

УДК 517.55

РАЗМЕРНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РИССА И ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ МЕР

Е.С. ДУБЦОВ

Аннотация. На единичной сфере из $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, рассматриваются произведения Рисса, порожденные полиномами Рыля — Войтащика. Получена оценка снизу для энергетической размерности таких произведений Рисса. Из полученного неравенства немедленно следует оценка для хаусдорфовой размерности рассматриваемых произведений. Этот результат также получен иным способом — с помощью известных одномерных оценок и разложения на срез-произведения. Наконец, подобные разложения использованы для точных оценок хаусдорфовой размерности плюригармонических мер на n -мерном торе, $n \geq 2$.

Ключевые слова: произведение Рисса на сфере, энергетическая размерность, хаусдорфова размерность, плюригармоническая мера.

Mathematics Subject Classification: 42A55, 28A78, 31C10, 43A85

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа мотивирована следующим общим вопросом: как спектр меры μ влияет на размер носителя меры μ ? В первую очередь будут рассмотрены произведения Рисса и смежные объекты на единичной сфере

$$S = S_n = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| = 1\}, \quad n \geq 2,$$

поэтому начнем с определения пространств $H(p, q)$, $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$.

1.1. Комплексные сферические гармоники. Пусть $\mathcal{U}(n)$ — группа унитарных операторов на гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Отметим, что $S_n = \mathcal{U}(n)/\mathcal{U}(n-1)$, следовательно, S_n — однородное пространство. Общие конструкции абстрактного гармонического анализа явно реализуются на сфере S_n в терминах пространств $H(p, q)$, $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$.

Определение 1.1. Зафиксируем размерность n , $n \geq 2$. Пусть $H(p, q) = H(p, q; n)$ — пространство всех однородных гармонических полиномов бистепени $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$. По определению это означает, что рассматриваемые полиномы имеют степень p по переменным $z_1, z_2, \dots, z_n$, степень q по переменным $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$, а также имеют полную степень $p + q$.

Для сужения пространства $H(p, q)$ на сферу S используется тот же символ. Элементы пространства $H(p, q)$ часто называют комплексными сферическими гармониками.

1.2. Произведения Рисса на сфере. Дихотомия Зигмунда [15] подсказывает, что однородные голоморфные многочлены, введенные Рылем и Войтащиком [14], могут быть использованы для построения сингулярных произведений типа Рисса на сфере.

Будем говорить, что $\{R_j\}_{j=1}^\infty$ — это последовательность Рыля — Войтащика с константой $\delta \in (0, 1)$, если

E.S. DOUBTSOV, DIMENSIONS OF RIESZ PRODUCTS AND PLURIHARMONIC MEASURES.

© Дубцов Е.С. 2025.

Поступила 10 августа 2024 г.

1. $R_j \in H(j, 0)$, т.е. R_j — однородный голоморфный многочлен степени j ;
2. $\|R_j\|_{L^\infty(S)} = 1$;
3. $\|R_j\|_{L^2(S)} \geq \delta$ для всех $j = 1, 2, \dots$.

Определение 1.2. Пусть $R = \{R_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательность Рылля — Войтацки,

$$J = \{j_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}, \quad \frac{j_{k+1}}{j_k} \geq 3 \quad \text{и} \quad a = \{a_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{D}.$$

Тогда (R, J, a) называется тройкой Рисса.

Каждая тройка Рисса (R, J, a) порождает (стандартное) произведение Рисса $\Pi(R, J, a)$ с помощью формального равенства

$$\Pi(R, J, a) = \prod_{k=1}^\infty \left(\frac{\bar{a}_k \bar{R}_{j_k}}{2} + 1 + \frac{a_k R_{j_k}}{2} \right),$$

где произведение сходится в $\star$ -слабом смысле (см. [7], где приведены дальнейшие детали).

Существует достаточно богатый набор сингулярных произведений Рисса на сфере. Действительно, если (R, J, a) — тройка Рисса и $a \notin \ell^2$, то в силу следствия 1 из [6] существует последовательность $U = \{U_j\}_{j=1}^\infty$, $U_j \in \mathcal{U}(n)$, такая что произведение $\Pi(R \circ U, J, a)$ является сингулярным относительно меры Лебега на сфере S_n . Здесь по определению

$$R \circ U = \{R_j \circ U_j\}_{j=1}^\infty.$$

Для сингулярного произведения Рисса естественно задать вопрос о его размерности. В настоящей работе даны оценки для энергетической и хаусдорфовой размерностей произведений Рисса на сфере. Насколько известно автору, задачи такого типа ранее не исследовались.

Пусть $\dim_{\mathcal{H}} \Pi$ обозначает хаусдорфову размерность меры Π . В частности, в работе получен следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть (R, J, a) — тройка Рисса. Тогда

$$\dim_{\mathcal{H}} \Pi(R, J, a) \geq 2n - 1 - \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \log j_k} \sum_{\ell=1}^{k-1} |a_\ell|^2 \right).$$

1.3. Организация работы. Вспомогательные результаты, включая определения и базовые факты гармонического анализа на сфере S_n , собраны в разделе 2. Оценки для энергетической и хаусдорфовой размерностей произведений Рисса на единичной сфере получены в разделе 3. Смежная задача о хаусдорфовых размерностях плюригармонических мер на торе рассматривается в разделе 4. Отметим, что лемма 2.1 о дезинтеграции произведений Рисса служит связующим звеном между результатами раздела 3, где используется непосредственно эта лемма, и разделом 4, где применяются аналоги леммы 2.1.

1.4. Обозначения. Для $F, G > 0$ запись $F \lesssim G$ означает, что $F \leq CG$ для некоторой константы $C > 0$. Если $F \lesssim G$ и $G \lesssim F$, то используется обозначение $F \approx G$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Базовые факты гармонического анализа на сфере S_n . Пусть $\sigma = \sigma_n$ обозначает нормированную меру Лебега на единичной сфере S_n . Отметим, что

$$L^2(\sigma) = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2} H(p, q). \quad (2.1)$$

Специфику гармонического анализа на сфере S удачно иллюстрирует следующее правило умножения для пространств $H(p, q)$: если $f \in H(p, q)$ и $g \in H(r, s)$, то

$$fg \in \sum_{\ell=0}^L H(p+r-\ell, q+s-\ell),$$

где $L = \min(p, s) + \min(q, r)$. Доказательства сформулированных фактов и дальнейшие результаты приведены в главе 12 монографии [13].

Пусть $M(S_n)$ — пространство всех комплексных борелевских мер, заданных на сфере S_n . Пусть $K_{p,q}(z, \zeta)$ — воспроизводящее ядро для гильбертова пространства $H(p, q) \subset L^2(S)$. Полином

$$\mu_{p,q}(z) = \int_S K_{p,q}(z, \zeta) d\mu(\zeta), \quad z \in S,$$

называется $H(p, q)$ -проекцией меры $\mu \in M(S)$. Для $\mu \in M(S)$ спектр $\text{спес}(\mu)$ в терминах пространств $H(p, q)$ задается равенством

$$\text{спес}(\mu) = \{(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2 : \mu_{p,q} \neq 0\}.$$

2.2. Дезинтеграция в терминах срез-произведений. Пусть $\mathbb{T} = S_1$ — единичная окружность. Для $\xi \in S_n$ срез-произведение

$$\Pi_\xi(R, J, a)(\lambda) := \Pi(R(\lambda\xi), J, a), \quad \lambda \in \mathbb{T},$$

является классическим произведением Рисса, задаваемым формулой

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{a}_k \bar{R}_{j_k}(\xi) \bar{\lambda}^{j_k}}{2} + 1 + \frac{a_k R_{j_k}(\xi) \lambda^{j_k}}{2} \right), \quad \lambda \in \mathbb{T}. \quad (2.2)$$

Сходимость произведения (2.2) следует понимать в $\star$ -слабом смысле. В частности, $\Pi_\xi(R, J, a)$ — это корректно определенная вероятностная мера.

Пусть $\mathbb{CP}^{n-1}$ — комплексное проективное пространство размерности $n-1$, т.е. набор всех одномерных линейных подпространств пространства $\mathbb{C}^n$. Пусть $\pi = \pi_n$ — каноническая проекция из S_n на $\mathbb{CP}^{n-1}$. Заметим, что $\Pi_{\lambda\xi}(w) = \Pi_\xi(\lambda w)$ для $\xi \in S_n$, $\lambda, w \in \mathbb{T}$. Следовательно, вероятностная срез-мера Π_ζ корректно определена для $\zeta \in \mathbb{CP}^{n-1}$ как элемент из $M_+(S_n)$, носителем которого является единичная окружность $\pi^{-1}(\zeta) \subset S_n$.

Пусть $\widehat{\sigma}_n$ — единственная вероятностная мера на $\mathbb{CP}^{n-1}$, которая инвариантна относительно всех унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$. Следующая лемма показывает, что произведение $\Pi(R, J, a)$ — это интеграл от его срезов.

Лемма 2.1 ([6, лемма 1]). Пусть (R, J, a) — тройка Рисса на сфере S_n , $n \geq 2$, и пусть $\Pi(R, J, a)$ обозначает соответствующее произведение Рисса. Тогда

$$\Pi(R, J, a) = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}} \Pi_\zeta(R, J, a) d\widehat{\sigma}_n(\zeta)$$

в следующем слабом смысле:

$$\int_{S_n} f d\Pi(R, J, a) = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}} \int_{S_n} f d\Pi_\zeta(R, J, a) d\widehat{\sigma}_n(\zeta)$$

для всех $f \in C(S_n)$.

3. РАЗМЕРНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РИССА

3.1. Энергетическая размерность. Пусть $M_+(S_n)$ — множество всех конечных положительных борелевских мер на сфере S_n . Для меры $\mu \in M_+(S)$ ее t -энергия $I_t(\mu)$, $t > 0$, определяется равенством

$$I_t(\mu) := \int_S \int_S \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^t}.$$

Будем говорить, что d — энергетическая размерность меры μ и использовать обозначение $\dim_{\mathcal{E}} \mu = d$, если

$$d = \sup \{t : I_t(\mu) < \infty\}.$$

Для оценки энергетической размерности произведения $\Pi(R, J, a)$ потребуется следующая теорема.

Теорема 3.1 ([12, теорема 3.1]). *Для каждого числа t , $0 < t < 2n - 1$, существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что*

$$C_1 I_t(\mu) \leq \|\mu_{0,0}\|_2^2 + \sum_{j=1}^{\infty} j^{t-2n+1} \sum_{p+q=j} \|\mu_{p,q}\|_2^2 \leq C_2 I_t(\mu)$$

для всех $\mu \in M_+(S_n)$, где $n \geq 2$.

В работе [11] аналог теоремы 3.2 для единичной окружности использован для вычисления энергетической размерности классического произведения Рисса на окружности $\mathbb{T}$. В следующем результате применяется теорема 3.1, чтобы оценить снизу энергетическую размерность произведения Рисса на сфере. Используемое ниже основное рассуждение схоже с соответствующим рассуждением при доказательстве теоремы 3.1 из [11], однако технические детали отличаются.

Теорема 3.2. *Пусть (R, J, a) — тройка Рисса. Тогда*

$$\dim_{\mathcal{E}} \Pi(R, J, a) \geq 2n - 1 - \alpha_0,$$

где

$$\alpha_0 = \max \left[0, \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \frac{|a_k|^2}{2} + \sum_{\ell=1}^{k-1} \log \left(1 + \frac{|a_{\ell}|^2}{2} \right)}{\log j_k} \right) \right]. \quad (3.1)$$

В частности,

$$\dim_{\mathcal{E}} \Pi(R, J, a) \geq 2n - 1 - \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \log j_k} \sum_{\ell=1}^{k-1} |a_{\ell}|^2 \right).$$

Доказательство. Пусть $\Pi := \Pi(R, J, a)$. Для $k = 1, 2, \dots$ положим

$$\Gamma_k := \left\{ \pm j_k + \sum_{\ell=1}^{k-1} \varepsilon_{\ell} j_{\ell} : \varepsilon_{\ell} = 0, \pm 1 \right\}.$$

Пусть $\gamma \in \Gamma_k$. Не умаляя общности, предположим, что $\gamma > 0$. Тогда существует в точности одно представление

$$\gamma = j_k + \sum_{\ell=1}^{k-1} \varepsilon_{\ell} j_{\ell}.$$

В силу правила умножения для сферических гармоник (см. раздел 2.1) имеем

$$\sum_{p-q=\gamma} \Pi_{p,q} = R_{j_k} \prod_{\ell=1}^{k-1} R_{j_\ell}(\varepsilon_\ell),$$

где

$$\begin{aligned} R_{j_\ell}(\varepsilon_\ell) &= R_{j_\ell}, & \varepsilon_\ell &= 1, \\ R_{j_\ell}(\varepsilon_\ell) &= 1, & \varepsilon_\ell &= 0, \\ R_{j_\ell}(\varepsilon_\ell) &= \bar{R}_{j_\ell}, & \varepsilon_\ell &= -1. \end{aligned}$$

Применяя свойство (2.1), получаем

$$\sum_{p-q=\gamma} \|\Pi_{p,q}\|_2^2 = \left\| R_{j_k} \prod_{\ell=1}^{k-1} R_{j_\ell}(\varepsilon_\ell) \right\|_2^2 \leq \left(\frac{|a_k|}{2} \prod_{\ell: \varepsilon_\ell \neq 0} \frac{|a_\ell|}{2} \right)^2,$$

где пустое произведение равняется единице.

Теперь зафиксируем число $\alpha > \alpha_0$. Так как $p + q \geq p - q$, имеем

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_k} |p + q|^{-\alpha} \sum_{p-q=\gamma} \|\Pi_{p,q}\|_2^2 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_k} |\gamma|^{-\alpha} \sum_{p-q=\gamma} \|\Pi_{p,q}\|_2^2. \quad (3.2)$$

Если $\gamma \in \Gamma_k$, то $|\gamma| \approx j_k$. Следовательно,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_k} |\gamma|^{-\alpha} \sum_{p-q=\gamma} \|\Pi_{p,q}\|_2^2 \lesssim j_k^{-\alpha} \frac{|a_k|^2}{2} \prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 + \frac{|a_\ell|^2}{2} \right). \quad (3.3)$$

Объединяя свойства (3.2) и (3.3), получаем

$$I_{2n-1-\alpha}(\Pi) \lesssim 1 + j_k^{-\alpha} \frac{|a_k|^2}{2} \prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 + \frac{|a_\ell|^2}{2} \right) \quad (3.4)$$

в силу теоремы 3.1.

Имеем $\log j_k \geq (k-1) \log 3$, таким образом, выбирая число A , $0 < A < 1$, достаточно близко к единице, с помощью неравенства $\alpha > \alpha_0$ получаем, что

$$\alpha \geq \frac{\log \frac{|a_k|^2}{2} + \sum_{\ell=1}^{k-1} \log \left(1 + \frac{|a_\ell|^2}{2} \right) + k |\log A|}{\log j_k},$$

иными словами,

$$j_k^{-\alpha} \frac{|a_k|^2}{2} \prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 + \frac{|a_\ell|^2}{2} \right) \leq A^k.$$

Объединяя последнее свойство и (3.4), приходим к выводу, что

$$I_{2n-1-\alpha}(\Pi) < \infty.$$

Так как величина $\alpha > \alpha_0$ выбрана произвольно, окончательно имеем

$$\dim_{\mathcal{E}} \Pi \geq 2n - 1 - \alpha_0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

3.2. Хаусдорфова размерность. Для борелевского множества E символом $\dim_{\mathcal{H}} E$ обозначим его хаусдорфову размерность. Хаусдорфова размерность меры $\mu \in M_+(S_n)$ определяется равенством

$$\dim_{\mathcal{H}} \mu = \inf \{ \dim_{\mathcal{H}} E : E \text{ — борелевское множество такое, что } \mu(E) > 0 \}.$$

Свойства хаусдорфовой размерности меры излагаются в [9, гл. 10].

Для произведения Рисса $\Pi = \Pi(R, J, a)$ непосредственная проверка показывает, что существует достаточно малое число $\varepsilon > 0$ такое, что $\Pi_{p,q} = \mathbf{0}$ при условии

$$\left| \frac{p}{q} - 1 \right| < \varepsilon, \quad (p, q) \neq (0, 0).$$

Поэтому применение теоремы 1.1 из [3] к произведению Π гарантирует, что $\dim_{\mathcal{H}} \Pi \geq 2n - 2$. На самом деле, более точную оценку можно получить с помощью теоремы 3.2.

3.2.1. Применение теоремы 3.2. Если $I_t(\mu) < \infty$, то $\dim_{\mathcal{H}} \mu > t$ (ср. с [8, раздел 4.3]). Поэтому хаусдорфова размерность меры всегда не меньше ее энергетической размерности.

Следствие 3.1. Пусть (R, J, a) — тройка Рисса. Тогда

$$\dim_{\mathcal{H}} \Pi(R, J, a) \geq 2n - 1 - \alpha_0,$$

где величина α_0 задается равенством (3.1).

Доказательство. Так как $\dim_{\mathcal{H}} \Pi \geq \dim_{\mathcal{E}} \Pi$, достаточно применить теорему 3.2. $\square$

Замечание 3.1. Ясно, что теорема 1.1 — это частный случай сформулированного следствия.

3.2.2. Сведение задачи к срез-произведениям. Альтернативный подход к следствию 3.1 состоит в рассмотрении срез-произведений произведения $\Pi(R, J, a)$. Нам потребуется следующая теорема, которая следует из разделов 2.10.2 и 2.10.17 в монографии [10].

Теорема 3.3. Пусть $K \subset \mathbb{CP}^{n-1} \times \mathbb{T}$ — компакт и $K_{\zeta} = \{w \in \mathbb{T} : (\zeta, w) \in K\}$. Предположим, что $\dim_{\mathcal{H}} K_{\zeta} > \beta$ для $\zeta \in X \subset \mathbb{CP}^{n-1}$. Если $\widehat{\sigma}_n(X) > 0$, то

$$\dim_{\mathcal{H}} K \geq 2n - 2 + \beta.$$

Зафиксируем некоторое число $\alpha > \alpha_0$. Достаточно доказать, что

$$\dim_{\mathcal{H}} \Pi(R, J, a) \geq 2n - 1 - \alpha. \quad (3.5)$$

Предположим, что указанная оценка не выполняется. Тогда существует компакт $E \subset S_n$ такой, что $\Pi(E) > 0$ и

$$\dim_{\mathcal{H}} E < 2n - 1 - \alpha.$$

Отождествим сферу S_n и произведение $\mathbb{CP}^{n-1} \times \mathbb{T}$. Рассмотрим множества

$$E_{\zeta} = \{w \in \mathbb{T} : (\zeta, w) \in E\}.$$

Утверждается, что

$$\dim_{\mathcal{H}} E_{\zeta} \leq 1 - \alpha \quad \text{для } \widehat{\sigma}_n\text{-почти всех } \zeta \in \mathbb{CP}^{n-1}. \quad (3.6)$$

Действительно, если сформулированное свойство не выполнено, то

$$\dim_{\mathcal{H}} E_{\zeta} > 1 - \alpha \quad \text{для } \zeta \in X, \quad \text{где } \widehat{\sigma}_n(X) > 0.$$

Применяя теорему 3.3, получаем

$$\dim_{\mathcal{H}} E \geq 2n - 1 - \alpha,$$

что приводит к противоречию. Итак, свойство (3.6) выполнено.

Так как $\Pi(E) > 0$, лемма 2.1 гарантирует, что

$$\Pi_\zeta(E_\zeta) > 0 \quad \text{для} \quad \zeta \in Y_0, \quad \text{где} \quad \widehat{\sigma}_n(Y_0) > 0.$$

Объединяя этот факт и (3.6), получаем

$$\dim_{\mathcal{H}} \Pi_\zeta \leq 1 - \alpha \quad \text{для} \quad \zeta \in Y, \quad \text{где} \quad \widehat{\sigma}_n(Y) > 0. \quad (3.7)$$

Теперь напомним, что $\Pi_\zeta(R, J, a)$ — это классическое произведение Рисса, заданное формулой (2.2). Следовательно,

$$\dim_{\mathcal{H}} \Pi_\zeta(R, J, a) \geq 1 - \alpha_0 > 1 - \alpha$$

в силу теоремы 3.1 из [11]. Это противоречит свойству (3.7). Таким образом, свойство (3.5) имеет место для любого числа $\alpha > \alpha_0$, что и требовалось доказать.

Иными словами, рассмотрение срез-произведений позволяет получить следствие 3.1 с помощью теоремы 3.1 из [11], которая является соответствующим результатом о классических произведениях Рисса.

4. ХАУСДОРФОВЫ РАЗМЕРНОСТИ ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ МЕР

Этот раздел мотивирован аналогами леммы 2.1 и их приложениями при изучении плюригармонических мер.

4.1. Плюригармонические меры на единичной сфере. Мера $\mu \in M(S_n)$ называется плюригармонической, если

$$\text{spec}(\mu) \subset \{(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2 : pq = 0\}.$$

Аналог леммы 2.1 известен для плюригармонических мер на сфере S_n . Из этого факта следует, что $\dim_{\mathcal{H}} \mu \geq 2n - 2$ для любой плюригармонической меры $\mu \in M(S_n)$, дальнейшие детали можно найти в [1], [3]. Однако, насколько известно автору, точность указанной оценки остается открытым вопросом.

4.2. Плюригармонические меры на торе. Мера $\mu \in M(\mathbb{T}^n)$ называется плюригармонической, если $\hat{\mu}(k_1, \dots, k_n) = 0$ для $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus (\mathbb{Z}_-^n \cup \mathbb{Z}_+^n)$. Хорошо известно, что $\mu \in M(\mathbb{T}^n)$ — плюригармоническая мера тогда и только тогда, когда интеграл Пуассона меры μ — плюригармоническая функция в полидиске $\mathbb{D}^n$. Следовательно, аналог леммы 2.1 имеет место для каждой плюригармонической меры μ на $\mathbb{T}^n$. Действительно, см. доказательство предложения 2.1 в работе [2] для случая меры μ на единичной сфере S_n , см. также [5], где рассматриваются плюригармонические меры на границе Шилова круговой ограниченной симметричной области. Рассуждая как в случае сферы S_n , приходим к выводу, что

$$\dim_{\mathcal{H}} \mu \geq n - 1 \quad (4.1)$$

(см. также [5, следствие 3.3]). Для $n = 2$ оценка (4.1) и ее точность были ранее доказаны в работе [4]. Простые примеры показывают, что оценка (4.1) точна для всех $n \geq 2$. Действительно, положим

$$\mu = \delta_1(\xi_1) \otimes m(\xi_2) \otimes \dots \otimes m(\xi_n),$$

где δ_1 — мера Дирака в точке $1 \in \mathbb{T}$, а $m = \sigma_1$ — нормированная мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Ясно, что μ является плюригармонической мерой и

$$\dim_{\mathcal{H}} \mu = n - 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Б. Александров. *Теория функций в шаре* // Итоги науки тех., Сер. соврем. пробл. мат., Фундам. направления, 8, 115–190 (1985).
2. A.B. Aleksandrov, E. Doubtsov. *Clark measures on the complex sphere* // J. Funct. Anal. **278**:2, 108314 (2020). <https://doi.org/10.1090/proc/14846>
3. R. Ayoush, M. Wojciechowski. *Microlocal approach to the Hausdorff dimension of measures* // Adv. Math. **395**, 108088 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.108088>
4. L. Bergqvist. *Necessary conditions on the support of RP-measures* // J. Math. Anal. Appl. **540**:2, 128633 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128633>
5. M. Calzi. *Clark measures on bounded symmetric domains* // Complex Anal. Oper. Theory **18**:6, 132 (2024). <https://doi.org/10.1007/s11785-024-01571-9>
6. E. Doubtsov. *Mutual singularity of Riesz products on the unit sphere* // Proc. Amer. Math. Soc. **153**:1, 269–277 (2025). <https://doi.org/10.1090/proc/17036>
7. E. Doubtsov. *Henkin measures, Riesz products and singular sets* // Ann. Inst. Fourier **48**:3, 699–728 (1998). <https://doi.org/10.5802/aif.1635>
8. K. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, Chichester (1990).
9. K. Falconer. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons, Chichester (1997).
10. H. Federer. *Geometric measure theory*. Springer-Verlag, New York (1969).
11. K.E. Hare, M. Roginskaya. *A Fourier series formula for energy of measures with applications to Riesz products* // Proc. Amer. Math. Soc. **131**:1, 165–174 (2003). <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06826-0>
12. K.E. Hare, M. Roginskaya. *Multipliers of spherical harmonics and energy of measures on the sphere* // Ark. Mat. **41**:2, 281–294 (2003). <https://doi.org/10.1007/BF02390816>
13. W. Rudin. *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* . Springer-Verlag, New York (1980).
14. J. Ryll, P. Wojtaszczyk. *On homogeneous polynomials on a complex ball* // Trans. Am. Math. Soc. **276**:1, 107–116 (1983). <https://doi.org/10.2307/1999419>
15. A. Zygmund. *Trigonometric series. Vol. I, II*. Cambridge University Press, Cambridge (2002). <https://doi.org/10.1017/CBO9781316036587>

Евгений Сергеевич Дубцов,
 Санкт-Петербургское отделение
 Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
 наб. р. Фонтанки, 27,
 191023, г. Санкт-Петербург, Россия
 E-mail: dubtsov@pdmi.ras.ru