^{-1} = -\frac{\varphi_1 + d\varphi_5}{\varphi_0 + 2d\varphi_2 + d^2}.$$

Поэтому функцию $g = \partial_d \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} \ln r^{-1}$ можно записать при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$ (кроме $d = \sigma = 0$) в следующем виде:

$$g = a_1(\rho', d) \delta_1 + a_2(\rho', d) \delta_2 + a_3(\rho', d) \delta_3, \quad (4.1)$$

где

$$a_1(\rho, d) := (-\rho^2 + d^2) A^{-2}, \quad a_2(\rho, d) := 2d\rho^2 A^{-2}, \quad a_3(\rho, d) := \rho^4 A^{-2}, \quad A(\rho, d) := \rho^2 + d^2, \\ \delta_1(s, \sigma) := \varphi_5, \quad \delta_2(s, \sigma, d) := \frac{\psi_1 + \psi_2\varphi_5}{\psi'_0}, \quad \delta_3(s, \sigma, d) := \frac{2\psi_1\psi_2}{(\psi'_0)^2}.$$

Далее считаем, что множество $I_D = [-D_1, 0) \cup (0, D_2]$ ($D_1, D_2 > 0$) задается условиями:

- (i) соответствие между точками $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}_d(s)$ при $(s, d) \in T$ взаимно однозначное;
- (ii) при $(s, d) \in T$ выполняются неравенства $1 - dK(s) > 0$.

Например, $I_D = [-D, 0) \cup (0, D]$, поскольку при этом $1 - dK(s) \geq \frac{2}{3}$ ($(s, d) \in T$) [8, § 2].

Для функций δ_i можно обеспечить любую гладкость по (s, σ) за счет соответствующей гладкости границы $\partial\Omega$. Действительно, так как

$$\psi_0(s, 0) = 1, \quad \psi_2(s, 0) = -2^{-1}K(s),$$

имеем

$$\psi'_0(s, 0, d) = 1 - dK(s) > 0 \quad \text{при} \quad (s, d) \in \bar{T}.$$

Кроме того, $\psi'_0 = \frac{\varphi'_0}{\sigma^2} > 0$ при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$, $\sigma \neq 0$. Поэтому $\psi'_0 > 0$ на множестве Υ , и при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \delta_i$ ($k = 0, n-l$, $l = 0, n$, $i = 1, 3$).

Заметим также, что $\psi_3(s, 0) = 1$, $\psi_4(s, 0) = -K(s)$. Следовательно,

$$\psi'_1(s, 0, d) = 1 - dK(s) > 0 \quad \text{при} \quad (s, d) \in \bar{T},$$

и справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1 (ср. с теоремой [4, теорема 5]). Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда существует достаточно малое число $\Sigma_0 > 0$, такое, что на множестве $\Upsilon' := I_S \times \Xi \times \bar{I}_D$, где $\Xi := [-\Sigma_0, \Sigma_0]$, функция

$$\delta_0(s, \sigma, d) := (\partial_\sigma \rho')^{-1} = \frac{\sqrt{\psi'_0}}{\psi'_1}$$

всюду определена и положительна.

Очевидно, что число Σ_0 не единственно. В частности, можно получить число Σ_0 следующим образом. При фиксированном $s \in I_S$ обозначим через E_s замкнутую дугу кривой $\partial\Omega$, ограниченную двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{x}_{-D}(s)\tilde{x}_D(s)$, причем $\tilde{x}(s) \in E_s$. Множество значений σ , при которых $\tilde{x}(s+\sigma) \in E_s$, обозначим через Ξ_s , границы Ξ_s — через Σ'_s, Σ''_s , и тогда $\Xi_s = [\Sigma'_s, \Sigma''_s]$, $\Sigma'_s \leq -D$, $\Sigma''_s \geq D$; $\tilde{x}(s-\Sigma'_s), \tilde{x}(s+\Sigma''_s)$ — границы дуги E_s (см. рис. 1). В силу теоремы [4, теорема 5] в качестве числа Σ_0 можно взять наименьшее из значений $\inf_{s \in I_S} |\Sigma'_s|, \inf_{s \in I_S} \Sigma''_s$.

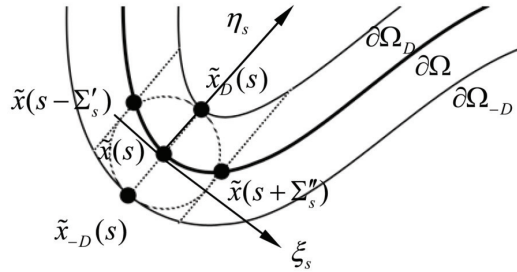


Рис. 1. Построение дуги E_s .

Функцию δ_0 — якобиан перехода от переменной интегрирования σ к переменной интегрирования $\rho = \rho'$ — также можно сделать произвольно гладкой по (s, σ) за счет соответствующей гладкости кривой $\partial\Omega$: при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \delta_0$ ($k = \overline{0, n-1}, l = \overline{0, n}$).

Следствие 4.1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функции $\tilde{\rho}_{s,d}(\sigma) := \rho'$ при любых фиксированных $(s, d) \in \bar{T}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображают множество Ξ на множества $\tilde{\Xi}_{s,d} := \tilde{\rho}_{s,d}(\Xi)$. Функции $\sigma'(s, \rho, d) := \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)$ ($\tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)$ — функция, обратная к функции $\tilde{\rho}_{s,d}(\sigma)$), $\delta'_0(s, \rho, d) := \delta_0(s, \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho), d)$, $\delta'_i(s, \rho, d) := \delta_i(s, \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho), d) \delta'_0$ ($i = \overline{1, 3}$) имеют непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}' := \{(s, \rho, d) : s \in I_S, \rho \in \tilde{\Xi}_{s,d}, d \in \bar{I}_D\}$ производные $\partial_\rho^k \partial_s^l \sigma'$ ($k = \overline{0, n-l+1}, l = \overline{0, n}$), $\partial_s^k \partial_\rho^l \delta'_i$ ($k = \overline{0, n-l}, l = \overline{0, n}, i = \overline{0, 3}$).

В силу равенств (4.1) и следствия 4.1 функция u может быть представлена на множестве T в виде суммы: $u = \sum_{i=1}^4 u_i$, где

$$u_i(s, d) := \int_{\tilde{\Xi}_{s,d}} a_i w'_i d\rho \quad (i = \overline{1, 3}), \quad u_4(s, d) := \int_{I_S \setminus \Xi} w_4 d\sigma,$$

$w'_i(s, \rho, d) := \delta'_i v(s + \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho))$ ($i = \overline{1, 3}$), $w_4(s, \sigma, d) := g v(s + \sigma)$. Здесь подынтегральные функции a_i ($i = \overline{1, 3}$) имеют особенность при $d = \rho = 0$, а для функций w'_i ($i = \overline{1, 3}$) может быть обеспечена произвольная гладкость по (s, ρ) за счет соответствующей гладкости граничной кривой $\partial\Omega$ и функции плотности v : при условиях $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $v \in C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}'$ производные $\partial_s^k \partial_\rho^l w'_i$ ($k = \overline{0, n-l}, l = \overline{0, n}, i = \overline{0, 3}$).

$i = \overline{1, 3}$). Подынтегральную функцию w_4 также можно сделать произвольно гладкой по (s, σ) за счет соответствующей гладкости $\partial\Omega$ и v : так как $r \geq \rho' > 0$ при $\sigma \neq 0$, $(s, d) \in \overline{T}$, при условиях $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $v \in C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l w_4$ ($k = \overline{0, n-l}$, $l = \overline{0, n}$) при $\sigma \in I_S \setminus [-\Sigma_0, \Sigma_0]$, $(s, d) \in \overline{T}$.

5. ОПИСАНИЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ НП ПДС ВБЛИЗИ И НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Так как $\tilde{\rho}_{s,d}(0) = 0$ при $(s, d) \in \overline{T}$, в силу следствия 4.1 существуют числа

$$P := \min\{-P_-, P_+\}, \quad P_- := \sup_{(s,d) \in \overline{T}} \tilde{\rho}_{s,d}(-\Sigma_0) < 0, \quad P_+ := \inf_{(s,d) \in \overline{T}} \tilde{\rho}_{s,d}(\Sigma_0) > 0.$$

Поскольку $\tilde{\sigma}_{s,d}(0) = 0$ при $(s, d) \in \overline{T}$, в силу следствия 4.1 существует число

$$\Sigma_1 := \min\{-\Sigma_-, \Sigma_+\},$$

где $\Sigma_- := \sup_{(s,d) \in \overline{T}} \tilde{\sigma}_{s,d}(-P) < 0$, $\Sigma_+ := \inf_{(s,d) \in \overline{T}} \tilde{\sigma}_{s,d}(P) > 0$. По определению

$$\rho_{s,d}([-\Sigma_1, \Sigma_1]) \subseteq [-P, P] \subseteq \tilde{\Xi}_{s,d} \quad ((s, d) \in \overline{T}).$$

Пусть $L \in \mathbb{N}$,

$$h(L) := \frac{S}{2L+1}, \quad s_l := lh \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Заметим, что $s_l \in I_S$ при $l = \overline{-2L-1, 2L+1}$, и что $\tilde{x}(s_{l+4L+2}) = \tilde{x}(s_l)$ при всех $l \in \mathbb{Z}$, в частности, $\tilde{x}(s_{-2L-1}) = \tilde{x}(s_{2L+1})$. Введем в рассмотрение множества I_L , состоящие из точек s_{2l} при $l = \overline{-L, L}$, и множества $T_L := I_L \times I_D$. Зададим достаточно большое число $L_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $h \in \left(0, \frac{\Sigma_1}{3}\right]$ при $L \geq L_0$.

Пусть $L \geq L_0$. На множестве $\overline{T}_L$ зададим функции

$$\begin{aligned} P'(s, d) &:= \max\{-P'_-, P'_+\}, & P'_-(s, d) &:= \tilde{\rho}_{s,d}(s_{-2L'-1}), & P'_+(s, d) &:= \tilde{\rho}_{s,d}(s_{2L'+1}), \\ \Sigma'_-(s, d) &:= \tilde{\sigma}_{s,d}(-P'), & \Sigma'_+(s, d) &:= \tilde{\sigma}_{s,d}(P'). \end{aligned}$$

Значения функции $L'(s, d) \in \mathbb{N}$ таковы, что $s_{2L'+1} \leq \Sigma_1$, $s_{2L'+3} > \Sigma_1$. По определению

$$[-P', P'] \subseteq [-P, P] \subseteq \tilde{\Xi}_{s,d} \quad ((s, d) \in \overline{T}_L).$$

На рис. 2 промежуток $[-P', P']$ получен в предположениях, что

$$-P_- > P_+, \quad -\Sigma_- < \Sigma_+, \quad -P'_- < P'_+.$$

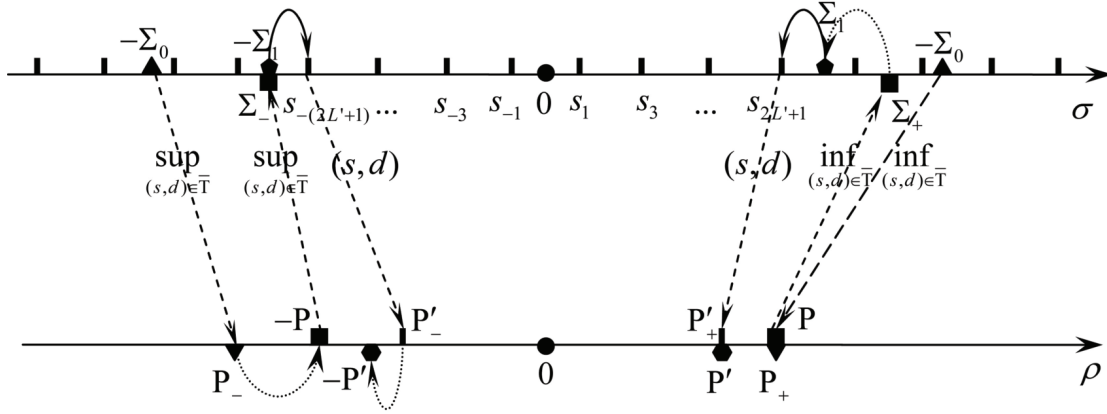
Кроме того, по определению

$$[\Sigma'_-, \Sigma'_+] \supseteq [s_{-2L'-1}, s_{2L'+1}] \supseteq \left[-\frac{3\Sigma_1}{5}, \frac{3\Sigma_1}{5}\right] \quad ((s, d) \in \overline{T}_L),$$

так как

$$s_{2L'+3} = (2L' + 3)h > \Sigma_1, \quad \text{и} \quad s_{2L'+1} = (2L' + 1)h > \frac{(2L' + 1)\Sigma_1}{2L' + 3} \geq \frac{3\Sigma_1}{5} \quad \text{при} \quad L' \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, при любых $(s, d) \in \overline{T}_L$, $L \geq L_0$ промежуток $[-P', P']$ всегда находится в области, где возможен переход от переменной интегрирования σ к переменной интегрирования $\rho = \rho'$, а границы множества $\overline{I_S \setminus [\Sigma'_-, \Sigma'_+]}$ не приближаются к нулевой точке ближе, чем на фиксированное расстояние $\frac{3\Sigma_1}{5}$.

РИС. 2. Схема получения промежутков $[-P', P']$

На множествах $[-P', P']$ ($(s, d) \in \bar{T}_L$) зададим множества точек $\{\rho_{s,d,2l+1}\}_{l=-2L'-2}^{2L'+1}$, которые состоят из точек $\tilde{\rho}_{s,d}(s_{2l+1})$ ($l = \overline{-L'-1, L'}$) и их зеркальных отображений относительно точки $\rho = 0$:

$$\{\rho_{s,d,2l+1}\}_{l=-2L'-2}^{2L'+1} := \{\pm \tilde{\rho}_{s,d}(s_{2l+1})\}_{l=-L'-1}^{L'}, \quad \rho_{s,d,2l-1} \leq \rho_{s,d,2l+1}$$

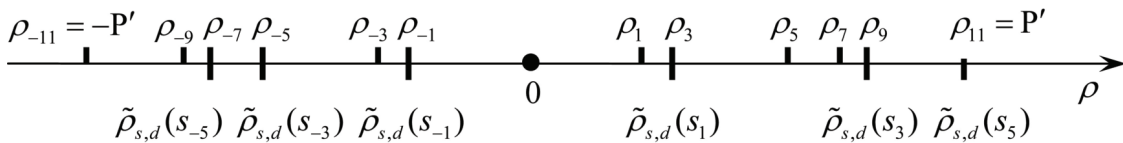
при $l = \overline{-2L'-1, 2L'+1}$, $(s, d) \in \bar{T}_L$ (см. рис. 3). Также зададим множества точек $\{\rho_{s,d,2l}\}_{l=-2L'-1}^{2L'+1}$:

$$\rho_{s,d,2l} := 2^{-1}(\rho_{s,d,2l-1} + \rho_{s,d,2l+1}),$$

и обозначим через $h'_{s,d,l}$ длины отрезков $[\rho_{s,d,-2l-1}, \rho_{s,d,-2l+1}]$ ($l = \overline{-2L'-1, 2L'+1}$). По определению

$$\bigcup_{l=-2L'-1}^{2L'+1} [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}] = [-P', P'];$$

промежутки $[\rho_{s,d,-2l-1}, \rho_{s,d,-2l+1}]$ и $[\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]$ симметричны относительно точки $\rho_{s,d,0} = 0$: $\rho_{s,d,-(2l+1)} = -\rho_{s,d,2l+1}$, $h'_{s,d,-l} = h'_{s,d,l}$ ($l = \overline{0, 2L'+1}$, $(s, d) \in \bar{T}_L$).

РИС. 3. Множества точек $\{\rho_{s,d,2l+1}\}_{l=-2L'-2}^{2L'+1}$ и $\{\tilde{\rho}_{s,d}(s_{2l+1})\}_{l=-L'-1}^{L'}$ при $L' = 2$

Зададим ККИ $\tilde{v}$ функции плотности $v \in C(\partial\Omega)$ по переменной s на промежутках $[s_{2l-1}, s_{2l+1}]$ с узлами в точках $s_{2l-1}, s_{2l}, s_{2l+1}$:

$$\tilde{v}(s) := \sum_{m=-1}^1 v(s_{2l+m}) \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) \quad (s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L, L}).$$

Зададим функции $\tilde{w}'_i(s, \rho, d) := \delta'_i \tilde{v}(s + \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho))$ ($i = \overline{1, 3}$), $\tilde{w}_4(s, \sigma, d) := g \tilde{v}(s + \sigma)$. Обозначим через $\hat{w}'_i(s, \rho, d)$ ККИ функций $\tilde{w}'_i$ ($i = \overline{1, 3}$) по переменной ρ на промежутках $[\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]$ с узлами в точках $\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l}, \rho_{s,d,2l+1}$:

$$\hat{w}'_i(s, \rho, d) := \hat{w}'_{i,l} \quad (\rho \in [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}], \quad l = \overline{-2L'-1, 2L'+1}, \quad (s, d) \in \bar{T}_L),$$

$$\hat{w}'_{i,l}(s, \rho, d) := \begin{cases} \sum_{m=-1}^1 \tilde{w}'_i(s, \rho_{s,d,2l+m}, d) \Lambda_m^{[\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]}(\rho) & (\rho_{s,d,2l-1} < \rho_{s,d,2l+1}), \\ \tilde{w}'_i(s, \rho_{s,d,2l}, d) & (\rho_{s,d,2l-1} = \rho_{s,d,2l+1}). \end{cases}$$

Обозначим через $\hat{w}_{4,l}$ аппроксимации интегралов $\int_{\beta_{s,d,2l-1}}^{\beta_{s,d,2l+1}} \tilde{w}_4(s, \sigma, d) d\sigma$ на основе формул Гаусса с γ узлами:

$$\hat{w}_{4,l}(s, d) := h''_{s,d,l} \sum_{j=1}^{\gamma} \eta_j \tilde{w}_4(s, \beta_{s,d,l,j}, d) \quad (l = \overline{-L, L}, \quad (s, d) \in \overline{T}_L).$$

Здесь

$$\begin{aligned} h''_{s,d,l} &:= 2^{-1} (\beta_{s,d,2l+1} - \beta_{s,d,2l-1}), \quad \beta_{s,d,l,j} := \bar{\beta}_{s,d,l} + h''_{s,d,l} z_j, \\ \bar{\beta}_{s,d,l} &:= 2^{-1} (\beta_{s,d,2l-1} + \beta_{s,d,2l+1}) \quad (l = \overline{-L, L}); \\ \beta_{s,d,2l-1} &:= \min \{s_{2l-1}, \Sigma'_-\}, \quad \text{при } l = \overline{-L, 0}, \\ \beta_{s,d,2l+1} &:= \max \{s_{2l+1}, \Sigma'_+\} \quad \text{при } l = \overline{0, L} \quad ((s, d) \in \overline{T}_L); \end{aligned}$$

z_j — корни многочлена $\left(\frac{d^\gamma}{dz^\gamma}\right)(z^2 - 1)^\gamma$ на интервале $(-1, 1)$; для весовых коэффициентов η_j выполняются условия: $\sum_{j=1}^{\gamma} \eta_j = 2$, $\eta_j > 0$ [2, гл. 3, § 5]. По определению

$$\bigcup_{l=-L}^L [\beta_{s,2l-1}, \beta_{s,2l+1}] = \overline{I_S \setminus [\Sigma'_-, \Sigma'_+]}, \quad (s, d) \in \overline{T}_L.$$

Полуаналитические аппроксимации $\hat{u}(s, d)$ функции $u(s, d)$ задаются на множествах T_L с помощью сумм: $\hat{u} := \sum_{i=1}^4 \hat{u}_i$, где

$$\hat{u}_i(s, d) := \int_{[-P', P']} a_i \hat{w}'_i d\rho \quad ((s, d) \in T_L, \quad i = \overline{1, 3}), \quad (5.1)$$

$$\hat{u}_4(s, d) := \sum_{l=-L}^L \hat{w}_{4,l} \quad ((s, d) \in T_L). \quad (5.2)$$

Теорема 5.1. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $v \in C(\partial\Omega)$, $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$. Тогда функция $\hat{u}(s, d)$ непрерывна на множестве T_L и может быть доопределена при $d = 0$ до непрерывной на множестве $\overline{T}_L$.

Доказательство. Точка наблюдения не может совпасть с узлами формулы Гаусса, так как $r > 0$ при $\sigma \in \overline{I_S \setminus [s_{-2L'-1}, s_{2L'+1}]}$, $(s, d) \in \overline{T}_L$, поэтому функция $\hat{u}_4$ может быть доопределена при $d = 0$ до непрерывной на множестве $\overline{T}_L$ с помощью формулы (5.2).

Функции $\hat{u}_i$ ($i = \overline{1, 3}$) можно представить в виде сумм:

$$\hat{u}_i := \sum_{l=-2L'-1}^{2L'+1} J_{i,l}, \quad \text{где} \quad J_{i,l}(s, d) := \int_{\rho_{s,d,2l-1}}^{\rho_{s,d,2l+1}} a_i \hat{w}'_{i,l} d\rho.$$

В свою очередь, интегралы $J_{i,l}$ при $(s, d) \in T_L$, $\rho_{s,d,2l-1} < \rho_{s,d,2l+1}$ можно представить в виде сумм:

$$J_{i,l} = \sum_{j=0}^2 \tilde{A}_{i,j,l} \gamma_{i,j,l}, \quad \text{где} \quad \tilde{A}_{i,j,l}(d) := \int_{\rho_{s,d,2l-1}}^{\rho_{s,d,2l+1}} a_i \rho^j d\rho;$$

$\gamma_{i,j,l}(s, d)$ — коэффициенты полиномов Лагранжа $\hat{w}'_{i,l} = \gamma_{i,0,l} + \gamma_{i,1,l}\rho + \gamma_{i,2,l}\rho^2$, непрерывные на множестве $\overline{T}_L$ функции. Функции $\tilde{A}_{i,j,l}$ при $(s, d) \in T_L$ вычисляются с помощью равенств:

$$\tilde{A}_{i,j,l}(d) = A_{i,j}(\rho_{s,d,2l+1}, d) - A_{i,j}(\rho_{s,d,2l-1}, d) \quad (j = \overline{0, 2}, l = \overline{-2L' - 1, 2L' + 1}, i = \overline{1, 3}), \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_{1,0}(\rho, d) &:= \rho A^{-1}, \\ A_{1,1}(\rho, d) &:= -d^2 A^{-1} - 2^{-1} \ln A, \\ A_{1,2}(\rho, d) &:= -\rho - d^2 \rho A^{-1} + 2d \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho}{d} \right); \\ A_{2,0}(\rho, d) &:= -d\rho A^{-1} + \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho}{d} \right), \\ A_{2,1}(\rho, d) &:= d^3 A^{-1} + d \ln A, \\ A_{2,2}(\rho, d) &:= 2d\rho + d^3 \rho A^{-1} - 3d^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho}{d} \right); \\ A_{3,0}(\rho, d) &:= 2\rho + d^2 \rho A^{-1} - 3d \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho}{d} \right), \\ A_{3,1}(\rho, d) &:= \rho^2 - d^4 A^{-1} - 2d^2 \ln A, \\ A_{3,2}(\rho, d) &:= \frac{2\rho^3}{3} - 4d^2 \rho - d^4 \rho A^{-1} + 5d^3 \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho}{d} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, с помощью равенств (5.3) и $\gamma_{2,0,0} = 0$ интегралы $J_{i,l}$ могут быть доопределены при $d = 0$ до непрерывных на множестве $\overline{T}_L$, и тогда с помощью формул (5.1) функции $\hat{u}_i$ ($i = \overline{1, 3}$) могут быть доопределены до непрерывных на множестве $\overline{T}_L$. При этом интеграл $J_{1,0}(s, 0)$ существует только в смысле конечного значения по Адамару [25, формула (1.6.6)], интеграл $J_{1,1}(s, 0)$ — только в смысле главного значения по Коши; остальные интегралы $J_{i,l}(s, 0)$ — сходящиеся несобственные. Теорема 5.1 доказана. $\square$

Введем в рассмотрение ККИ $\tilde{v}'$ функции плотности $v \in C(\partial\Omega)$ по переменной s на промежутках $[s_{2l}, s_{2l+2}]$ с узлами в точках $s_{2l}, s_{2l+1}, s_{2l+2}$:

$$\tilde{v}'(s) := \sum_{m=-1}^1 v(s_{2l+1+m}) \Lambda_m^{[s_{2l}, s_{2l+2}]}(s) \quad (s \in [s_{2l}, s_{2l+2}], \quad l = \overline{-L, L}).$$

Введем в рассмотрение множества I'_L , состоящие из точек s_{2l+1} при $l = \overline{-L, L}$, и множества $T'_L := I'_L \times I_D$. Зададим на множествах T'_L с помощью функций $\tilde{v}'$ аппроксимации $\hat{u}'(s, d)$ функции u по аналогии с тем, как на множествах T_L были заданы аппроксимации $\hat{u}(s, d)$ с помощью функций $\tilde{v}$. По аналогии с теоремой 5.1 доопределим функции $\hat{u}'$ при $d = 0$ до непрерывных на множествах $\overline{T}'_L$.

Полуаналитические аппроксимации $\check{U}(\tilde{x}_d(s))$ НП ПДС $U(\tilde{x}_d(s))$, которые можно вычислить в любой точке $\tilde{x}_d(s)$ замкнутой приграничной области $\overline{\Omega}_D$ при условии $v \in C(\partial\Omega)$, зададим формулой $\check{U} := (2\pi)^{-1} \check{u}$, где

$$\check{u}(s, d) := \hat{u}'(s_{2l-1}, d) \Lambda_{-1}^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) + \hat{u}(s_{2l}, d) \Lambda_0^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) + \hat{u}'(s_{2l+1}, d) \Lambda_1^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s), \quad (5.4)$$

$d \in \overline{I_D}$, $s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}]$, $l = \overline{-L, L}$. Используемые здесь значения функций $\hat{u}$, $\hat{u}'$ при $d = 0$ получены в результате продолжения по непрерывности в соответствии с теоремой 5.1.

6. ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ КАСАТЕЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НП ПДС ВБЛИЗИ И НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

В данном разделе докажем равномерную сходимость интерполянтов НП ПДС по переменной s в замкнутой приграничной области $\overline{\Omega_D}$. Для этого сначала получим условия существования и непрерывности касательных производных НП ПДС в области $\overline{\Omega_D}$.

Пусть $\rho_- < 0$, $\rho_+ > 0$ — постоянные, такие, что $[\rho_-, \rho_+] \subseteq [P_-, P_+]$. Через σ_- , σ_+ обозначим функции $\sigma_-(s, d) := \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho_-)$, $\sigma_+(s, d) := \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho_+)$. В силу следствия 4.1 функции $-\sigma_-$, σ_+ положительны на множестве $\overline{T}$. В соответствии с равенствами (4.1) функция u может быть представлена при $(s, d) \in T$ в виде суммы: $u = \sum_{i=1}^4 u_i$, где

$$u_i(s, d) := \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_i w'_i d\rho \quad (i = \overline{1, 3}), \quad u_4(s, d) := \int_{I_S \setminus [\sigma_-, \sigma_+]} w_4 d\sigma. \quad (6.1)$$

Теорема 6.1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+4}$, $v \in C^{n+2}(\partial\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция $u(s, d)$ непрерывна на множестве T и может быть доопределена при $d = 0$ до непрерывной на множестве $\overline{T}$. На множестве $\overline{T}$ существуют производные $\partial_s^l u$ ($l = \overline{1, n}$) доопределенной по непрерывности функции $u(s, d)$, причем производные $\partial_s^l u$ ($l = \overline{1, n}$) непрерывны на множествах T и I_S при $d = 0$. Существуют равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы:

$$\lim_{d \rightarrow \pm 0} \partial_s^l u(s, d) = \pm \pi (\partial_s^l w'_2)(s, 0, 0) + \partial_s^l u(s, 0) \quad (l = \overline{1, n}, \quad s \in I_S), \quad (6.2)$$

с помощью которых производные $\partial_s^l u$ ($l = \overline{1, n}$) могут быть доопределены до непрерывных или на множестве $I_S \times [0, D_2]$, или на множестве $I_S \times [-D_1, 0]$ функций.

Доказательство. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $v \in C^n(\partial\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Так как $r > 0$ при $\sigma \in \overline{I_S \setminus [\sigma_-, \sigma_+]}$, $(s, d) \in \overline{T}$, существуют непрерывные производные $\partial_s^l w_4$ ($l = \overline{0, n}$) при $\sigma \in \overline{I_S \setminus [\sigma_-, \sigma_+]}$, $(s, d) \in \overline{T}$ и согласно следствию 4.1 производные $\partial_s^l \sigma_-$, $\partial_s^l \sigma_+$ ($l = \overline{0, n}$) непрерывны на множестве $\overline{T}$. Поэтому функция u_4 может быть доопределена при $d = 0$ до непрерывной на $\overline{T}$ с помощью соответствующих интегралов (6.1), и тогда существуют непрерывные на множестве $\overline{T}$ производные $\partial_s^l u_4$ ($l = \overline{1, n}$), которые можно представить в виде линейных комбинаций интегралов

$$\int_{I_S \setminus [\sigma_-, \sigma_+]} \partial_s^l w_4 d\sigma$$

и выражений вида

$$\partial_s^{l-k} w_4(s, \sigma_{\pm}, d) \partial_s^k \sigma_{\pm} \quad (k = \overline{1, l}, l = \overline{1, n}).$$

Функции a_i ($i = \overline{1, 3}$) непрерывны при $d \in I_D$, $\rho \in \mathbb{R}$. В силу следствия 4.1 производные $\partial_s^l w'_i$ ($l = \overline{0, n}$, $i = \overline{1, 3}$) непрерывны на множестве $\tilde{Y}'$. Поэтому функции $u_i(s, d)$ ($i = \overline{1, 3}$), заданные с помощью соответствующих интегралов (6.1), непрерывны на множестве T и существуют непрерывные на T производные

$$\partial_s^l u_i = \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_i \partial_s^l w'_i d\rho \quad (l = \overline{1, n}, i = \overline{1, 3}).$$

При $d \in \bar{I}_D$, $\rho \in \mathbb{R}$ (кроме $d = \rho = 0$) функция a_3 непрерывна и ограничена: $|a_3| \leq 1$, поэтому функция u_3 может быть доопределена при $d = 0$ до непрерывной на $\bar{T}$ с помощью соответствующих интегралов (6.1), и тогда производные $\partial_s^l u_3$ ($l = \overline{0, n}$) непрерывны на множестве $\bar{T}$ и вычисляются с помощью интегралов:

$$\partial_s^l u_3 = \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_3 \partial_s^l w'_3 d\rho.$$

При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \rho_+] \cap (0, -\rho_-]$ имеем равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \int_{\rho_-}^{-\varepsilon} a_2 \partial_s^l w'_2 d\rho = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\rho_+} a_2 \partial_s^l w'_2 d\rho = 0 \quad (l = \overline{0, n}). \quad (6.3)$$

Также имеют место равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\lim_{d \rightarrow \pm 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} a_2 \partial_s^l w'_2 d\rho \right) (s) &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\lim_{d \rightarrow \pm 0} (\partial_s^l w'_2) (s, \bar{\rho}_{s,d,\varepsilon}, d) A_{2,0}(\varepsilon, d) \right) \\ &= \pm \pi (\partial_s^l w'_2) (s, 0, 0) \quad (l = \overline{0, n}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\bar{\rho}_{s,d,\varepsilon}$ — некоторая точка на промежутке $[-\varepsilon, \varepsilon]$, точное положение которой зависит от $(s, d) \in T$. В силу равенств (6.3), (6.4) существуют равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы:

$$\lim_{d \rightarrow \pm 0} \partial_s^l u_2(s, d) = \pm \pi (\partial_s^l w'_2) (s, 0, 0) \quad (l = \overline{0, n}). \quad (6.5)$$

С учетом равенств (6.5) и $w'_2(s, 0, 0) = \delta'_2(s, 0, 0) = 0$ ($s \in I_S$) функция u_2 становится непрерывной на множестве $\bar{T}$, если ее доопределить при $d = 0$, $s \in I_S$ нулевыми значениями. Это согласуется с формулой (6.1), так как $a_2(\rho, 0) = 0$ при $\rho \neq 0$.

Пусть $\partial\Omega \in C^{n+4}$, $v \in C^{n+2}(\partial\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Используя ФТДЧОИ, представим функцию w'_1 в виде суммы:

$$w'_1 = w'_{1,0} + w'_{1,1}\rho + w'_{1,2}\rho^2 \quad ((s, d) \in \bar{T}, \rho \in [\rho_-, \rho_+]), \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} w'_{1,0}(s, d) &:= w'_1(s, 0, d), \quad w'_{1,1}(s, d) := (\partial_\rho w'_1)(s, 0, d), \\ w'_{1,2}(s, \rho, d) &:= \rho^{-2} \int_0^\rho (\partial_\rho^2 w'_1)(s, \varsigma, d) (\rho - \varsigma) d\varsigma \quad (\rho \neq 0), \\ w'_{1,2}(s, 0, d) &:= 2^{-1} (\partial_\rho^2 w'_1)(s, 0, d). \end{aligned}$$

Производные $\partial_s^l w'_{1,j}$ ($l = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, 2}$) непрерывны в силу следствия 4.1: $\partial_s^l w'_{1,0}$, $\partial_s^l w'_{1,1}$ — на множестве $\bar{T}$, $\partial_s^l w'_{1,2}$ — на множестве $\tilde{\Upsilon}'$. В соответствии с формулами (6.1), (6.6) представим функцию u_1 при $(s, d) \in T$ в виде суммы:

$$u_1 = \sum_{j=0}^2 u_{1,j},$$

где

$$u_{1,j}(s, d) := w'_{1,j} \tilde{A}_{1,j}, \quad \tilde{A}_{1,j}(d) := \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_1 \rho^j d\rho \quad (j = 0, 1), \quad u_{1,2}(s, d) := \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_1 \rho^2 w'_{1,2} d\rho.$$

Функции $\tilde{A}_{1,0}(d)$, $\tilde{A}_{1,1}(d)$ могут быть доопределены при $d = 0$ до непрерывных на множестве $\bar{I}_D$, так как $-\rho_-, \rho_+ > 0$ и $\tilde{A}_{1,j}(d) = A_{1,j}(\rho_+, d) - A_{1,j}(\rho_-, d)$ ($j = 0, 1$). Заметим, что получаемые при этом значения функций $\tilde{A}_{1,j}(0)$ ($j = 0, 1$) совпадают соответственно с интегралом в смысле конечного значения по Адамару $\tilde{A}_{1,0}(0)$ (см. определение [15, формула (1.6.5)]) и с интегралом в смысле главного значения по Коши $\tilde{A}_{1,1}(0)$. Пусть

$$u_{1,j}(s, 0) := \tilde{A}_{1,j}(0) w'_{1,j}(s, 0) \quad (s \in I_S, j = 0, 1).$$

Тогда производные $\partial_s^l u_{1,j}$ непрерывны на $\bar{T}$, так как

$$\partial_s^l u_{1,j} = \tilde{A}_{1,j} \partial_s^l w'_{1,j} \quad (l = \overline{0, n}, j = 0, 1).$$

Рассмотрим представление вида:

$$u_{1,2} = u_{1,2,1} + u_{1,2,2},$$

где

$$u_{1,2,k}(s, d) := \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_{1,k} w'_{1,2} d\rho \quad ((s, d) \in T, k = 1, 2),$$

$$a_{1,1}(\rho, d) := -\rho^4 A^{-2}, \quad a_{1,2}(\rho, d) := d^2 \rho^2 A^{-2}.$$

Учитывая, что $a_{1,1}(\rho, 0) = -1$, $a_{1,2}(\rho, 0) = 0$ при $\rho \neq 0$, доопределим функции $u_{1,2,k}$ при $d = 0$:

$$u_{1,2,1}(s, 0) := - \int_{\rho_-}^{\rho_+} w'_{1,2}|_{d=0} d\rho, \quad u_{1,2,2}(s, 0) := 0 \quad (s \in I_S).$$

Тогда производные

$$\partial_s^l u_{1,2,1} = \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_{1,1} \partial_s^l w'_{1,2} d\rho \quad (l = \overline{0, n})$$

существуют и непрерывны на множестве $\bar{T}$, так как $|a_{1,1}| \leq 1$ при $d \in \bar{I}_D$, $\rho \in \mathbb{R}$, кроме $d = \rho = 0$. При $d \neq 0$, $s \in I_S$ функция $a_{1,2}$ не меняет знак на промежутках интегрирования $[\rho_-, \rho_+]$, поэтому в силу теоремы о среднем $\partial_s^l u_{1,2,2} = 2^{-1} d \tilde{A}_2 \partial_s^l w'(s, \bar{\rho}_{s,d,l}, d)$. Здесь $\bar{\rho}_{s,d,l}$ — некоторая точка на $[\rho_-, \rho_+]$, точное положение которой зависит от d, s, l ; $\tilde{A}_2(d) := A_{2,0}(\rho_+, d) - A_{2,0}(\rho_-, d)$ — равномерно ограниченная по $d \in I_D$ функция. Следовательно, значения

$$\partial_s^l u_{1,2,2} = \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_{1,2} \partial_s^l w'_{1,2} d\rho$$

стремятся при $d \rightarrow 0$ к значениям $\partial_s^l u_{1,2,2}(s, 0) = 0$ ($l = \overline{0, n}$) равномерно по $s \in I_S$, то есть производные $\partial_s^l u_{1,2,2}$ существуют и непрерывны на множестве $\bar{T}$.

Итак, пусть

$$u_1(s, 0) := \sum_{j=0}^1 \tilde{A}_{1,j}(0) w'_{1,j}(s, 0) + u_{1,2,1}(s, 0) \quad (s \in I_S).$$

Тогда функция u_1 и производные $\partial_s^l u_1$ ($l = \overline{1, n}$) непрерывны на множестве $\bar{T}$. Наконец, пусть

$$u(s, 0) := u_1(s, 0) + u_3(s, 0) + u_4(s, 0) \quad (s \in I_S),$$

где $u_3(s, 0)$, $u_4(s, 0)$ вычисляются с помощью соответствующих интегралов (6.1). Тогда по доказанному производные $\partial_s^l u(s, 0)$ ($l = \overline{1, n}$) непрерывны по $s \in I_S$, функция u непрерывна

на множестве $\bar{T}$, и в силу равномерно по $s \in I_S$ сходящихся пределов (6.5) существуют равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы (6.2), с помощью которых производные $\partial_s^l u$ ($l = \overline{1, n}$) могут быть доопределены до непрерывных или на множестве $I_S \times [0, D_2]$, или на множестве $I_S \times [-D_1, 0]$ функций. Теорема 3.1 полностью доказана. $\square$

Заметим, что утверждение о возможности доопределения НП ПДС на границе области по непрерывности получено в известных теоремах [10, § 2.5, теоремы 2.21, 2.23].

Пусть $\partial\Omega \in C^4$, $v \in C^2(\partial\Omega)$. На множестве $\bar{T}$ зададим ККИ $\ddot{u}$ функции u по переменной s на промежутках $[s_{2l-1}, s_{2l+1}]$ с узлами в точках $s_{2l-1}, s_{2l}, s_{2l+1}$:

$$\ddot{u}(s, d) := \sum_{m=-1}^1 u(s_{2l+m}, d) \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) \quad (d \in \bar{I}_D, s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], l = \overline{-L, L}). \quad (6.7)$$

Используемые здесь значения функции $u(s, d)$ при $d = 0$, $s \in I_S$ получены в результате продолжения по непрерывности.

Теорема 6.2. Пусть $L \in \mathbb{N}$, $\partial\Omega \in C^7$, $v \in C^5(\partial\Omega)$. Тогда функции $\ddot{u}(s, d)$ сходятся при $L \rightarrow \infty$ к функции $u(s, d)$, доопределенной при $d = 0$ по непрерывности, равномерно относительно $(s, d) \in \bar{T}$ со скоростью не меньшей, чем кубическая.

Доказательство. В силу оценки (3.5) и теоремы 6.1 справедливы неравенства:

$$|\ddot{u} - u| \leq c_\lambda h^3 \sup_{(s,d) \in \bar{T}} |\partial_s^3 u| \quad ((s, d) \in \bar{T}). \quad (6.8)$$

Теорема 6.2 доказана. $\square$

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ НП ПДС ВБЛИЗИ И НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

На множествах T_L зададим аппроксимации $\tilde{u}$ функции u :

$$\tilde{u}(s, d) := \int_{I_S} g \tilde{v}(s + \sigma) d\sigma.$$

Теорема 7.1. Пусть $\partial\Omega \in C^4$, $v \in C(\partial\Omega)$, $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$. Тогда функция $\tilde{u}(s, d)$ непрерывна на множестве T_L и может быть доопределена при $d = 0$ до непрерывной на множестве $\bar{T}_L$.

Доказательство. Теорема 7.1 доказывается аналогично теореме 6.1. Отметим особые моменты. Так как непрерывность надо доказать только на множестве $\bar{T}_L$, возьмем в качестве ρ_-, ρ_+ величины

$$\sup_{(s,d) \in \bar{T}} \tilde{\rho}_{s,d}(-h) < 0, \quad \inf_{(s,d) \in \bar{T}} \tilde{\rho}_{s,d}(h) > 0.$$

Функцию $\tilde{u}$ представим в виде суммы: $\tilde{u} = \sum_{i=1}^4 \tilde{u}_i$, где функции $\tilde{u}_i$ ($i = \overline{1, 4}$) аналогичны функциям u_i ($i = \overline{1, 4}$):

$$\tilde{u}_i(s, d) := \int_{\rho_-}^{\rho_+} a_i \tilde{w}'_i d\rho \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \tilde{u}_4(s, d) := \int_{I_S \setminus [\sigma_-, \sigma_+]} \tilde{w}_4 d\sigma \quad ((s, d) \in T_L).$$

Концы промежутков $[s_{2l-1}, s_{2l+1}]$ являются узлами ККИ, поэтому функция $\tilde{v}(s)$, как и $v(s)$, непрерывна на множестве I_S . Равенство

$$\lim_{d \rightarrow \pm 0} \tilde{u}_2(s, d) = 0,$$

аналогичное (6.5) при $l = 0$, выполняется на множестве I_L , так как

$$\tilde{w}'_2(s, 0, 0) = \delta'_2(s, 0, 0) = 0 \quad \text{при } s \in I_L.$$

Равенство, аналогичное (6.6), выполняется при $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, $(s, d) \in \overline{T}_L$ для функции $\tilde{w}'_1$ при более слабом условии $v \in C(\partial\Omega)$, чем условие $v \in C^2(\partial\Omega)$ для функции w'_1 , так как функция $\tilde{v}(s + \sigma)$ при любых $v \in C(\partial\Omega)$, $s \in I_L$ является квадратичной по переменной $\sigma \in [-h, h]$. С учетом отмеченных особенностей можно считать, что теорема 7.1 доказана. $\square$

Теорема 7.2. Пусть $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $\partial\Omega \in C^4$. Тогда для функций $u(s, d)$, $\tilde{u}(s, d)$, определенных при $d = 0$ по непрерывности, при $(s, d) \in \overline{T}_L$ справедливы оценки:

$$|u - \tilde{u}| \leq C_1 \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L + 1) \quad ((s, d) \in \overline{T}_L), \quad (7.1)$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая от L и (s, d) .

Доказательство. Пусть $v \in C^4(\partial\Omega)$. В соответствии с равенствами (4.1) при $(s, d) \in T_L$ функции u , $\tilde{u}$ могут быть представлены в виде сумм:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i, \quad \tilde{u} = \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i \quad (i = \overline{1, 3}),$$

где

$$u_i(s, d) := \int_{I_s} a_i(\rho', d) w_i d\sigma, \quad \tilde{u}_i(s, d) := \int_{I_s} a_i(\rho', d) \tilde{w}_i d\sigma, \quad (7.2)$$

$$w_i(s, \sigma, d) := \delta_i v(s + \sigma), \quad \tilde{w}_i(s, \sigma, d) := \delta_i \tilde{v}(s + \sigma) \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Функция $a_3(\rho', d)$ ограничена при $(s, d) \in T$, $\sigma \in I_S$: $|a_3(\rho', d)| \leq 1$. Поэтому с учетом неравенств (3.5) имеем оценки:

$$|\tilde{u}_3 - u_3| \leq c_3 \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3 \sup_{(s, \sigma, d) \in \Upsilon'} |\delta_3| \quad ((s, d) \in T_L), \quad c_3 := 2Sc_\lambda. \quad (7.3)$$

Существуют положительные постоянные

$$c'_\rho := \inf_{(s, \sigma, d) \in \Upsilon} \sqrt{\psi'_0}, \quad c''_\rho := \sup_{(s, \sigma, d) \in \Upsilon} \sqrt{\psi'_0}, \quad c_\rho := \frac{c''_\rho}{c'_\rho}.$$

При $(s, d) \in T$ справедливы неравенства:

$$\int_{I_S} |a_2(\rho', d)| d\sigma \leq \int_{I_S} \frac{2|d| (\sigma c''_\rho)^2}{[(c'_\rho \sigma)^2 + d^2]^2} d\sigma \leq \frac{2c_\rho^2}{c'_\rho} \sup_{d \in I_D} |A_{2,0}(c'_\rho S, |d|)|.$$

Учитывая также неравенства (3.5), получаем оценки:

$$|\tilde{u}_2 - u_2| \leq c_2 \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3 \quad ((s, d) \in T_L), \quad (7.4)$$

где

$$c_2 := \frac{2c_\lambda c_\rho^2}{c'_\rho} \sup_{d \in \overline{I}_D} |A_{2,0}(c'_\rho S, |d|)| \sup_{(s, \sigma, d) \in \Upsilon'} |\delta_2|.$$

Полагая в формуле (3.1)

$$\begin{aligned} z &= s + s_{2l} + t, & f(z) &= v(s + s_{2l} + t), & z_{-1} &= s + s_{2l-1}, \\ z_1 &= s + s_{2l+1}, & z_0 &= s + s_{2l}, & \hat{f}(z) &= \tilde{v}(s + s_{2l} + t) \end{aligned}$$

приходим к равенствам:

$$v(s + s_{2l} + t) - \tilde{v}(s + s_{2l} + t) = \tilde{v}_{3,l} t \omega,$$

где

$$\omega(t) := (t+h)(t-h), \quad \tilde{v}_{3,l}(s,t) := f_3(z, z_{-1}, z_1, z_0), \quad s \in I_L, \quad t \in [-h, h], \quad l = \overline{-L, L}.$$

Используя также ФТДЧОИ:

$$\delta_1 - \delta_{1,0} = \delta_{1,1}\sigma,$$

где

$$\delta_{1,0}(s) := \delta_1(s, 0) = -1, \quad \delta_{1,1}(s, \sigma) := \sigma^{-1} \int_0^\sigma (\partial_\sigma \delta_1)(s, \varsigma) d\varsigma$$

при $\sigma \neq 0$, $\delta_{1,1}(s, 0) := (\partial_\sigma \delta_1)(s, 0)$, можно записать отклонение $u_1 - \tilde{u}_1$ при $(s, d) \in T_L$ в следующем виде:

$$u_1 - \tilde{u}_1 = \sum_{l=-L}^L \int_{-h}^h (g_{1,l} \delta_1(s, s_{2l} + t) + g_{2,l} \delta_{1,1}(s, s_{2l} + t) - g_{3,l} t) \tilde{v}_{3,l} \omega dt, \quad (7.5)$$

где

$$g_{1,l}(s, t, d) := [(a_1(\rho', d) - a_1(\sigma, d)) t]_{\sigma=s_{2l}+t}, \\ g_{2,l}(t, d) := [a_1(\sigma, d) \sigma t]_{\sigma=s_{2l}+t}, \quad g_{3,l}(t, d) := [a_1(\sigma, d)]_{\sigma=s_{2l}+t}.$$

На основании ФТДЧОИ:

$$\psi'_0 - \psi_{0,0} = \psi_{0,1}\sigma + 2d\psi_2,$$

где

$$\psi_{0,0}(s) := \psi_0(s, 0) = 1, \quad \psi_{0,1}(s, \sigma) := \sigma^{-1} \int_0^\sigma (\partial_\sigma \psi_0)(s, \varsigma) d\varsigma$$

при $\sigma \neq 0$,

$$\psi_{0,1}(s, 0) := (\partial_\sigma \psi_0)(s, 0),$$

и тождества $(\rho')^2 = \sigma^2 \psi'_0$ имеем при $(s, d) \in T$, $\sigma \in I_S$ равенства:

$$a_1(\rho', d) - a_1(\sigma, d) = (\psi_{0,1}\sigma + 2d\psi_2) b, \quad b(s, \sigma, d) := \frac{\psi'_0 \sigma^6 - (\psi'_0 + 1) d^2 \sigma^4 - 3d^4 \sigma^2}{(\sigma^2 + d^2)^2 (\sigma^2 \psi'_0 + d^2)^2}.$$

Кроме того,

$$\left| \frac{t}{\sigma} \right| \leq (2l-1)^{-1}$$

при $\sigma = s_{\pm 2l} + t$, $t \in [-h, h]$, $l = \overline{1, L}$; функция $(\psi_{0,1}\sigma + 2d\psi_2) b \sigma$ при $(s, d) \in T$, $\sigma \in I_S$ ограничена по модулю некоторой положительной постоянной c'_1 ; $|a_1(\sigma, d) \sigma^2| \leq 1$ при $(\sigma, d) \in T$. Поэтому при $(s, d) \in T_L$, $t \in [-h, h]$ имеем неравенства:

$$|g_{1,0}| \leq c'_1, \quad |g_{2,0}| \leq 1; \quad |g_{1,l}| \leq (2|l|-1)^{-1} c'_1, \quad |g_{2,l}| \leq (2|l|-1)^{-1} \quad (\pm l = \overline{1, L}). \quad (7.6)$$

Имеем также соотношения

$$\sum_{l=1}^L 2(2l-1)^{-1} \leq \ln(2L+1), \quad \int_{-h}^h |\omega| dt = \frac{4}{3} h^3. \quad (7.7)$$

Существуют положительные постоянные $\tilde{c}_0 := \sup_{(s, \sigma) \in \Theta} |\delta_1|$, $\tilde{c}_1 := \sup_{(s, \sigma) \in \Theta} |\delta_{1,1}|$. На основании формул (7.6), (7.7), (3.3) получаем оценки:

$$\sum_{l=-L}^L \left| \int_{-h}^h (g_{1,l} \delta_1 + g_{2,l} \delta_{1,1}) \tilde{v}_{3,l} \omega dt \right| \leq c_{1,1} \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \ln(2L+1) h^3 \quad ((s, d) \in T_L), \quad (7.8)$$

где $c_{1,1} := \frac{4}{9} (c'_1 \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)$.

Так как $\omega(-t) = \omega(t)$ и $g_{3,-l}(-t, d) = g_{3,l}(t, d)$ ($t \in [-h, h]$, $l = \overline{1, L}$), а знаки функций $g_{3,l}$, ω не изменяются при $t \in [-h, h]$, с учетом формулы (3.3) и теоремы о среднем имеем при $(s, d) \in T_L$, $l = \overline{1, L}$ равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h g_{3,-l} \tilde{v}_{3,-l} t \omega dt + \int_{-h}^h g_{3,l} \tilde{v}_{3,l} t \omega dt &= \int_{-h}^h (\tilde{v}_{3,l}(s, t) - \tilde{v}_{3,-l}(s, -t)) t g_{3,l} \omega dt \\ &= 6^{-1} (v^{(3)}(s + s_{2l} + \zeta_l) - v^{(3)}(s - s_{2l} - \zeta_l)) \zeta_l \int_{-h}^h g_{3,l} \omega dt, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где $\zeta_l(s, d) \in [-h, h]$. При $(s, d) \in T_L$, $l = \overline{1, L}$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |v^{(3)}(s + s_{2l} + \zeta_l) - v^{(3)}(s - s_{2l} - \zeta_l)| &\leq \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} 2(2l+1)h, \\ |g_{3,l}| &\leq (2l-1)^{-2} h^{-2}, \quad |\zeta_l| \leq h, \quad \frac{(2l+1)}{(2l-1)} \leq 3. \end{aligned} \quad (7.10)$$

На основании соотношений (7.7), (7.9), (7.10) получаем оценки:

$$\left| \sum_{l=\overline{-L, -1}, \overline{1, L-h}} \int_{-h}^h g_{3,l} t \tilde{v}_{3,l} \omega dt \right| \leq c_{1,2} \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} \ln(2L+1) h^3 \quad ((s, d) \in T_L), \quad c_{1,2} := \frac{2}{3}. \quad (7.11)$$

Сравнивая формулы Ньютона (3.1), (3.2) и полагая $z = s + t$, $z_{-1} = s - h$, $z_1 = s + h$, $z_0 = s$, можно представить функцию $\tilde{v}_{3,0}$ в виде суммы: $\tilde{v}_{3,0} = \tilde{v}_3 + \tilde{v}_4 t$, где

$$\tilde{v}_3(s) := f_3(z_{-1}, z_1, z_0, z_0), \quad \tilde{v}_4(s, t) := f_4(z, z_{-1}, z_1, z_0, z_0), \quad s \in I_L, \quad t \in [-h, h].$$

Учитывая, что

$$\int_{-h}^h g_{3,0} t \omega dt = 0 \quad (d \in I_D) \quad \text{и} \quad |g_{3,0}(t, d) t^2| \leq 1 \quad (d \in I_D, t \in [-h, h]),$$

с помощью формул (3.4) и $\int_{-h}^h |\omega| dt = \frac{4}{3} h^3$ получаем оценки:

$$\left| \int_{-h}^h g_{3,0} t \tilde{v}_{3,0} \omega dt \right| = \left| \int_{-h}^h g_{3,0} t^2 \tilde{v}_4 \omega dt \right| \leq c_{1,3} \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \quad ((s, d) \in T_L), \quad c_{1,3} := 18^{-1}. \quad (7.12)$$

На основании формулы (7.5) и оценок (7.8), (7.11), (7.12) получаем оценки:

$$|u_1 - \tilde{u}_1| \leq c_1 \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} \ln(2L+1) h^3 \quad ((s, d) \in T_L), \quad c_1 := c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3}. \quad (7.13)$$

С учетом формул $u = \sum_{i=1}^3 u_i$, $\tilde{u} = \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i$ ($i = \overline{1, 3}$) и оценок (7.3), (7.4), (7.13) приходим при $(s, d) \in T_L$ к оценкам (7.1), где $C_1 := c_1 + c_2 + c_3$. В силу теорем 6.1, 7.1 неравенства (7.1) могут быть продолжены по непрерывности на все множество $\overline{T}_L$. Теорема 7.2 доказана. $\square$

Пусть $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $v \in C(\partial\Omega)$. Представим функцию $\tilde{u}$ на множестве T_L в виде суммы: $\tilde{u} = \sum_{i=1}^4 \tilde{u}_i$, где

$$\tilde{u}_i(s, d) := \int_{[-P', P']} a_i \tilde{w}'_i d\rho \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \tilde{u}_4(s, d) \equiv \int_{I_S \setminus [\Sigma'_-, \Sigma'_+]} \tilde{w}_4 d\sigma \quad ((s, d) \in T_L).$$

Теорема 7.3. Пусть $\gamma, L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+2}$. Тогда для функций $\tilde{u}(s, d)$, $\hat{u}(s, d)$, доопределенных при $d = 0$ по непрерывности, при $(s, d) \in \overline{T}_L$ справедливы оценки:

$$|\hat{u} - \tilde{u}| \leq C_2 \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L + 1), \quad (7.14)$$

где C_2 — положительная постоянная, не зависящая от L и (s, d) .

Доказательство. Пусть $v \in C^3(\partial\Omega)$. Зададим множество

$$\Upsilon'' := I_S \times \left[-\frac{3\Sigma_1}{5}, \frac{3\Sigma_1}{5} \right] \times \overline{I_D}.$$

Так как $r > 0$ при $(s, \sigma, d) \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon''}$, при $\partial\Omega \in C^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ можно определить положительные постоянные

$$\hat{c}_{4,j} := \sup_{(s,\sigma,d) \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon''}} |\partial_\sigma^j g| \quad (j = \overline{0, n}).$$

При $L \geq L_0$, $(s, d) \in \overline{T}_L$ имеем вложения $[-\frac{3\Sigma_1}{5}, \frac{3\Sigma_1}{5}] \subseteq [s_{-2L'-1}, s_{2L'+1}]$, поэтому при $(s, d) \in \overline{T}_L$ и почти всех $\sigma \in I_S \setminus [s_{-2L'-1}, s_{2L'+1}]$ производная $\partial_\sigma^{2\gamma} \tilde{w}_4$ существует, и в силу неравенств (3.7), (3.10) выполняются неравенства:

$$|\partial_\sigma^{2\gamma} \tilde{w}_4| \leq \tilde{c}_4 \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} \quad ((s, d) \in \overline{T}_L), \quad \tilde{c}_4 := \hat{c}_{4,2\gamma} c_{\Lambda,0} + 2\gamma \hat{c}_{4,2\gamma-1} c_{\Lambda,1} + \gamma(2\gamma-1) \hat{c}_{4,2\gamma-2} c_{\Lambda,2}.$$

Используя оценку остаточного члена в формулах Гаусса [2, гл. 3, § 5, п. 2], получаем оценку погрешности аппроксимации функции $\tilde{u}_4$:

$$|\hat{u}_4 - \tilde{u}_4| \leq c_4 \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} h^{2\gamma} \quad ((s, d) \in T_L), \quad c_4 := 2S(\gamma!)^4 [(2\gamma)!]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} \tilde{c}_4. \quad (7.15)$$

В силу следствия 4.1 при $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ могут быть определены положительные постоянные

$$\hat{c}_{i,j} := \sup_{(s,\rho,d) \in \tilde{\Upsilon}'} |\partial_\rho^j \delta'_i| \quad (j = \overline{0, n}, i = \overline{0, 3}).$$

При почти всех $(s, \rho, d) \in \tilde{\Upsilon}'$ производные $\partial_\rho^3 \tilde{w}'_i$ ($i = \overline{1, 3}$) существуют, и в силу неравенств (3.7), (3.10) выполняются неравенства:

$$|\partial_\rho^3 \tilde{w}'_i| \leq \tilde{c}_i \|v\|_{C^2(\partial\Omega)},$$

где

$$\tilde{c}_i := \hat{c}_{i,3} c_{\Lambda,0} + (3\hat{c}_{i,2} \hat{c}_{0,0} + 3\hat{c}_{i,1} \hat{c}_{0,1} + \hat{c}_{i,0} \hat{c}_{0,2}) c_{\Lambda,1} + 3(\hat{c}_{i,1} \hat{c}_{0,0}^2 + \hat{c}_{i,0} \hat{c}_{0,1} \hat{c}_{0,0}) c_{\Lambda,2} \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Используя неравенства

$$h'_{s,d,l} \leq c''_\rho h \quad ((s, d) \in \overline{T}_L, l = \overline{-2L'-1, 2L'+1}),$$

по аналогии с оценками (7.3), (7.4) получаем оценки погрешности аппроксимаций функций $\tilde{u}_3, \tilde{u}_2$:

$$|\hat{u}_i - \tilde{u}_i| \leq c_i \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} h^3 \quad ((s, d) \in T_L, \quad i = 2, 3). \quad (7.16)$$

Здесь

$$c_2 := 2c_\lambda \tilde{c}_2 (c''_\rho)^3 \sup_{d \in I_D} |A_{2,0}(P, |d|)|, \quad c_3 := 2Sc_\lambda \tilde{c}_3 (c''_\rho)^3.$$

Полагая в формуле (3.1)

$$\begin{aligned} z &= \rho_{s,d,2l} + t, & f(z) &= \tilde{w}'_1(s, \rho_{s,d,2l} + t, d), & z_{-1} &= \rho_{s,d,2l-1}, \\ z_1 &= \rho_{s,d,2l+1}, & z_0 &= \rho_{s,d,2l}, & \hat{f}(z) &= \hat{w}'_1(s, \rho_{s,d,2l} + t, d), \\ t &\in [-h'_{s,d,l}, h'_{s,d,l}], & (s, d) &\in \overline{T}_L, & l &= \overline{-2L' - 1, 2L' + 1}, \end{aligned}$$

приходим к равенствам:

$$\tilde{w}'_1(s, \rho_{s,d,2l} + t, d) - \hat{w}'_1(s, \rho_{s,d,2l} + t, d) = \hat{w}'_{\text{III},l} t \omega_{s,d,l},$$

где

$$\omega_{s,d,l}(t) := (t + h'_{s,d,l})(t - h'_{s,d,l}), \quad \hat{w}'_{\text{III},l}(s, t, d) := f_3(z, z_{-1}, z_1, z_0).$$

Отклонение $\tilde{u}_1 - \hat{u}_1$ при $(s, d) \in T_L$ можно записать в следующем виде:

$$\tilde{u}_1 - \hat{u}_1 = \sum_{l=-2L'-1}^{2L'+1} \int_{-h'_{s,d,l}}^{h'_{s,d,l}} g_l \hat{w}'_{\text{III},l} t \omega_{s,d,l} dt, \quad g_l(s, t, d) := [a_1(\rho, d)]_{\rho=\rho_{s,d,2l}+t}. \quad (7.17)$$

Оценим сумму (7.17), из которой исключено слагаемое при $l = 0$. Так как

$$h'_{s,d,-l} = h'_{s,d,l}, \quad \omega_{s,d,-l}(-t) = \omega_{s,d,l}(t), \quad g_{-l}(s, -t, d) = g_l(s, t, d)$$

при $t \in [-h'_{s,d,l}, h'_{s,d,l}]$, $(s, d) \in \overline{T}_L$, $l = \overline{1, 2L' + 1}$, а знак функций g_l , $\omega_{s,d,l}$ не изменяется при $t \in [-h'_{s,d,l}, h'_{s,d,l}]$, с учетом формулы (3.3) и теоремы о среднем имеем при $(s, d) \in T_L$, $l = \overline{1, 2L' + 1}$ равенства:

$$\begin{aligned} &\int_{-h'_{s,d,-l}}^{h'_{s,d,-l}} g_{-l} \hat{w}'_{\text{III},-l} t \omega_{s,d,-l} dt + \int_{-h'_{s,d,l}}^{h'_{s,d,l}} g_l \hat{w}'_{\text{III},l} t \omega_{s,d,l} dt \\ &= 6^{-1} \left([\partial_\rho^3 \tilde{w}'_1]_{\rho=\zeta_l^+} - [\partial_\rho^3 \tilde{w}'_1]_{\rho=\zeta_l^-} \right) \zeta_l \int_{-h'_{s,d,l}}^{h'_{s,d,l}} g_l \omega_{s,d,l} dt, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где

$$\zeta_l^\pm(s, d) := \pm \rho_{s,d,2l} \pm \zeta_l, \quad \zeta_l(s, d) \in [-h'_{s,d,l}, h'_{s,d,l}], \quad l = \overline{1, 2L' + 1}.$$

Также имеем равенства:

$$\begin{aligned} [\partial_\rho^3 \tilde{w}'_1]_{\rho=\zeta_l^+} - [\partial_\rho^3 \tilde{w}'_1]_{\rho=\zeta_l^-} &= \sum_{k=0}^2 \left([\partial_\rho^{3-k} \delta'_1]_{\rho=\zeta_l^+} - [\partial_\rho^{3-k} \delta'_1]_{\rho=\zeta_l^-} \right) [\partial_\rho^k \tilde{v}']_{\rho=\zeta_l^+} \\ &\quad + [\partial_\rho^{3-k} \delta'_1]_{\rho=\zeta_l^-} \left([\partial_\rho^k \tilde{v}']_{\rho=\zeta_l^+} - [\partial_\rho^k v']_{\rho=\zeta_l^+} \right) \\ &\quad + [\partial_\rho^{3-k} \delta'_1]_{\rho=\zeta_l^-} \left([\partial_\rho^k v']_{\rho=\zeta_l^+} - [\partial_\rho^k v']_{\rho=\zeta_l^-} \right) \\ &\quad + [\partial_\rho^{3-k} \delta'_1]_{\rho=\zeta_l^-} \left([\partial_\rho^k v']_{\rho=\zeta_l^-} - [\partial_\rho^k \tilde{v}']_{\rho=\zeta_l^-} \right), \end{aligned} \quad (7.19)$$

где

$$v'(s, \rho, d) := v(s + \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)), \quad \tilde{v}'(s, \rho, d) := \tilde{v}(s + \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)).$$

Зададим положительные постоянные

$$\begin{aligned} \hat{c}'_{1,0} &:= \hat{c}_{1,0}, & \hat{c}'_{1,j} &:= \max \{ \hat{c}_{1,j}, \hat{c}'_{i,j-1} \} \quad (j = \overline{1, n}); \\ c'_\Lambda &:= \max \{ c_{\Lambda,0}, c_{\Lambda,1}, c_{\Lambda,2} \}, & c'_\lambda &:= \max \{ c_{\lambda,0}, c_{\lambda,1}, c_{\lambda,2} \}. \end{aligned}$$

При $v \in C^3(\partial\Omega)$, $(s, \rho, d) \in \tilde{\Upsilon}'$ имеем оценки:

$$|\partial_\rho^j v'| \leq c_{v,j} \|v\|_{C^j(\partial\Omega)} \quad (j = \overline{0, 3}),$$

где

$$\begin{aligned} c_{v,0} &:= 1, & c_{v,1} &:= \max \{ \hat{c}_{0,0}, c_{v,0} \}, \\ c_{v,2} &:= \max \{ \hat{c}_{0,0}^2 + \hat{c}_{0,1}, c_{v,1} \}, \\ c_{v,3} &:= \max \{ \hat{c}_{0,3}^3 + 3\hat{c}_{0,0}\hat{c}_{0,1} + \hat{c}_{0,2}, c_{v,2} \}. \end{aligned}$$

Кроме того, $\rho \leq \tilde{\rho}_{s,d}(s_{2l+1}) \leq c_\rho'' s_{2l+1}$, если $\rho \in [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]$, $l = \overline{1, 2L' + 1}$. Учитывая также неравенства (3.7), (3.8), (3.10), (3.11), получаем при $t \in [-h'_{s,d,l}, h'_{s,d,l}]$, $l = \overline{1, 2L' + 1}$, $(s, d) \in \overline{T}_L$ оценки:

$$\begin{aligned} \left| [\partial_\rho^j \delta_1']_{\rho=\zeta_l^\pm} \right| &\leq c_\delta \quad (j = \overline{0, 3}), & c_\delta &:= \hat{c}'_{1,3}; \\ \left| [\partial_\rho^j \delta_1']_{\rho=\zeta_l^+} - [\partial_\rho^j \delta_1']_{\rho=\zeta_l^-} \right| &\leq c'_\delta (2l+1) h \quad (j = \overline{0, 3}), & c'_\delta &:= 2\hat{c}'_{1,4} c_\rho''; \\ \left| [\partial_\rho^j v']_{\rho=\zeta_l^+} - [\partial_\rho^j v']_{\rho=\zeta_l^-} \right| &\leq c'_v \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} (2l+1) h \quad (j = \overline{0, 2}), & c'_v &:= 2c_{v,3} c_\rho''; \\ \left| [\partial_\rho^j \tilde{v}']_{\rho=\zeta_l^\pm} \right| &\leq \tilde{c}_v \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} \quad (j = \overline{0, 2}), & \tilde{c}_v &:= c'_\Lambda c_{v,2}; \\ \left| [\partial_\rho^j \tilde{v}' - \partial_\rho^j v']_{\rho=\zeta_l^\pm} \right| &\leq \tilde{c}'_v \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} h \quad (j = \overline{0, 2}), & \tilde{c}'_v &:= c'_\lambda c_{v,3} c_\rho''. \end{aligned} \quad (7.20)$$

В силу оценок (7.20) и равенств (7.19) при $t \in [-h'_{s,d,l}, h'_{s,d,l}]$, $l = \overline{1, 2L' + 1}$, $(s, d) \in \overline{T}_L$ справедливы оценки:

$$\left| [\partial_\rho^3 \tilde{w}_1']_{\rho=\zeta_l^+} - [\partial_\rho^3 \tilde{w}_1']_{\rho=\zeta_l^-} \right| \leq \tilde{c}_{1,1} \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} (2l+1) h, \quad \tilde{c}_{1,1} := 3(c'_\delta \tilde{c}_v + c_\delta (2\tilde{c}'_v + c'_v)). \quad (7.21)$$

Пусть

$$\rho'_{s,d,2l-1} := \min \{ -\tilde{\rho}_{s,d}(s_{-(2l-1)}), \tilde{\rho}_{s,d}(s_{2l-1}) \}, \quad l = \overline{1, L'}, \quad (s, d) \in \overline{T}_L.$$

Заметим, что $\rho \geq \tilde{\rho}'_{s,d,1} \geq c'_\rho s_1$, если $\rho \in [\rho_{s,d,1}, \rho_{s,d,3}]$, и в силу принципа Дирихле $\rho \geq \tilde{\rho}'_{s,d,2l'-1} \geq c'_\rho s_{2l'-1}$, если $\rho \in [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]$, $l = 2l' + l''$, $l' = \overline{1, L'}$, $l'' = 0, 1$. Поэтому имеют место неравенства:

$$|g_1| \leq (c'_\rho h)^{-2} \quad \text{при} \quad t \in [-h_{s,d,1}, h_{s,d,1}],$$

и

$$|g_l| \leq (c'_\rho h)^{-2} (2|l'| - 1)^{-2} \quad \text{при} \quad t \in [-h'_{s,d,l}, h'_{s,d,l}],$$

$l = 2l' + l''$, $l' = \overline{1, L'}$, $l'' = 0, 1$ ($(s, d) \in T_L$). Учитывая также неравенства

$$\begin{aligned} |\zeta_l| &\leq c_\rho'' h \quad (l = \overline{1, 2L' + 1}), \\ \frac{(2l+1)}{(2l'-1)} &\leq 7 \quad (l = 2l' + l'', l' = \overline{1, L'}, l'' = 0, 1) \end{aligned}$$

и

$$\int_{-h'_{s,d,l}}^{h'_{s,d,l}} |\omega_{s,d,l}| dt \leq \frac{4}{3} (c_\rho'' h)^3 \quad (l = \overline{1, 2L' + 1}, (s, d) \in \overline{T}_L),$$

равенства (7.18) и оценки (7.21), получаем по аналогии с неравенствами (7.11) следующие оценки:

$$\left| \sum_{l=-2L'-1, -1, 1, 2L'+1} \int_{-h'_{s,d,l}}^{h'_{s,d,l}} g_l \hat{w}'_{\text{III},l} t \omega_{s,d,l} dt \right| \leq c_{1,1} \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \ln(2L' + 1) h^3 \quad ((s, d) \in \mathbb{T}_L). \quad (7.22)$$

Здесь

$$c_{1,1} := \frac{14}{9} \tilde{c}_{1,1} (c_\rho c''_\rho)^2.$$

Оценим слагаемое в сумме (7.17) при $l = 0$. Сравнивая формулы Ньютона (3.1), (3.2) и полагая $z = t$, $z_{-1} = -h_{s,d,0}$, $z_1 = h_{s,d,0}$, $z_0 = 0$, можно представить функцию $\hat{w}'_{\text{III},0}$ при $t \in [-h_{s,d,0}, h_{s,d,0}]$, $(s, d) \in \bar{\mathbb{T}}_L$ в виде суммы:

$$\hat{w}'_{\text{III},0} = \hat{w}'_{\text{III}} + \hat{w}'_{\text{IV}} t,$$

где

$$\hat{w}'_{\text{III}}(s, d) := f_3(z_{-1}, z_1, z_0, z_0), \quad \hat{w}'_{\text{IV}}(s, t, d) := f_4(z, z_{-1}, z_1, z_0, z_0).$$

При почти всех $(s, \rho, d) \in \tilde{\Upsilon}'$ производная $\partial_\rho^4 \tilde{w}'_1$ существует, и в силу формулы (3.4) и неравенств (3.7), (3.10) выполняются неравенства:

$$|\hat{w}'_{\text{IV}}| \leq 24^{-1} \sup_{(s, \rho, d) \in \tilde{\Upsilon}'} |\partial_\rho^4 \tilde{w}'_1| \leq 24^{-1} \tilde{c}_{1,2} \|v\|_{C^2(\partial\Omega)},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{1,2} := & \hat{c}_{1,4} c_{\Lambda,0} + (4\hat{c}_{1,3} \hat{c}_{0,0} + 6\hat{c}_{1,2} \hat{c}_{0,1} + 4\hat{c}_{1,1} \hat{c}_{0,2} + \hat{c}_{1,0} \hat{c}_{0,3}) c_{\Lambda,1} \\ & + (6\hat{c}_{1,2} \hat{c}_{0,0}^2 + 12\hat{c}_{1,1} \hat{c}_{0,0} \hat{c}_{0,1} + 3\hat{c}_{1,0} \hat{c}_{0,1}^2 + 4\hat{c}_{1,0} \hat{c}_{0,0} \hat{c}_{0,2}) c_{\Lambda,2}. \end{aligned}$$

Учитывая также, что

$$\int_{-h_{s,d,0}}^{h_{s,d,0}} g_0 t \omega_{s,d,0} dt = 0, \quad \int_{-h_{s,d,0}}^{h_{s,d,0}} |\omega_{s,d,0}| dt \leq \frac{4}{3} (c''_\rho h)^3 \quad \text{при } (s, d) \in \mathbb{T}_L$$

и

$$|g_0 t^2| \leq 1 \quad \text{при } (s, d) \in \mathbb{T}_L, \quad t \in [-h_{s,d,0}, h_{s,d,0}],$$

получаем оценки:

$$\left| \int_{-h_{s,d,0}}^{h_{s,d,0}} g_0 \hat{w}'_{\text{III},0} t \omega_{s,d,0} dt \right| = \left| \int_{-h_{s,d,0}}^{h_{s,d,0}} g_0 t^2 \hat{w}'_{\text{IV}} \omega_{s,d,0} dt \right| \leq c_{1,2} \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} h^3 \quad ((s, d) \in \mathbb{T}_L). \quad (7.23)$$

Здесь $c_{1,2} := 18^{-1} \tilde{c}_{1,2} (c''_\rho)^3$.

На основании формулы (7.17) и оценок (7.22), (7.23) получаем оценки:

$$|\hat{u}_1 - \tilde{u}_1| \leq c_1 \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \ln(2L' + 1) h^3 \quad ((s, d) \in \mathbb{T}_L), \quad c_1 := c_{1,1} + c_{1,2}. \quad (7.24)$$

С учетом равенств $\tilde{u} = \sum_{i=1}^4 \tilde{u}_i$, $\hat{u} \equiv \sum_{i=1}^4 \hat{u}_i$ и оценок (7.15), (7.16), (7.24) приходим при $(s, d) \in \mathbb{T}_L$ к оценкам (7.14), где $C_2 := c_1 + c_2 + c_3 + c_4$. В силу теорем 5.1, 7.1 неравенства (7.14) могут быть продолжены по непрерывности на все множество $\bar{\mathbb{T}}_L$. Теорема 7.3 доказана. $\square$

На основании неравенств (7.1), (7.14) при условиях $\gamma, L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+2}$, $v \in C^4(\partial\Omega)$ получаем оценки:

$$|\hat{u} - u| \leq C_0 \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L+1) \quad ((s, d) \in \bar{T}_L), \quad C_0 := C_1 + C_2. \quad (7.25)$$

Аналогично существует положительная постоянная C'_0 , такая, что при условиях $\gamma, L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+2}$, $v \in C^4(\partial\Omega)$ выполняются оценки:

$$|\hat{u}' - u'| \leq C'_0 \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L+1) \quad ((s, d) \in \bar{T}'_L). \quad (7.26)$$

Согласно оценкам (7.25), (7.26) функции $\hat{u}$, $\hat{u}'$ аппроксимируют функцию u с ошибкой $O(h^3 \ln(2L+1))$ на соответствующих множествах $\bar{T}_L$, $\bar{T}'_L$. При условиях $\gamma, L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+2}$, $v \in C^4(\partial\Omega)$ имеем следующие оценки:

$$|\check{u} - u| \leq C \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L+1) \quad ((s, d) \in \bar{T}_L \cup \bar{T}'_L), \quad C := C_0 + C'_0. \quad (7.27)$$

Согласно формулам (5.4), (6.7) функция $\check{u} - \ddot{u}$ вычисляется при $(s, d) \in \bar{T}$ с помощью формулы:

$$\check{u} - \ddot{u} = [\hat{u}' - u]_{s=s_{2l-1}} \Lambda_{-1}^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]} + [\hat{u} - u]_{s=s_{2l}} \Lambda_0^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]} + [\hat{u}' - u]_{s=s_{2l+1}} \Lambda_1^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]},$$

то есть функция $\check{u} - \ddot{u}$ на промежутках $[s_{2l-1}, s_{2l+1}]$ описывается квадратичными полиномами Лагранжа, заданными значениями функции $\check{u} - u$ в узлах s_{2l-1} , s_{2l} , s_{2l+1} . Поэтому с учетом неравенств (3.7), (7.27) получаем при условиях $\gamma, L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+2}$, $v \in C^4(\partial\Omega)$ следующие оценки:

$$|\check{u} - \ddot{u}| \leq c_{\Lambda,0} C \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L+1) \quad ((s, d) \in \bar{T}). \quad (7.28)$$

В силу оценок (6.8), (7.28) имеем при условиях $\gamma, L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $L \geq \frac{S^2 - 1}{2}$, $(\ln(2L+1) \leq 2|\ln h|)$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+3}$, $v \in C^5(\partial\Omega)$ оценки (2.2), где

$$c := \pi^{-1} \left(c_{\Lambda,0} C \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} + c_\lambda \sup_{(s,d) \in \bar{T}} |\partial_s^3 u| \right).$$

Получили основное утверждение настоящей работы:

Следствие 7.1. Пусть $\gamma, L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_0$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+3}$, $v \in C^5(\partial\Omega)$. Тогда функции $\check{U}(\tilde{x}_d(s))$ сходятся при $L \rightarrow \infty$ к функции $U(\tilde{x}_d(s))$, доопределенной при $d = 0$ по непрерывности, равномерно относительно $(s, d) \in \bar{T}$ со скоростью $O(h^3 \ln h)$.

8. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим вычисление НП ПДС вблизи и на границе единичного круга ($d \in [-0.01, 0.01]$) с плотностью $v(s) = \cos(s)$ ($s \in \bar{I}_S = [-\pi, \pi]$). Точные значения НП ПДС $U(\tilde{x}_d(s))$ вычисляем по формулам:

$$U = -2^{-1} \cos(s) \quad \text{при} \quad d \in [0, 1],$$

$$U = -2^{-1} \frac{\cos(s)}{(1-d)^2} \quad \text{при} \quad d \in (-\infty, 0].$$

Для данной геометрии треть радиуса круга Ляпунова $D = \frac{2}{3\pi} \approx 0.21$. Производная $\partial_\sigma \rho'$ вычисляется с помощью выражения $\sqrt{1-d} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)$ при любых $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$, поэтому $\partial_\sigma \rho' > 0$ при $\sigma \in (-\pi, \pi)$, и в качестве Σ_0 можно взять любое число $\Sigma_0 \in (0, \pi)$, причем в силу симметрии здесь $\Sigma_1 = \Sigma_0$. Полуаналитические аппроксимации НП ПДС $\check{U}(\tilde{x}_d(s))$ вычисляем с помощью формулы (5.4), при этом для вычисления функции $\hat{u}_4$ используем

формулу Гаусса с $\gamma = 2$ узлами. Вычисление приближенных и точных значений НП ПДС осуществляем с двойной точностью на множествах X_L , образованных точками $\tilde{x}_{d_i}(s_{l+\frac{j}{4}})$ ($i = \overline{-5, 5}$, $l = \overline{-2L-1, 2L}$, $j = \overline{0, 3}$), где

$$s_{l+\frac{j}{4}} := \left(l + \frac{j}{4}\right) h, \quad d_0 := 0, \quad d_{\pm i} := \pm 10^{i+1}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad d_{\pm 5} := \pm 10^{-15}.$$

Для экспериментального определения точности аппроксимаций находим значения ΔU — максимумы модулей абсолютных погрешностей на множествах X_L :

$$\Delta U(h, \Sigma_0) := \max_{i=\overline{-5, 5}, l=\overline{-2L-1, 2L}, j=\overline{0, 3}} \left| \check{U}(\tilde{x}_{d_i}(s_{l+\frac{j}{4}})) - U(\tilde{x}_{d_i}(s_{l+\frac{j}{4}})) \right|.$$

В таблице 1 в каждой основной ячейке приведены значения ΔU , вычисленные при заданных значениях Σ_0 и h .

ТАБЛИЦА 1.

Σ_0/π	$h_1 = \pi/15$	$h_2 = \pi/31$	$h_3 = \pi/63$	$h_4 = \pi/127$	$h_5 = \pi/255$
0.006	$7.70 \cdot 10^0$	$6.94 \cdot 10^0$	$5.39 \cdot 10^0$	$2.30 \cdot 10^0$	$5.07 \cdot 10^{-2}$
0.01	$4.33 \cdot 10^0$	$3.56 \cdot 10^0$	$2.02 \cdot 10^0$	$8.17 \cdot 10^{-2}$	$6.91 \cdot 10^{-3}$
0.03	$9.60 \cdot 10^{-1}$	$1.88 \cdot 10^{-1}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$4.41 \cdot 10^{-4}$	$4.70 \cdot 10^{-5}$
0.05	$2.87 \cdot 10^{-1}$	$5.63 \cdot 10^{-3}$	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$6.39 \cdot 10^{-5}$	$6.08 \cdot 10^{-6}$
0.068	$3.06 \cdot 10^{-2}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$1.87 \cdot 10^{-5}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$
0.10	$3.27 \cdot 10^{-3}$	$6.27 \cdot 10^{-4}$	$3.48 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-6}$	$2.17 \cdot 10^{-7}$
0.15	$4.25 \cdot 10^{-4}$	$9.74 \cdot 10^{-5}$	$8.85 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$8.35 \cdot 10^{-8}$
0.50	$2.96 \cdot 10^{-4}$	$3.78 \cdot 10^{-5}$	$5.14 \cdot 10^{-6}$	$6.60 \cdot 10^{-7}$	$6.82 \cdot 10^{-8}$
0.90	$4.66 \cdot 10^{-4}$	$5.35 \cdot 10^{-5}$	$6.83 \cdot 10^{-6}$	$7.68 \cdot 10^{-7}$	$7.43 \cdot 10^{-8}$
0.99	$1.29 \cdot 10^{-2}$	$2.00 \cdot 10^{-3}$	$2.21 \cdot 10^{-4}$	$3.68 \cdot 10^{-5}$	$4.79 \cdot 10^{-6}$
0.999	$1.79 \cdot 10^{-1}$	$4.06 \cdot 10^{-2}$	$9.10 \cdot 10^{-3}$	$1.91 \cdot 10^{-3}$	$3.44 \cdot 10^{-4}$
0.9999	$1.85 \cdot 10^0$	$4.34 \cdot 10^{-1}$	$1.04 \cdot 10^{-1}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$6.02 \cdot 10^{-3}$
0.99999	$1.85 \cdot 10^1$	$4.37 \cdot 10^0$	$1.06 \cdot 10^0$	$2.60 \cdot 10^{-1}$	$6.37 \cdot 10^{-2}$

Вычисляя степени скорости сходимости

$$v := \ln \left(\frac{\Delta U(h_k)}{\Delta U(h_{k+1})} \right) / \ln \left(\frac{h_k}{h_{k+1}} \right)$$

при переходе от шага дискретизации h_k к h_{k+1} ($k = \overline{1, 4}$), можно заметить, что в широком диапазоне возможных значений Σ_0 предлагаемая полуаналитическая аппроксимация обладает равномерной почти кубической скоростью сходимости ($v \approx 3$) в замкнутой приграничной области, что хорошо согласуется со следствием 7.1. В частности, выраженная кубическая скорость сходимости наблюдается при значении $\frac{\Sigma_0}{\pi} = \pi^{-1} \arcsin D \approx 0.068$, когда расстояние от точки наблюдения до ближайших узлов формул Гаусса приближенно равно трети радиуса круга Ляпунова (см. замечание после теоремы 4.1). Снижение скорости сходимости происходит при уменьшении Σ_0 , когда точка наблюдения $\tilde{x}_d(s)$ приближается к узлам формул Гаусса, и при $\Sigma_0 \rightarrow \pi$, когда якобиан $(\partial_\sigma \rho')^{-1}$, осуществляющий переход от переменной интегрирования по длине дуги σ к переменной ρ , неограниченно возрастает.

Таким образом, предлагаемый здесь комбинированный метод, использующий точное интегрирование по переменной ρ на фиксированной по длине части границы вблизи точки наблюдения и формулы Гаусса на остальной части границы, обеспечивает равномерную

ТАБЛИЦА 2.

d	$h_1 = \pi/15$	$h_2 = \pi/31$	$h_3 = \pi/63$	$h_4 = \pi/127$	$h_5 = \pi/255$
0.01	$2.96 \cdot 10^{-4}$ $5.92 \cdot 10^0$	$3.78 \cdot 10^{-5}$ $1.18 \cdot 10^1$	$5.14 \cdot 10^{-6}$ $1.96 \cdot 10^1$	$6.60 \cdot 10^{-7}$ $1.99 \cdot 10^1$	$6.82 \cdot 10^{-8}$ $7.23 \cdot 10^0$
0.1	$3.72 \cdot 10^{-4}$ $1.73 \cdot 10^0$	$3.47 \cdot 10^{-5}$ $4.01 \cdot 10^{-1}$	$3.87 \cdot 10^{-6}$ $2.24 \cdot 10^{-2}$	$4.73 \cdot 10^{-7}$ $5.27 \cdot 10^{-5}$	$5.84 \cdot 10^{-8}$ $5.84 \cdot 10^{-8}$
0.5	$2.98 \cdot 10^{-4}$ $4.24 \cdot 10^{-4}$	$3.28 \cdot 10^{-5}$ $3.26 \cdot 10^{-5}$	$3.88 \cdot 10^{-6}$ $3.88 \cdot 10^{-6}$	$4.73 \cdot 10^{-7}$ $4.73 \cdot 10^{-7}$	$5.84 \cdot 10^{-8}$ $5.84 \cdot 10^{-8}$
0.9	$3.10 \cdot 10^{-4}$ $2.89 \cdot 10^{-4}$	$3.32 \cdot 10^{-5}$ $3.26 \cdot 10^{-5}$	$3.90 \cdot 10^{-6}$ $3.88 \cdot 10^{-6}$	$4.74 \cdot 10^{-7}$ $4.73 \cdot 10^{-7}$	$6.01 \cdot 10^{-8}$ $5.84 \cdot 10^{-8}$
0.99	$3.08 \cdot 10^{-4}$ $2.89 \cdot 10^{-4}$	$3.32 \cdot 10^{-5}$ $3.26 \cdot 10^{-5}$	$3.90 \cdot 10^{-6}$ $3.88 \cdot 10^{-6}$	$4.74 \cdot 10^{-7}$ $4.73 \cdot 10^{-7}$	$2.65 \cdot 10^{-7}$ $5.84 \cdot 10^{-8}$
0.999	$3.08 \cdot 10^{-4}$ $2.89 \cdot 10^{-4}$	$3.29 \cdot 10^{-5}$ $3.26 \cdot 10^{-5}$	$5.46 \cdot 10^{-6}$ $3.88 \cdot 10^{-6}$	$6.74 \cdot 10^{-6}$ $4.73 \cdot 10^{-7}$	$5.50 \cdot 10^{-4}$ $5.84 \cdot 10^{-8}$
0.9999	$6.59 \cdot 10^{-4}$ $2.89 \cdot 10^{-4}$	$3.26 \cdot 10^{-3}$ $3.26 \cdot 10^{-5}$	$1.64 \cdot 10^{-2}$ $3.87 \cdot 10^{-6}$	$7.34 \cdot 10^{-2}$ $4.73 \cdot 10^{-7}$	$3.79 \cdot 10^{-1}$ $5.84 \cdot 10^{-8}$
0.99999	$5.87 \cdot 10^{-1}$ $2.89 \cdot 10^{-4}$	$1.12 \cdot 10^0$ $3.26 \cdot 10^{-5}$	$2.04 \cdot 10^1$ $3.88 \cdot 10^{-6}$	$2.13 \cdot 10^1$ $4.73 \cdot 10^{-7}$	$7.28 \cdot 10^2$ $5.84 \cdot 10^{-8}$
-0.01	$2.90 \cdot 10^{-4}$ $5.86 \cdot 10^0$	$3.68 \cdot 10^{-5}$ $1.15 \cdot 10^1$	$4.99 \cdot 10^{-6}$ $1.93 \cdot 10^1$	$6.40 \cdot 10^{-7}$ $1.98 \cdot 10^1$	$6.65 \cdot 10^{-8}$ $7.33 \cdot 10^0$
-0.1	$2.86 \cdot 10^{-4}$ $1.73 \cdot 10^0$	$2.83 \cdot 10^{-5}$ $4.80 \cdot 10^{-1}$	$3.20 \cdot 10^{-6}$ $3.47 \cdot 10^{-2}$	$3.91 \cdot 10^{-7}$ $1.54 \cdot 10^{-4}$	$4.83 \cdot 10^{-8}$ $4.83 \cdot 10^{-8}$
-1	$7.33 \cdot 10^{-5}$ $1.06 \cdot 10^{-4}$	$8.17 \cdot 10^{-6}$ $8.15 \cdot 10^{-6}$	$9.70 \cdot 10^{-7}$ $9.69 \cdot 10^{-7}$	$1.18 \cdot 10^{-7}$ $1.18 \cdot 10^{-7}$	$1.46 \cdot 10^{-8}$ $1.46 \cdot 10^{-8}$
-10	$2.36 \cdot 10^{-6}$ $2.39 \cdot 10^{-6}$	$2.68 \cdot 10^{-7}$ $2.69 \cdot 10^{-7}$	$3.20 \cdot 10^{-8}$ $3.20 \cdot 10^{-8}$	$3.91 \cdot 10^{-9}$ $3.91 \cdot 10^{-9}$	$4.83 \cdot 10^{-10}$ $4.83 \cdot 10^{-10}$
-100	$2.80 \cdot 10^{-8}$ $2.84 \cdot 10^{-8}$	$3.18 \cdot 10^{-9}$ $3.19 \cdot 10^{-9}$	$3.80 \cdot 10^{-10}$ $3.80 \cdot 10^{-10}$	$4.64 \cdot 10^{-11}$ $4.64 \cdot 10^{-11}$	$5.74 \cdot 10^{-12}$ $5.73 \cdot 10^{-12}$

почти кубическую сходимость аппроксимаций НП ПДС в приграничной области, включающей границу. При этом часть границы, на которой осуществляется точное интегрирование по ρ , для достижения наибольшей точности необходимо делать как можно больше, с условием, чтобы якобиан перехода к переменной ρ оставался положительным и не принимал слишком больших значений.

Рассмотрим теперь вычисление НП ПДС с плотностью $v(s) = \cos(s)$ на некотором удалении от границы единичного круга ($d \geq 0.01$ и $d \leq -0.01$). Здесь при $d \in (-\infty, 1)$, $s \in I_S$ соответствие между точками $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}_d(s)$ взаимно однозначное и $1 - dK(s) = 1 - d > 0$, поэтому в качестве множества I_D можно взять любой промежуток вида $[-D_1, 0) \cup (0, D_2]$, где $D_1 > 0$, $D_2 \in (0, 1)$. Возможность выбора числа Σ_0 не зависит от выбора чисел D_1 , D_2 , так как $\partial_\sigma \rho' = \sqrt{1 - d} \cos(\frac{\sigma}{2}) > 0$ при любых $d \in (-\infty, 1)$, $\sigma \in (-\pi, \pi)$. При фиксированных d вычисляем значения функций $\check{U}(\tilde{x}_d(s))$ (при $\gamma = 2$) и $U(\tilde{x}_d(s))$ на множествах $X'_L(d)$, образованных точками $\tilde{x}_d(s_{l+\frac{j}{4}})$ ($l = -2L - 1, 2L$, $j = 0, 3$). Для экспериментального определения точности аппроксимаций находим значения $\Delta'U$ — максимумы модулей абсолютных погрешностей на множествах $X'_L(d)$ при фиксированных значениях d , Σ_0 :

$$\Delta'U(d, h, \Sigma_0) := \max_{l=-2L-1, 2L, j=0,3} \left| \check{U}(\tilde{x}_d(s_{l+\frac{j}{4}})) - U(\tilde{x}_d(s_{l+\frac{j}{4}})) \right|.$$

В таблице 2 в каждой основной ячейке приведены две серии значений $\Delta'U$: при $\Sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ и $\Sigma_0 = 0$ (сверху вниз), вычисленные при заданных значениях d и h .

Данные табл. 2 свидетельствуют, что использование исключительно формул Гаусса для вычисления интегралов, возникающих после ККИ функции плотности, обеспечивает кубическую сходимость аппроксимаций НП ПДС только на некотором расстоянии от границы, а в достаточно узкой замкнутой приграничной области невозможно. Полуаналитические аппроксимации $\tilde{U}(\tilde{x}_d(s))$ сходятся с почти кубической скоростью равномерно по $(s, d) \in \bar{T}$ в широком диапазоне возможных значений D_1, D_2 . Скорость сходимости снижается при $d \rightarrow 1$ (точки $\tilde{x}_d(s)$ приближаются к центру круга), когда якобиан $(\partial_\sigma \rho')^{-1}$ неограниченно возрастает.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получены полуаналитические аппроксимации НП ПДС для двумерного уравнения Лапласа $\tilde{U}(\tilde{x}_d(s))$, равномерно сходящиеся в замкнутой приграничной области $\bar{\Omega}_D$, включающей границу, со скоростью $O(h^3 \ln h)$ при условиях $\partial\Omega \in C^7$, $v \in C^5(\partial\Omega)$. При этом для аппроксимации медленно изменяющихся функций используются полиномы второй степени и формулы Гаусса с порядком не ниже пятого. Аналогичным образом при любом $n \in \mathbb{N}$ можно получить равномерно сходящиеся со скоростью $O(h^{2n+1} \ln h)$ аппроксимации, если использовать полиномы степени $2n$ и формулы Гаусса с порядком не ниже $O(h^{2n+3})$.

К недостаткам метода можно отнести достаточно высокие требования, предъявляемые к гладкости граничной кривой $\partial\Omega$. Кроме того, не исследован вопрос об аппроксимации границы в рамках данного метода. Преимуществом метода является возможность его реализации для любых аналитически заданных граничных кривых. Предположим, что аппроксимация границы является самостоятельной задачей, и она удовлетворительно решена с помощью аналитически заданной кривой, обладающей достаточной гладкостью, то есть такую кривую можно считать истинной границей области. Тогда предлагаемый метод всегда может быть реализован, независимо от сложности задания кривой. Для реализации других полуаналитических методов, основанных на точном интегрировании по длине дуги, требуется дополнительная аппроксимация координатных функций кривой: кусочно-постоянная, кусочно-линейная или кусочно-квадратичная, что влечет появление ложной границы, что крайне нежелательно при вычислениях вблизи и на самой границе [27], [26].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.Н. Бахшальева, Э.Г. Халилов. *Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа* // Ж. вычисл. мат. мат. физ. **61**:6, 936–950 (2021). <https://doi.org/10.31857/S0044466921030030>
2. И.С. Березин, Н.П. Жидков. *Методы вычислений. Т. 1*. М.: ГИФМЛ. 1962.
3. К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. *Методы граничных элементов*. М.: Мир. 1987. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3>
4. Д.Ю. Иванов. *Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода* // Вестн. Томск. гос. ун-в., Мат. мех. **57**, 5–25 (2019). <https://doi.org/10.17223/19988621/57/1>
5. Д.Ю. Иванов. *Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя* // Вестн. Томск. гос. ун-в., Мат. мех. **65**, 30–52 (2020). <https://doi.org/10.17223/19988621/65/3>
6. Д.Ю. Иванов. *О равномерной сходимости аппроксимаций потенциала двойного слоя вблизи границы двумерной области* // Вестн. Удмурт. ун-в., Мат. Мех. Компьют. науки **32**:1, 26–43 (2022). <https://doi.org/10.35634/vm220103>

7. Д.Ю. Иванов. *Об аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области* // Вестн. Томск. гос. унив., Мат. мех. **83**, 31–51 (2023). <https://elibrary.ru/item.asp?id=54200992>
8. Д.Ю. Иванов. *О равномерной сходимости полуаналитического решения задачи Дирихле для диссипативного уравнения Гельмгольца вблизи границы двумерной области* // Уфим. мат. ж. **15**:4, 75–98 (2023). <https://doi.org/10.13108/2023-15-4-76>
9. Д.Ю. Иванов. *Об одной полуаналитической аппроксимации нормальной производной потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области* // Вестн. Удмурт. унив., Мат. Мех. Компьютер. науки **33**:3, 434–451 (2023). <https://doi.org/10.35634/vm230304>
10. Д. Колтон, Р. Кресс. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния*. М.: Мир. 1987.
11. П.А. Крутицкий, А.Д. Федотова, В.В. Колыбасова. *Квадратурная формула для потенциала простого слоя* // Диффер. уравн. **55**:9, 1269–1284 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0012266119090106>
12. П.А. Крутицкий, И.О. Резниченко. *Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя* // Диффер. уравн. **57**:7, 932–950 (2021). <https://doi.org/10.1134/S0012266121070077>
13. П.А. Крутицкий, И.О. Резниченко. *Квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца* // Ж. вычисл. мат. мат. физ. **62**:3, 421–436 (2022). <https://doi.org/10.1134/S0965542522030095>
14. П.А. Крутицкий, И.О. Резниченко. *Улучшенная квадратурная формула для потенциала двойного слоя* // Ж. вычисл. мат. мат. физ. **63**:2, 230–244 (2023). <https://doi.org/10.31857/S0044466923020114>
15. И.К. Лифанов. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент*. М.: ТОО «Янус». 1995.
16. В.Г. Мазья. *Граничные интегральные уравнения* // Итоги науки тех., Сер. Современ. пробл. мат., Фундам. направления **27**, 131–228 (1988).
17. И.О. Резниченко, П.А. Крутицкий. *Квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя* // Программирование **48**:3, 92–100 (2022). <https://doi.org/10.1134/S0361768822030094>
18. В.И. Смирнов. *Курс высшей математики. Том 4. Часть 2*. М.: Наука. 1981.
19. Г.М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2*. М.: Физматлит. 2003.
20. Г.М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1*. М.: Физматлит. 2003.
21. Э.Г. Халилов, М.Н. Бахшалыева. *О производной логарифмического потенциала двойного слоя* // Вестн. Томск. гос. унив., Мат. мех. **62**, 38–54 (2019). <https://doi.org/10.17223/19988621/62/4>
22. Э.Г. Халилов. *Квадратурная формула для нормальной производной потенциала двойного слоя* // Уфим. мат. ж. **15**:4, 99–109 (2023). <https://doi.org/10.13108/2023-15-4-100>
23. C. Cheng, D. Pan, Z. Han, M. Wu, Z. Niu. *A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals* // Acta Mech. Solida Sin. **31**:4, 433–444 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8>
24. X.W. Gao, K. Yang, J. Wang. *An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals* // Eng. Anal. Bound. Elem. **32**:8, 692–696 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004>
25. X.-W. Gao, J.-B. Zhang, B.-J. Zheng, C. Zhang. *Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures* // Eng. Anal. Bound. Elem. **66**, 145–154 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.002>
26. Y.P. Gong, C.Y. Dong, Y. Bai. *Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method* // Eng. Anal. Bound. Elem. **75**, 21–35 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005>
27. Y. Gu, W. Chen, B. Zhang, W. Qu. *Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method* // Comput. Mech. **53**:6, 1223–1234 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1>

28. J. Lv, Y. Miao, H. Zhu. *The distance sinh transformation for the numerical evaluation of nearly singular integrals over curved surface elements* // Comput. Mech. **53**:2, 359–367 (2014).
<https://doi.org/10.1007/s00466-013-0913-0>
29. Z. Niu, C. Cheng, H. Zhou, Z. Hu. *Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM* // Eng. Anal. Bound. Elem. **31**:12, 949–964 (2007).
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001>
30. Z. Niu, Z. Hu, C. Cheng, H. Zhou. *A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM* // Eng. Anal. Bound. Elem. **61**, 42–51 (2015).
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007>
31. Y.-M. Zhang, Y. Gu, J.-T. Chen. *Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities* // Comput. Mech. **47**:5, 493–504 (2011).
<https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0>
32. Y. Zhang, Y. Gong, X. Gao. *Calculation of 2D nearly singular integrals over high-order geometry elements using the sinh transformation* // Eng. Anal. Bound. Elem. **60**, 144–153 (2015).
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.12.006>

Дмитрий Юрьевич Иванов,
Российский университет транспорта,
ул. Образцова, д. 9, стр. 9,
127994, ГСП-4, г. Москва, Россия
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru