УДК 517.5

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ИНТЕГРАЛА ТИПА РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ

П.Г. ПОЦЕЙКО, Е.А. РОВБА

Аннотация. Исследуются рациональные аппроксимации функций, задаваемых интегралом типа Римана — Лиувилля на отрезке $[-1,1]$ с плотностью, принадлежащей некоторым классам непрерывных функций. В качестве аппарата приближений выступает интеграл типа Римана — Лиувилля с плотностью, представляющей собой рациональный интегральный оператор Фурье — Чебышёва. Найдены оценки сверху приближений интеграла типа Римана — Лиувилля с ограниченной плотностью, зависящие от полюсов и положения точки на отрезке.

Отдельной задачей изучаются приближения интегралов типа Римана — Лиувилля с плотностью, являющейся функцией со степенной особенностью. Получены равномерные оценки сверху приближений с определенной мажорантой, зависящей от положения точки на отрезке. Найдено асимптотическое выражение этой мажоранты, зависящее от полюсов аппроксимирующей рациональной функции. Исследован случай, когда полюсы представляют собой некоторые модификации «ньюменовских» параметров. Устанавливаются оптимальные значения параметров, при которых приближения имеют наибольшую скорость убывания. Скорость наилучших рациональных аппроксимаций рассматриваемым методом является выше в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Ключевые слова: интеграл Римана — Лиувилля, рациональный интегральный оператор Фурье — Чебышёва, равномерная рациональная аппроксимация, асимптотические оценки, метод Лапласа.

Mathematics Subject Classification: 53A04, 52A40, 52A10

1. Введение

Оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля [14]

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f(\tau)\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, нашел широкое применение в различных областях науки и техники [2], [5]. Ряд задач механики жидкости, химии, физики и других научных направлений описываются моделями с помощью математических инструментов из теории

P.G. Potseiko, Y.A. Rovba, On one method of rational approximations of Riemann — Liouville type integral on segment.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269 (Республика Беларусь).

Поступила 5 мая 2024 г.

дробного исчисления. Как правило, аналитическое решение этих задач является затруднительным, поэтому актуальными являются разработки приближенных методов решения [25], [23], [26], [28].

Функции, представимые интегралом Римана — Лиувилля, широко используются в теории как полиномиальной [6], [20], так и рациональной аппроксимации [16], [10], [18], [17], [13]. С их помощью были найдены новые классы непрерывных функций, скорость равномерной рациональной аппроксимации на которых является выше соответствующих полиномиальных аналогов. Вместе с тем в аппроксимации интегралов Римана — Лиувилля ряды Фурье используются эпизодически.

В рациональной аппроксимации нашли применение интегральные операторы Фейера, Джексона, Валле Пуссена [12], [11], [19], являющиеся аналогами известных полиномиальных периодических операторов, основанных на рядах Фурье и методах их суммирования. В 1979 году Е.А. Ровба [9] ввел интегральный оператор на отрезке $[-1,1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва — Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье — Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо являются действительными и $|a_k|<1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,1]$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор Фурье — Чебышёва порядка не выше n (см. [9]):

$$s_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\lambda_n(u,v)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv,\quad x=\cos u, \tag{1.1}$$

где

$$\lambda_n(u,v)=\int\limits_u^v \lambda_n(y)\,dy,\qquad \lambda_n(y)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\frac{1-|\alpha_k|^2}{1+2|\alpha_k|\cos(y-\arg\alpha_k)+|\alpha_k|^2},$$
$$\alpha_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}}.$$

Причем выбирается та ветвь корня, что $|\alpha_k|<1$. Оператор $s_n: f\to\mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ — множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^n(1+a_kx)},\qquad p_n(x)\in\mathbb{P}_n,$$

$A=(a_1,\ldots,a_n)$, и $s_n(1,x)\equiv 1$. Если $a_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$, то оператор $s_n(\cdot,\cdot)$, представляет собой интеграл Дирихле полиномиального ряда Фурье — Чебышёва.

Т.Ю. Горской, А.Ф. Галимяновым [3], [24] разработаны методы приближенного вычисления интеграла Римана — Лиувилля на вещественной оси при помощи ортогональных рядов Фурье. Особенностью этих исследований был подход, основанный на представлении плотности интеграла Римана — Лиувилля рядом Фурье. Такой способ аппроксимации интеграла Римана — Лиувилля, на наш взгляд, мало исследован и представляет научный интерес. В работе [8] были введены и исследованы аппроксимации интеграла типа Римана — Лиувилля на отрезке $[-1,1]$ методом, основанным на представлении его плотности частичными суммами полиномиального ряда Фурье — Чебышёва. Установлено интегральное представление приближений и получены оценки поточечных и равномерных приближений в случае, когда плотность принадлежит некоторым классам непрерывных функций на отрезке.

Целью настоящей работы является исследование рациональных аппроксимаций интеграла типа Римана — Лиувилля на отрезке $[-1,1]$ методом, основанным на представлении его плотности рациональным интегральным оператором Фурье — Чебышёва (1.1). Получено интегральное представление приближений и их поточечные и равномерные оценки. Установлена зависимость оценок от выбора полюсов аппроксимирующей функции. Найдены оценки равномерных рациональных приближений в случае когда полюсы представляют собой некоторые модификации «ньюменовских» параметров.

2. Интеграл Римана — Лиувилля на отрезке

Рассмотрим класс функций вида

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\qquad x\in[-1,1],\qquad r\in[1,+\infty). \tag{2.1}$$

Очевидно, что интеграл справа представляет собой интеграл типа Римана — Лиувилля на отрезке $[-1,1]$ с плотностью $\varphi(t)\in C[-1,1]$. Нетрудно показать, что из (2.1) следует

$$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}f^{(r)}(x),\qquad r=1,2,\ldots.$$

Предположим, что плотность интеграла (2.1) представляется рациональным интегральным оператором Фурье — Чебышёва (1.1). Тогда оператор

$$\tilde{s}_n(\varphi,x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}s_n(\varphi,t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\qquad x\in[-1,1], \tag{2.2}$$

задает некоторую функцию, являющуюся рациональной при $r=1,2,\ldots$, с теми же полюсами, что и $s_n(\varphi,t)$. Введем обозначение

$$\begin{aligned}&\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)=f(x)-\tilde{s}_n(\varphi,x),\qquad x\in[-1,1],\\&\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,A)=\|f(x)-\tilde{s}_n(\varphi,x)\|_{C[-1,1]},\qquad n\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Будем полагать, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_p=0$, $p=[r-1]$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть от числа. Исследуем величину $\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)$. Имеет место

Теорема 2.1. *При любом $r\in[1,+\infty)$ для приближений интеграла типа Римана — Лиувилля (2.1) на отрезке $[-1,1]$ оператором (2.2) имеет место интегральное представление*

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)=&\frac{2^{1-r}}{\pi\Gamma(r)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos v)\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{r-1}t^{1-r}\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{t^2+2t|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}{1+2t|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2t^2}}\\&\cdot\frac{(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2t\cos(v-u)+t^2}}\sin\psi_n(x,t,v)\,dt\,dv,\quad x=\cos u,\ \theta_k=\arg\alpha_k,\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\psi_n(x,t,v)=\arg\frac{(\xi t-\bar{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(t-\zeta\bar{\xi})\omega(\zeta)},\qquad \omega(\zeta)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta+\alpha_k}{1+\alpha_k\zeta},\qquad \xi=\mathrm{e}^{iu},$$

$\Gamma(\cdot)$ — *гамма-функция Эйлера.*

Доказательство. Известно [9], что для рационального интегрального оператора Фурье — Чебышёва справедливо представление

$$s_n(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(\cos v) D_n(v,\tau)\, dv, \quad t = \cos\tau, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2.5}$$

где

$$D_n(v,\tau) = \frac{\zeta\dfrac{\omega(\zeta)}{\omega(z)} - z\dfrac{\omega(z)}{\omega(\zeta)}}{\zeta - z} + \frac{\zeta z\omega(\zeta)\omega(z) - \dfrac{1}{\omega(\zeta)\omega(z)}}{\zeta z - 1}, \quad z = \mathrm{e}^{i\tau}, \quad \zeta = \mathrm{e}^{iv},$$

функция $\omega(\cdot)$ определена в формулировке настоящей теоремы. Подставим указанное представление в (2.2) и, воспользовавшись теоремой Фубини, поменяем порядок интегрирования. Тогда

$$\tilde{s}_n(\varphi, x) = \frac{1}{2\pi\Gamma(r)}\int\limits_0^\pi \varphi(\cos v) I_n(v,x)\, dv, \quad x \in [-1, 1], \tag{2.6}$$

где

$$I_n(v,x) = \int\limits_{-1}^x (x-t)^{r-1} D_n(v,\tau)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t = \cos\tau.$$

Преобразуем внутренний интеграл $I_n(v,x)$. Выполнив замену переменного по формуле $t = \cos\tau$, получим

$$I_n(v,x) = \int\limits_u^\pi (\cos u - \cos\tau)^{r-1} D_n(v,\tau)\, d\tau, \quad x = \cos u.$$

Подынтегральная функция четная, поэтому

$$I_n(v,x) = \frac{1}{2}\int\limits_{[-\pi,-u]\sqcup[u,\pi]} (\cos u - \cos\tau)^{r-1} D_n(v,\tau)\, d\tau, \quad x = \cos u.$$

Переходя в интеграле справа к интегрированию по переменной z, $z = \mathrm{e}^{i\tau}$, будем иметь

$$I_n(v,x) = \frac{(-1)^{r-1}}{2^r i}\int\limits_\Gamma (z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1} z^{1-r} D_n(v,\tau)\frac{dz}{z}, \quad \xi = \mathrm{e}^{iu},$$

где Γ — дуга единичной окружности от точки ξ до точки $1/\xi$, обходимая против часовой стрелки (см. рис. 1).

Очевидно, что $I_n(v,x)$ при фиксированном значении параметра v представляет собой некоторую функцию параметра x с полюсами первого порядка в точках (см. (1.1))

$$a_k = -\left(\frac{2z_k}{(1+z_k^2)}\right)^{-1}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому достаточно исследовать интеграл $I_n(x,v,\rho)$, отличающийся от $I_n(x,v)$ тем, что $\zeta = \rho\mathrm{e}^{iv}$, $\rho \in (0,1)$, и затем воспользоваться равенством

$$I_n(v,x) = \lim_{\rho\to 1} I_n(v,x,\rho). \tag{2.7}$$

Представим интеграл в $I_n(v,x,\rho)$ в виде суммы четырех интегралов

$$I_n(v,x,\rho) = \frac{(-1)^{r-1}}{2^r i}\left[\overline{\omega(\zeta)}J_1 - \zeta\omega(\zeta)J_2 + \omega(\zeta)J_3 - \overline{\zeta\omega(\zeta)}J_4\right], \tag{2.8}$$

где

$$J_1 = \int\limits_{\Gamma} \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r}}{z-\zeta}\omega(z)\,dz, \qquad J_2 = \int\limits_{\Gamma} \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}}{(z-\zeta)z^r\omega(z)}\,dz,$$

$$J_3 = \int\limits_{\Gamma} \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r}}{z-\frac{1}{\zeta}}\omega(z)\,dz, \qquad J_4 = \int\limits_{\Gamma} \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}}{(z-\frac{1}{\zeta})z^r\omega(z)}\,dz.$$

Отметим, что в случае, когда параметр r, $r \in (1, +\infty)$, не является натуральным, подынтегральные функции каждого из интегралов имеют точки ветвления $z = 0$, $z = \xi$, $z = \overline{\xi}$ и $z = \infty$. Если же $r = 1, 2, \ldots$, то подынтегральные функции представляют собой рациональные функции от переменного интегрирования и рассуждения в этом случае являются более простыми. Поскольку, очевидно, приближения (2.3) будут иметь при этом аналогичное интегральное представление, однозначные ветви многозначных функций будем выделять только если $r \in (1, +\infty)\backslash\mathbb{N}$.

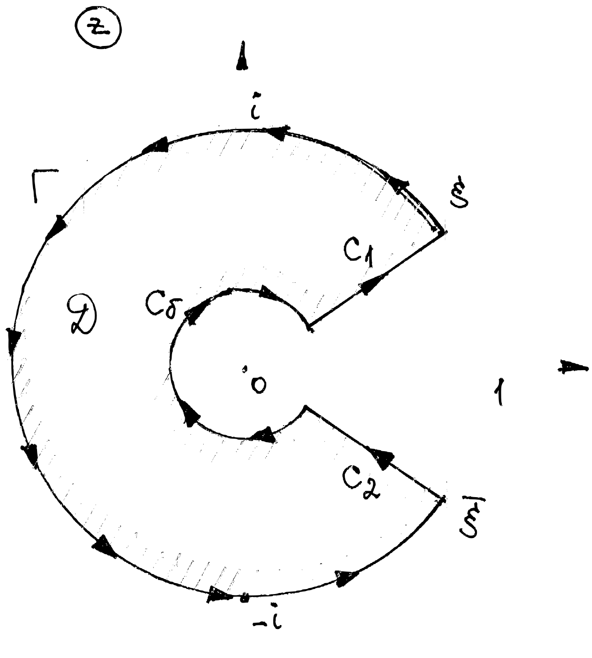

Рис. 1. Контур C для интеграла J_1.

Преобразуем каждый из четырех интегралов в (2.8) по отдельности. Исследуем интеграл J_1. Зафиксируем параметр ξ и рассмотрим область, ограниченную контуром (рис. 1)

$$C = C_1 \cup \Gamma \cup C_2^- \cup C_\delta^-,$$

где

$$C_1 = \{z : z = \xi t,\ t \in [\delta, 1]\}, \qquad C_2 = \left\{z : z = \overline{\xi} t,\ t \in [\delta, 1]\right\},$$
$$C_\delta = \left\{z : z = \delta \mathrm{e}^{i\tau},\ \tau \in [\theta, 2\pi - \theta]\right\}.$$

В указанной области функция $g_r(z,\xi) = (z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r}$, распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g_a(1, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}) = \mathrm{e}^{i\pi(2k-1)(r-1)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Выделив ту ветвь, для которой выполняется условие $g_a^*(1, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}) = (-1)^{r-1}$, применим к интегралу J_1 теорему Коши о вычетах. Тогда

$$\left(\int\limits_{C_1} + \int\limits_{\Gamma} + \int\limits_{C_2^-} + \int\limits_{C_\delta^-}\right) \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r}}{z-\zeta}\omega(z)\,dz = 2\pi i\omega(\zeta)r(\zeta,\xi),$$

где

$$r(\zeta,\xi)=\begin{cases}(\zeta-\xi)^{r-1}(\zeta-\overline{\xi})^{r-1}\zeta^{1-r}, & \zeta\in\mathfrak{D},\\ 0, & \zeta\notin\mathfrak{D}.\end{cases}$$

Рассмотрим интеграл по дуге C_δ. Выполнив замену переменного по формуле $z=\delta \mathrm{e}^{i\tau}$, нетрудно получить, что

$$\int\limits_{C_\delta}\frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r}}{z-\zeta}\omega(z)\,dz$$

$$=i\delta^{p+2-r}\int\limits_{-u}^{u}\frac{(\delta\mathrm{e}^{i\tau}-\xi)^{r-1}(\delta\mathrm{e}^{i\tau}-\overline{\xi})^{r-1}\mathrm{e}^{(p+2-r)i\tau}}{\delta\mathrm{e}^{i\tau}-\zeta}\prod_{k=p+1}^{n}\frac{\delta\mathrm{e}^{i\tau}+\alpha_k}{1+\alpha_k\delta\mathrm{e}^{i\tau}}\,d\tau.$$

Поскольку по условию $p+2-r>0$, при $\delta\to 0$ приходим к асимптотическому равенству

$$\int\limits_{C_\delta}\frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r}}{z-\zeta}\omega(z)\,dz\sim-\frac{2i\sin(p+2-r)u}{\zeta}\delta^{p+2-r}\prod_{k=p+1}^{n}\alpha_k\xrightarrow[\delta\to 0]{}0.$$

При этом находим, что

$$\int\limits_{0}^{\xi}\frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r}}{z-\zeta}\omega(z)\,dz+J_1+\int\limits_{\overline{\xi}}^{0}\frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r}}{z-\zeta}\omega(z)\,dz=2\pi i\omega(\zeta)r(\zeta,\xi),$$

где первый и третий интегралы берутся по соответствующим лучам комплексной плоскости.

Выполнив в первом интеграле замену переменного по формуле $z=\xi t$, а в третьем $z=\overline{\xi}t$, придем к выражению

$$J_1=-\int\limits_{0}^{1}(t-1)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{\xi(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}}{\xi t-\zeta}\omega(\xi t)-\frac{\overline{\xi}(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}}{\overline{\xi}t-\zeta}\omega(\overline{\xi}t)\right]dt+2\pi i\omega(\zeta)r(\zeta,\xi). \quad (2.9)$$

Исследуем интеграл J_2. Как и прежде зафиксируем ξ и рассмотрим область D, ограниченную контуром (рис. 2)

$$C=C_1\cup C_R\cup C_2^-\cup\Gamma^-,$$

где

$$C_1=\{z:z=\xi t,\ t\in[1,R]\},\quad C_2=\left\{z:z=\overline{\xi}t,\ t\in[1,R]\right\},$$
$$C_R=\left\{z:z=R\mathrm{e}^{i\tau},\ \tau\in[\theta,2\pi-\theta]\right\}.$$

В указанной области функция

$$g_r(z,\xi)=(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}z^{1-r},$$

распадается на регулярные ветви. Рассуждая как и в случае с интегралом J_1, выделим ее однозначную ветвь. Применив в отношении интеграла J_2 интегральную теорему Коши, получим

$$\left(\int\limits_{C_1}+\int\limits_{C_R}+\int\limits_{C_2^-}+\int\limits_{\Gamma^-}\right)\frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}}{(z-\zeta)z^r\omega(z)}\,dz=0. \quad (2.10)$$

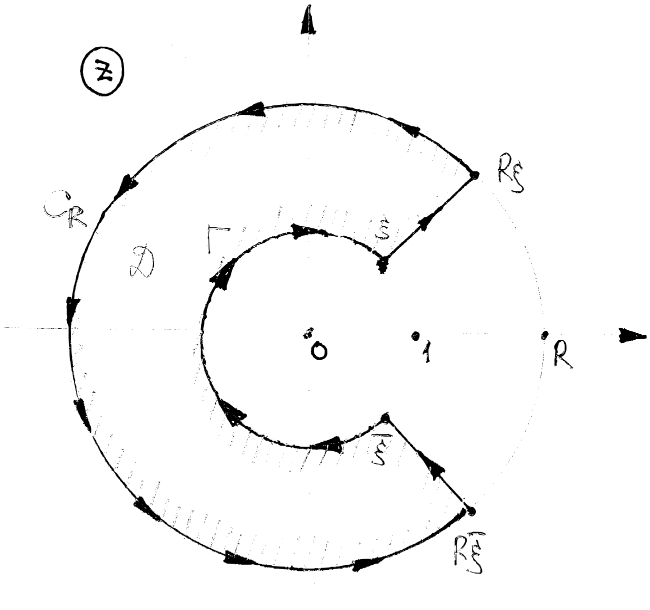

Рис. 2. Контур C для интеграла J_2.

Рассмотрим интеграл по дуге C_R. Выполнив замену переменного интегрирования по формуле $z = R\mathrm{e}^{i\tau}$, будем иметь

$$\int\limits_{C_R} \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}}{(z-\zeta)z^r\omega(z)}\,dz = \int\limits_{u}^{-u} \frac{(R\mathrm{e}^{i\tau}-\xi)^{r-1}(R\mathrm{e}^{i\tau}-\overline{\xi})^{r-1}}{(R\mathrm{e}^{i\tau}-\zeta)(R\mathrm{e}^{i\tau})^r\omega(R\mathrm{e}^{i\tau})}\,Ri\mathrm{e}^{i\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{i}{R^{p+2-r}} \int\limits_{u}^{-u} \frac{\left(\mathrm{e}^{i\tau}-\frac{\xi}{R}\right)^{r-1}\left(\mathrm{e}^{i\tau}-\frac{\overline{\xi}}{R}\right)^{r-1}}{\left(\mathrm{e}^{i\tau}-\frac{\zeta}{R}\right)\mathrm{e}^{i\tau(r-1)}} \prod_{k=p+1}^{n} \frac{\frac{1}{R}+\alpha_k\mathrm{e}^{i\tau}}{\mathrm{e}^{i\tau}+\frac{\alpha_k}{R}}\,d\tau.$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, с учетом неравенства $p+2-r>0$, получим

$$\int\limits_{C_R} \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}}{(z-\zeta)z^r\omega(z)}\,dz \sim -\frac{2i}{(2-r)R^{p+2-r}}\sin((p+2-r)\theta)\prod_{k=p+1}^{n}\alpha_k \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

При этом из (2.10) находим, что

$$\int\limits_{\xi}^{+\xi\infty} \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}}{(z-\zeta)z^r\omega(z)}\,dz + \int\limits_{+\overline{\xi}\infty}^{\overline{\xi}} \frac{(z-\xi)^{r-1}(z-\overline{\xi})^{r-1}}{(z-\zeta)z^r\omega(z)}\,dz - J_2 = 0,$$

где первый и второй интегралы берутся по соответствующим лучам комплексной плоскости. Выполнив в первом и втором интегралах замены соответственно $z=\xi t$ и $z=\overline{\xi}t$, получим

$$J_2 = \int\limits_{1}^{+\infty}(t-1)^{r-1}t^{-r}\left[\frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}}{(\xi t-\zeta)\omega(\xi t)} - \frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}}{(\overline{\xi}t-\zeta)\omega(\overline{\xi}t)}\right]dt.$$

После еще одной замены переменного по формуле $t\mapsto 1/t$, будем иметь

$$J_2 = (-1)^{1-r}\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)}{\xi-\zeta t} - \frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{\overline{\xi}-\zeta t}\right]dt. \qquad (2.11)$$

Рассуждая в отношении интегралов J_3 и J_4 аналогичным образом, как и в случаях с предыдущими интегралами, заключаем, что

$$J_3 = -\int_0^1 (t-1)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{\xi(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{\xi t-\frac{1}{\zeta}} - \frac{\overline{\xi}(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)}{\overline{\xi}t-\frac{1}{\zeta}}\right]dt, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} J_4 =&(-1)^{r-1}\int_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)}{\xi-\frac{t}{\zeta}} - \frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{\overline{\xi}-\frac{t}{\zeta}}\right]dt \\ &-2\pi i\zeta\omega(\zeta)r(\zeta,\xi). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Из представления (2.8) с учетом найденных представлений (2.9), (2.11), (2.12) и (2.13) получим

$$\begin{aligned} I_n(v,x,\rho) = &-\frac{1}{2^r i}\int_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{\xi(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(\xi t-\zeta)\omega(\zeta)} - \frac{\overline{\xi}(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)}{(\overline{\xi}t-\zeta)\omega(\zeta)}\right. \\ &+\frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)\zeta\omega(\zeta)}{\xi-\zeta t} - \frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)\zeta\omega(\zeta)}{\overline{\xi}-\zeta t} \\ &+\frac{\xi(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)\omega(\zeta)}{\xi t-\frac{1}{\zeta}} - \frac{\overline{\xi}(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)\omega(\zeta)}{\overline{\xi}t-\frac{1}{\zeta}} \\ &\left.+\frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)}{(\xi-\frac{t}{\zeta})\zeta\omega(\zeta)} - \frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{\left(\overline{\xi}-\frac{t}{\zeta}\right)\zeta\omega(\zeta)}\right]dt + 2\pi r_1(u,v), \end{aligned}$$

где

$$r_1(u,v) = \begin{cases} (\cos u-\cos v)^{r-1}, & |u|<v, \\ 0, & |u|>v. \end{cases}$$

После соответствующих преобразований, последний интеграл приводится к виду

$$\begin{aligned} I_n(v,x,\rho) = &-\frac{2^{1-r}}{i}\int_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(t-\zeta\overline{\xi})\omega(\zeta)} - \frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)}{(t-\zeta\xi)\omega(\zeta)}\right. \\ &\left.-\frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\overline{\xi}t)}{t-\overline{\zeta}\xi} + \frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\xi t)}{t-\overline{\zeta\xi}}\right]dt + 2\pi r_1(u,v),\ \zeta=\rho e^{iv}, \xi=e^{iu}. \end{aligned}$$

Выражение, находящееся в квадратных скобках подынтегрального выражения, при любом фиксированном $t\in(0,1)$ непрерывно по переменному ζ, поэтому справедлив предельный переход (2.7). При этом из представления (2.6) будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n(\varphi,x) = &-\frac{1}{2^r\pi i\Gamma(r)}\int_0^\pi \varphi(\cos v)\int_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(t-\zeta\overline{\xi})\omega(\zeta)} - \frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)}{(t-\zeta\xi)\omega(\zeta)}\right. \\ &\left.-\frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\overline{\xi}t)}{t-\overline{\zeta}\xi} + \frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\xi t)}{t-\overline{\zeta\xi}}\right]dt\,dv \\ &+\frac{1}{\Gamma(r)}\int_u^\pi \varphi(\cos v)(\cos u-\cos v)^{r-1}\,dv, \quad x\in[-1,1]. \end{aligned}$$

Второй интеграл справа представляет собой интеграл типа Римана — Лиувилля (2.1). Отсюда и из соотношения (2.3) следует, что

$$\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)=\frac{1}{2^r\pi i\Gamma(r)}\int\limits_0^\pi \varphi(\cos v)\int\limits_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{(\xi t-\bar{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(t-\zeta\bar{\xi})\omega(\zeta)}-\frac{(\bar{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\bar{\xi}t)}{(t-\zeta\xi)\omega(\zeta)}\right.$$
$$\left.-\frac{(\bar{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\bar{\xi}t)}{t-\bar{\zeta}\xi}+\frac{(\xi t-\bar{\xi})^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\xi t)}{t-\overline{\zeta\xi}}\right]dt\,dv,\quad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u.$$

Представим внешний интеграл в виде суммы двух интегралов соответственно слагаемым в квадратной скобке подынтегрального выражения и затем после простой замены переменного $v\mapsto -v$ придем к выражению

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)=&\frac{1}{2^r\pi i\Gamma(r)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos v)\\ &\cdot\int\limits_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}\left[\frac{(\xi t-\bar{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(t-\zeta\bar{\xi})\omega(\zeta)}-\frac{(\bar{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\bar{\xi}t)}{t-\bar{\zeta}\xi}\right]dt\,dv.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Выражения в квадратных скобках являются взаимно комплексно–сопряженными, и, чтобы прийти к (2.4) достаточно выполнить в найденном интегральном представлении несложные преобразования. Теорема 2.1 доказана. □

В теореме 2.1 положим значения параметров $\alpha_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$. В этом случае $A=(0,0,\ldots,0)=O$, и величина $\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,O)=\tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi,x)$ представляет собой приближения интеграла типа Римана — Лиувилля (2.1) оператором, являющимся образом частичных сумм полиномиального ряда Фурье — Чебышёва при преобразовании (2.2). В этом случае справедливо

Следствие 2.1. *Имеет место интегральное представление*

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi,x)=&\frac{2^{1-r}}{\pi\Gamma(r)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos v)\int\limits_0^1(1-t)^{r-1}t^{n+1-r}\frac{(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2t\cos(v-u)+t^2}}\\ &\cdot\sin\left(n(u-v)+\arg\frac{(\xi t-\bar{\xi})^{r-1}}{t-\zeta\bar{\xi}}\right)dt\,dv,\qquad \xi=\mathrm{e}^{iu},\qquad x=\cos u.\end{aligned}$$

Последнее интегральное представление содержится в [8].

Теорема 2.2. *Если* $\max\limits_{|x|\leqslant 1}|\varphi(x)|=K$, *и полюсы аппроксимирующей рациональной функции удовлетворяют условию*

$$\sigma_n(A)=\sum_{k=1}^n(1-|\alpha_k|)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty,\tag{2.15}$$

то для любого $r\in(1,+\infty)$ *при* $n\to\infty$ *справедливы оценки сверху*

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)|\leqslant\frac{2K(\sqrt{1-x^2})^{r-1}\ln\sigma_n(A)}{\pi[\sigma_n(A)]^r}+O\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^{r-1}}{[\sigma_n(A)]^r}\right),\tag{2.16}$$

если $x\in(-1,1)$, *и*

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,1,A)|\leqslant\frac{2^{2-r}K\Gamma(2r-1)}{\pi\Gamma(r)}\frac{\ln\sigma_n(A)}{[\sigma_n(A)]^{2r-1}}+O\left(\frac{1}{[\sigma_n(A)]^{2r-1}}\right),\tag{2.17}$$

при $x=1$.

Доказательство. Отметим, что выполнение условия (2.15) является необходимым и достаточным [1] для полноты системы рациональных функций $\{1/(z-\alpha_k)\}_{k=1}^{+\infty}$. Воспользуемся интегральным представлением приближений (2.4). Из 2π–периодичности подынтегральной функции внешнего интеграла по переменному v следует, что

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)| \leqslant \frac{2^{1-r}K}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{t^2+2t|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}{1+2t|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2t^2}}$$
$$\cdot\frac{(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2t\cos v+t^2}}|\sin\psi_n(x,t,v+u)|\,dt\,dv, \quad x=\cos u,\ \theta_k=\arg\alpha_k,$$

где $\psi_n(x,t,v+u)$ и $\omega(\zeta)$ определены в теореме 2.1.

Оценим корень подынтегрального выражения. Применив с этой целью метод, предложенный в [22], получим

$$\begin{aligned}\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{t^2+2t|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}{1+2t|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2t^2}} &\leqslant \sqrt{\prod_{k=1}^{n}\left(1-(1-t^2)(1-|\alpha_k|)\frac{1+|\alpha_k|}{(1+|\alpha_k|t)^2}\right)}\\ &\leqslant \sqrt{\prod_{k=1}^{n}(1-(1-t^2)(1-|\alpha_k|))}\\ &\leqslant e^{\frac{1}{2}(t^2-1)\sigma_n(A)}, \quad n=1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{2.18}$$

где последнее неравенство следует из того факта, что $1-t\leqslant e^{-t}$ для всех t. Представив внешний интеграл в виде суммы трех интегралов по промежуткам

$$\left[0,\frac{1}{\sigma_n(A)}\right], \quad \left[\frac{1}{\sigma_n(A)},2\pi-\frac{1}{\sigma_n(A)}\right] \quad \text{и} \quad \left[2\pi-\frac{1}{\sigma_n(A)},2\pi\right],$$

будем иметь

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)| \leqslant \frac{2^{1-r}K}{\pi\Gamma(r)}\left(I_n^{(1)}+I_n^{(2)}+I_n^{(3)}\right), \tag{2.19}$$

где

$$I_n^{(1)} = \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma_n(A)}}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}t^{1-r}(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2t\cos v+t^2}}e^{\frac{1}{2}(t^2-1)\sigma_n(A)}|\sin\psi_n(x,t,v+u)|\,dt\,dv,$$

$$I_n^{(2)} = \int\limits_{\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{2\pi-\frac{1}{\sigma_n(A)}}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}t^{1-r}(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2t\cos v+t^2}}e^{\frac{1}{2}(t^2-1)\sigma_n(A)}|\sin\psi_n(x,t,v+u)|\,dt\,dv,$$

$$I_n^{(3)} = \int\limits_{2\pi-\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}t^{1-r}(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2t\cos v+t^2}}e^{\frac{1}{2}(t^2-1)\sigma_n(A)}|\sin\psi_n(x,t,v+u)|\,dt\,dv.$$

Исследуем каждый из трех интегралов по отдельности. Так, для интеграла $I_n^{(1)}$ справедлива оценка

$$I_n^{(1)} \leqslant \frac{1}{\sigma_n(A)}\int\limits_0^1 (1-t)^{r-2}t^{1-r}(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}e^{\frac{1}{2}(t^2-1)\sigma_n(A)}\,dt, \quad r\in(1,+\infty).$$

Для исследования интеграла справа воспользуемся методом Лапласа [4], [21]. Функция $S(t) = \frac{t^2-1}{2}$ возрастает при $t \in (0,1)$, и, значит, достигает своего максимального значения при $t = 1$. Учитывая асимптотические равенства $S(t) \sim t-1$,

$$(1-t)^{r-2} t^{1-r} (1 - 2t\cos 2u + t^2)^{\frac{r-1}{2}} \sim (2\sin u)^{r-1}(1-t)^{r-2},$$

справедливые при $t \to 1$, для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ находим

$$I_n^{(1)} \leqslant \frac{(2\sin u)^{r-1}}{\sigma_n(A)} (1+o(1)) \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} (1-t)^{r-2} \mathrm{e}^{(t-1)\sigma_n(A)}\, dt, \quad n \to \infty.$$

Выполнив необходимые преобразования интеграла справа, с учетом условия (2.15) нетрудно получить, что

$$I_n^{(1)} \leqslant \frac{(2\sin u)^{r-1}\Gamma(r-1)}{[\sigma_n(A)]^r}(1+o(1)), \quad n \to \infty. \tag{2.20}$$

Рассмотрим интеграл $I_n^{(3)}$. После замены переменного интегрирования по формуле $v \mapsto 2\pi - v$, придем к выражению

$$I_n^{(3)} = \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma_n(A)}} \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{r-1} t^{1-r}(1-2t\cos 2u + t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2t\cos v + t^2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t^2-1)\sigma_n(A)} |\sin \psi_n(x,t,u-v)|\, dt\, dv.$$

Отсюда следует, что интеграл $I_n^{(3)}$ будет иметь оценку аналогичную с $I_n^{(1)}$, то есть

$$I_n^{(3)} \leqslant \frac{(2\sin u)^{r-1}\Gamma(r-1)}{[\sigma_n(A)]^r}(1+o(1)), \quad n \to \infty. \tag{2.21}$$

Наконец, изучим интеграл $I_n^{(2)}$. Представим его в виде

$$I_n^{(2)} = \left(\int\limits_{\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi - \frac{1}{\sigma_n(A)}} \right) \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{r-1} t^{1-r}(1-2t\cos 2u + t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2t\cos v + t^2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t^2-1)\sigma_n(A)} |\sin \psi_n(x,t,v+u)|\, dt\, dv.$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть первый из них поскольку после замены $v \mapsto 2\pi - v$, точно также доказывается, что второй интеграл будет иметь такую же оценку. Воспользовавшись методом Лапласа для исследования асимптотического поведения при $n \to \infty$ внутреннего интеграла, находим, что

$$J_n^{(2)} = \frac{(2\sin u)^{r-1}\Gamma(r)}{2\sin\frac{v}{2}[\sigma_n(A)]^r} \left| \sin\left(\arg(\xi - \overline{\xi})^{r-1} - \arg(1-\zeta) - \arg\frac{\omega(\xi\zeta)}{\omega(\xi)} \right) \right| (1+o(1)),$$

где $\xi = \mathrm{e}^{iu}$, $\zeta = \mathrm{e}^{iv}$.

Учитывая, что

$$\arg(\xi - \overline{\xi})^{r-1} = \frac{\pi}{2}(r-1), \qquad \arg(1-\zeta) = -\frac{\pi}{2} + \frac{v}{2},$$

$$\arg\frac{\omega(\xi\zeta)}{\omega(\xi)} = \int\limits_u^{v+u} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1+2|\alpha_k|\cos(y - \arg\alpha_k) + |\alpha_k|^2}\, dy,$$

приходим к оценке

$$I_n^{(2)} \leqslant \frac{(2\sin u)^{r-1}\Gamma(r)}{[\sigma_n(A)]^r}(1+o(1)) \int\limits_{\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\lambda_n(u,v+u)-\frac{\pi r}{2}\right)\right|}{\sin\frac{v}{2}}\,dv,$$

где $\lambda_n(u,v+u)$ из (1.1).

Поскольку

$$\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}=O(t), \qquad t\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

имеем

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\lambda_n(u,v+u)-\frac{\pi r}{2}\right)\right|}{\sin\frac{v}{2}}\,dv = \int\limits_{\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\lambda_n(u,v+u)-\frac{\pi r}{2}\right)\right|}{v}\,dv+O(1),$$

и, следовательно,

$$I_n^{(2)} \leqslant \frac{2(2\sin u)^{r-1}\Gamma(r)}{[\sigma_n(A)]^r} \int\limits_{\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\lambda_n(u,v+u)-\frac{\pi r}{2}\right)\right|}{v}\,dv+O\left(\frac{(\sin u)^{r-1}}{[\sigma_n(A)]^r}\right).$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} \leqslant &\frac{2(2\sin u)^{r-1}\Gamma(r)}{[\sigma_n(A)]^r}\int\limits_{\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{\pi}\frac{dv}{v}+O\left(\frac{(\sin u)^{r-1}}{[\sigma_n(A)]^r}\right)\\ =&\frac{2(2\sin u)^{r-1}\Gamma(r)\ln\sigma_n(A)}{[\sigma_n(A)]^r}+O\left(\frac{(\sin u)^{r-1}}{[\sigma_n(A)]^r}\right), \quad n\to\infty. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Из представления (2.19) с учетом найденных оценок (2.20), (2.21) и (2.22) получим

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,x,A)| \leqslant \frac{2K(\sin u)^{r-1}}{\pi}\frac{\ln\sigma_n(A)}{[\sigma_n(A)]^r}+O\left(\frac{(\sin u)^{r-1}}{[\sigma_n(A)]^r}\right), \quad n\to\infty.$$

Из последнего соотношения придем к оценке (2.16).

Для доказательства неравенства (2.17) в представлении (2.4) положим $x=1$, что соответствует значению параметра $u=0$. Тогда

$$\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,1,A) = \frac{2^{1-r}}{\pi\Gamma(r)}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\cos v)\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{2r-2}t^{1-r}}{\sqrt{1-2t\cos v+t^2}}$$
$$\cdot\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{t^2+2t|\alpha_k|\cos\theta_k+|\alpha_k|^2}{1+2t|\alpha_k|\cos\theta_k+|\alpha_k|^2t^2}}\sin\psi_n(1,t,v)\,dt\,dv, \qquad \theta_k=\arg\alpha_k,$$

где $\psi_n(1,t,v)$ определено в теореме 2.1.

Воспользовавшись оценкой (2.18) и опять же представив внешний интеграл в виде суммы трех интегралов, будем иметь

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi,1,A)| \leqslant \frac{2^{1-r}K}{\pi\Gamma(r)}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma_n(A)}}+\int\limits_{\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{2\pi-\frac{1}{\sigma_n(A)}}+\int\limits_{2\pi-\frac{1}{\sigma_n(A)}}^{2\pi}\right)I_n^{(4)}(v)\,dv, \tag{2.23}$$

где

$$I_n^{(4)}(v) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{2r-2}t^{1-r}}{\sqrt{1-2t\cos v+t^2}} e^{\frac{1}{2}(t^2-1)\sigma_n(A)} |\sin\psi_n(1,t,v)|\, dt.$$

Далее задача сводится к исследованию асимптотического поведения каждого из трех слагаемых в оценке (2.23). Применив аналогичные методы, которые использовались при доказательстве неравенства (2.16), получим (2.17). Доказательство теоремы 2.2 завершено. □

В теореме 2.2 положим значение параметров $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае $A = (0, 0, \ldots, 0) = O$ и величина $\tilde{\varepsilon}_n(\varphi, x, O) = \tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi, x)$ представляет собой приближения интеграла типа Римана — Лиувилля (2.1) полиномиальным аналогом оператора (2.2).

Следствие 2.2. *Если* $\max\limits_{|x|\leqslant 1}|\varphi(x)| = K$, *то для любого* $r \in (1, +\infty)$ *при* $n \to \infty$ *справедливы оценки сверху*

$$|\tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi, x)| \leqslant \frac{2K(\sqrt{1-x^2})^{r-1}\ln n}{\pi n^r} + O\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^{r-1}}{n^r}\right),$$

если $x \in (-1, 1)$, *и*

$$|\tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi, 1)| \leqslant \frac{2^{2-r}K\Gamma(2r-1)}{\pi\Gamma(r)} \frac{\ln n}{n^{2r-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2r-1}}\right),$$

при $x = 1$, *где* $\Gamma(\cdot)$ — *гамма-функция Эйлера.*

Аналогичная по порядку оценка содержится в [8]. Отметим, что оценка в следствии 2.2 является несколько менее точной по константе. Видимо для усовершенствования результатов необходимо искать другие пути оценки (2.22).

3. Аппроксимации интеграла типа Римана — Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность

Изучим приближения (2.3) в случае $\varphi_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0, +\infty)$, то есть приближения функций вида

$$f_\gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}(1-t)^\gamma \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1], \quad r \in (1, +\infty). \tag{3.1}$$

Введем следующие обозначения

$$\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A) = f_\gamma(x) - \tilde{s}_n(\varphi_\gamma, x), \qquad x \in [-1, 1],$$
$$\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, A) = ||f_\gamma(x) - \tilde{s}_n(\varphi_\gamma, x)||_{C[-1,1]}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Будем полагать, что

$$\alpha_k \in [0, 1), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0, \qquad p = \max\{[\gamma], [r-1]\},$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть от числа.

Теорема 3.1. *При любом* $r \in (1, +\infty)$ *и* $\gamma \in (0, +\infty)$ *для приближений интеграла типа Римана — Лиувилля* (3.1) *на отрезке* $[-1, 1]$ *образом рационального интегрального оператора Фурье — Чебышёва* (2.2) *имеет место:*

1) *интегральное представление*

$$\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A) = \frac{2^{2-r-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^1 (1-y)^{2\gamma} y^{-\gamma}\omega(y) \cdot \int\limits_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r} \frac{(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}\pi_n(t,x,A)\sin\Omega_n(x,t,y)}{\sqrt{1-2yt\cos u+t^2y^2}}\,dt\,dy, \tag{3.2}$$

где

$$\omega(y) = \prod_{k=1}^n \frac{y-\alpha_k}{1-\alpha_k y}, \qquad \pi_n(t,x,A) = \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{t^2-2\alpha_k t\cos u+\alpha_k^2}{1-2t\alpha_k\cos u+t^2\alpha_k^2}},$$

$$\Omega_n(x,t,y) = \arg\frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\xi\omega(\xi t)}{1-ty\xi}, \qquad \xi = \mathrm{e}^{iu}, \qquad x=\cos u;$$

2) *оценка поточечных приближений:*

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A)| \leqslant \frac{2^{2-r-\gamma}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^1 (1-y)^{2\gamma}y^{-\gamma}|\omega(y)| \cdot \int\limits_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}\frac{(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}\pi_n(t,x,A)}{\sqrt{1-2yt\cos u+t^2y^2}}\,dt\,dy; \tag{3.3}$$

3) *равномерно для всех $x\in(-1,1)$ оценка приближений:*

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A)| \leqslant (\sqrt{1-x^2})^{r-1}\tilde{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.4}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A) = \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|}{\pi[\nu_n(A)]^r}(1+o(1)) \int\limits_0^1 (1-y)^{2\gamma-1}y^{-\gamma}|\omega(y)|\,dy, \tag{3.5}$$

$$\nu_n(A) = \sum_{k=1}^n \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k};$$

4) *при $x=1$ оценка приближений*

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, 1, A)| \leqslant \frac{2^{2-r-\gamma}|\sin\pi\gamma||\sin\pi r|}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^1 (1-y)^{2\gamma-1}y^{-\gamma}|\omega(y)|\,dy \int\limits_0^1 (1-t)^{2r-2}t^{1-r}|\omega(t)|\,dt. \tag{3.6}$$

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением приближений, установленным в (2.14). В случае плотности $\varphi_\gamma(x)$ оно примет вид

$$\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A) = \frac{1}{2^r\pi i\Gamma(r)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1-\cos v)^\gamma \int\limits_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r} \cdot \left[\frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(t-\zeta\overline{\xi})\omega(\zeta)} - \frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\overline{\xi}t)}{t-\overline{\zeta}\xi}\right]dt\,dv, \quad \zeta=\mathrm{e}^{iv},\ \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u.$$

Воспользовавшись теоремой Фубини, поменяем порядок интегрирования. Тогда

$$\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A) = \frac{1}{2^r\pi i\Gamma(r)} \int\limits_0^1 (1-t)^{r-1}t^{1-r}I_n(t,x)\,dt, \tag{3.7}$$

где

$$I_n(t,x) = \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos v)^{\gamma} \left[\frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(t-\zeta\overline{\xi})\omega(\zeta)} - \frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\overline{\xi}t)}{t-\overline{\zeta}\xi} \right] dv, \quad \zeta = \mathrm{e}^{iv}. \tag{3.8}$$

Преобразуем интеграл $I_n(t,x)$. С этой целью перейдем к интегрированию по переменному ζ. Тогда

$$I_n(t,x) = \frac{(-1)^{\gamma}}{2^{\gamma}i} \oint_{\Gamma} (1-\zeta)^{2\gamma}\zeta^{-\gamma} \left[\frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)}{(t-\zeta\overline{\xi})\omega(\zeta)} - \frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\zeta)\omega(\overline{\xi}t)}{t-\overline{\zeta}\xi} \right] \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где $\Gamma = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$, $\xi = \mathrm{e}^{iu}$, $t \in (0,1)$.

Отметим, что в случае, если $\gamma \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$, то подынтегральная функция имеет точки ветвления при $\zeta = 0$, $\zeta = 1$ и $\zeta = \infty$. Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов так, что

$$I_n(t,x) = -\frac{(-1)^{\gamma}}{2^{\gamma}i} \left[(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\omega(\xi t)\xi J_n^{(1)} + \frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\omega(\overline{\xi}t)}{t} J_n^{(2)} \right], \tag{3.9}$$

где

$$J_n^{(1)} = \oint_{\Gamma} \frac{(1-\zeta)^{2\gamma}\zeta^{-\gamma}}{(\zeta-\xi t)\zeta\omega(\zeta)}\, d\zeta, \qquad J_n^{(2)} = \oint_{\Gamma} \frac{(1-\zeta)^{2\gamma}\zeta^{-\gamma}}{\zeta-\xi/t}\omega(\zeta)\, d\zeta.$$

Применяя для каждого из интегралов по отдельности методы исследования, аналогичные с теми, которые использовались при доказательстве теоремы 2.1, будем иметь

$$J_n^{(1)} = (\mathrm{e}^{-2\pi i\gamma}-1) \int_0^1 \frac{(1-y)^{2\gamma}y^{-\gamma}}{1-ty\xi}\omega(y)\, dy, \qquad J_n^{(2)} = \overline{\xi}t(1-\mathrm{e}^{-2\pi i\gamma}) \int_0^1 \frac{(1-y)^{2\gamma}y^{-\gamma}}{1-ty\overline{\xi}}\omega(y)\, dy.$$

Из соотношения (3.9) с учетом последних интегральных представлений получим

$$I_n(t,x) = -2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma \int_0^1 (1-y)^{2\gamma}y^{-\gamma}\omega(y) \left[\frac{(\xi t-\overline{\xi})^{r-1}\xi\omega(\xi t)}{1-ty\xi} - \frac{(\overline{\xi}t-\xi)^{r-1}\overline{\xi}\omega(\overline{\xi}t)}{1-ty\overline{\xi}} \right] dy. \tag{3.10}$$

Выражения в квадратной скобке являются взаимно комплексно–сопряженными. Выполнив необходимые вычисления, находим, что

$$I_n(t,x) = -\,2^{2-\gamma}i\sin\pi\gamma \int_0^1 (1-y)^{2\gamma}y^{-\gamma}\omega(y) \cdot \frac{(1-2t\cos 2u+t^2)^{\frac{r-1}{2}}\pi_n(t,x,A)\sin\Omega_n(x,t,y)\, dy}{\sqrt{1-2yt\cos u+t^2y^2}}, \tag{3.11}$$

где $\pi_n(t,x,A)$ и $\Omega_n(x,t,y)$ определены в теореме 2.2.

Из интегральных представлений (3.7) и (3.11) придем к (3.2).

Оценка (3.3) легко следует из (3.2).

Докажем оценку (3.4). С этой целью воспользуемся рассуждениями из (2.18). Имеем

$$\pi_n(t,x,A) = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{t^2-2\alpha_k t\cos u+\alpha_k^2}{1-2t\alpha_k\cos u+t^2\alpha_k^2}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2-1}{2}\nu_n(A)},$$

где $\nu_n(A)$ из (3.5).

С учетом последнего неравенства и оценки (3.3) получим

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A)| \leqslant \frac{2^{2-r-\gamma}|\sin \pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^1 (1-y)^{2\gamma} y^{-\gamma} |\omega(y)|$$

$$\cdot \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{r-1} t^{1-r}}{1-yt} (1-2t\cos 2u + t^2)^{\frac{r-1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{t^2-1}{2}\nu_n(A)}\, dt\, dy, \;\; x = \cos u, \;\; x \in (-1,1).$$

Для исследования асимптотического поведения внутреннего интеграла при $n \to \infty$ воспользуемся методом Лапласа [4], [21]. Приводить их не будем поскольку они в точности повторяют рассуждения при получении оценок (2.20) и (2.21). В результате необходимых вычислений получим (3.4).

Из интегрального представления (3.2) при $x = 1$, что соответствует значению параметра $u = 0$, будем иметь

$$\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, 1, A) = \frac{2^{2-r-\gamma}\sin \pi\gamma(\pm \sin \pi r)}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^1 (1-y)^{2\gamma} y^{-\gamma}\omega(y) \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2r-2} t^{1-r}}{1-yt} \omega(t)\, dt\, dy.$$

Из последнего интегрального представления очевидным образом следует оценка (3.6).

Теорема 3.1 доказана. □

В теореме 3.1 положим значения параметров $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае $A = (0, 0, \ldots, 0) = O$ и величина $\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, O) = \tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi_\gamma, x)$ представляет собой приближения функции $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,1]$ образом частичных сумм полиномиального ряда Фурье — Чебышёва при преобразовании (2.2). При этом из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1. *Для приближений функции $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,1]$ образом частичных сумм полиномиального ряда Фурье — Чебышёва при преобразовании (2.2) имеют место:*

1) *интегральное представление*

$$\tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi_\gamma, x) = \frac{2^{2-r-\gamma}\sin \pi\gamma}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^1 (1-y)^{2\gamma} y^{n-\gamma}$$
$$\cdot \int\limits_0^1 (1-t)^{r-1} t^{n+1-r} \frac{(1-2t\cos 2u + t^2)^{\frac{r-1}{2}} \sin \Omega_n^{(0)}(x,t,y)}{\sqrt{1-2yt\cos u + t^2y^2}}\, dt\, dy, \tag{3.12}$$

где

$$\Omega_n^{(0)}(x,t,y) = (n+1)u + \arg\frac{(\xi t - \bar{\xi})^{r-1}}{1-yt\xi}, \quad \xi = \mathrm{e}^{iu}, \quad x = \cos u;$$

2) *оценка поточечных приближений:*

$$|\tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi_\gamma, x)| \leqslant \frac{2^{2-r-\gamma}|\sin \pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^1 (1-y)^{2\gamma} y^{n-\gamma}$$
$$\cdot \int\limits_0^1 (1-t)^{r-1} t^{n+1-r} \frac{(1-2t\cos 2u + t^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2yt\cos u + t^2y^2}}\, dt\, dy;$$

3) *равномерно для всех* $x \in (-1,1)$ *оценка приближений:*

$$|\tilde{\varepsilon}_n^{(0)}(\varphi_\gamma, x)| \leqslant \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|(\sqrt{1-x^2})^{r-1}\Gamma(2\gamma)}{\pi n^{r+2\gamma}}(1+o(1)), \quad n \in \mathbb{N},$$

4) *при* $x=1$ *оценка приближений*

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, 1, A)| \leqslant \frac{2^{2-r-\gamma}|\sin\pi\gamma||\sin\pi r|\Gamma(2\gamma)\Gamma(2r-1)}{\pi\Gamma(r)n^{2r+2\gamma-1}}(1+o(1)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Интегральное представление и оценка поточечных приближений следуют непосредственно из соответствующих результатов теоремы 3.1 при значении параметров $\alpha_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$. Оценки сверху следуют из соответствующих результатов рациональных аппроксимаций в теореме 3.1 если применить известный метод Лапласа.

4. Асимптотика мажоранты равномерных приближений

Представляет интерес изучить асимптотическое поведение величины (3.5) и правой части оценки сверху (3.6) при $n \to \infty$. С этой целью в соответствующих интегралах выполним замену переменного по формуле

$$y = \frac{1-u}{1+u}, \qquad dy = -\frac{2du}{(1+u)^2}$$

Тогда

$$\tilde{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A) = \frac{2^{1+\gamma}|\sin\pi\gamma|}{\pi[p+\nu_m(A)]^r}(1+o(1))\int_0^1 g_\gamma(u)\left|\prod_{k=1}^m \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right| du, \quad n = m+p, \tag{4.1}$$

$$g_\gamma(u) = \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p, \qquad \nu_m(A) = \sum_{k=1}^m \beta_k, \qquad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}.$$

Аналогичным образом оценка (3.6) примет вид

$$\begin{aligned}|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, 1, A)| \leqslant & \frac{2^{1+r+\gamma}|\sin\pi\gamma||\sin\pi r|}{\pi\Gamma(r)}\int_0^1 g_\gamma(u)\left|\prod_{k=1}^m \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right| du \\ & \cdot \int_0^1 \frac{u^{2r-2}}{(1+u)^2(1-u^2)^{r-1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \left|\prod_{k=1}^m \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right| du, \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $r \in (1,+\infty)$, $\gamma \in (0,+\infty)$.

Будем считать, что параметры β_k, $k = 1,2,\ldots,m$, упорядочены следующим образом:

$$0 < \beta_m < \beta_{m-1} < \ldots < \beta_1 \leqslant 1.$$

Более того, для каждого значения n может выбираться соответствующий набор параметров β_k, $k = 1,2\ldots,m$. То есть, вообще говоря, $\beta_k = \beta_k(n)$. В связи с этим будем полагать выполненными условия

$$\mu_m(A) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\beta_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \tag{4.3}$$

$$\nu_m(A) = \sum_{k=1}^m \beta_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{4.4}$$

Условия (4.3) и (4.4) не противоречивы. Ниже будет рассмотрена последовательность параметров $\{\beta_k\}_{k=1}^m$, удовлетворяющая обоим соотношениям.

Теорема 4.1. *При выполнении условий (4.3) и (4.4) справедливы оценки сверху*

$$\tilde{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A) \leqslant \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma)}{\pi[p+\nu_m(A)]^r}\left[\frac{1}{(\mu_m(A))^{2\gamma}} + \frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{\Gamma(1+p+\gamma)}\prod_{k=1}^m \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right](1+o(1)); \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, 1, A)| \leqslant & \frac{2^{2-r-\gamma}|\sin\pi\gamma||\sin\pi r|\Gamma(2\gamma)\Gamma(2r-1)}{\pi\Gamma(r)} \\ & \cdot\left[\frac{1}{(\mu_m(A))^{2\gamma}} + \frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{\Gamma(1+p+\gamma)}\prod_{k=1}^n \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right] \\ & \cdot\left[\frac{1}{(\mu_m(A))^{2r-1}} + \frac{\Gamma(2+p-r)}{\Gamma(1+p+r)}\prod_{k=1}^n \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right](1+o(1)), \quad n\to\infty.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Доказательство. Докажем справедливость оценки (4.5). Представим (4.1) в виде

$$\tilde{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A) = \frac{2^{1+\gamma}|\sin\pi\gamma|}{\pi[p+\nu_m(A)]^r}[I_n^{(1)}(A) + I_n^{(2)}(A)](1+o(1)), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{4.7}$$

где

$$I_n^{(1)}(A) = \int_0^{\beta_m} g_\gamma(u)\prod_{k=1}^m \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\,du, \qquad I_n^{(2)}(A) = \int_{\beta_m}^1 g_\gamma(u)\left|\prod_{k=1}^m \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du.$$

Изучим асимптотическое поведение при $n\to\infty$ каждого из двух интегралов по отдельности. Так, интеграл $I_n^{(1)}(A)$ представим в виде

$$I_n^{(1)}(A) = \int_0^{\beta_m} g_\gamma(u)\mathrm{e}^{S(u)}\,du, \qquad S(u) = \sum_{k=1}^m \ln\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}.$$

Функция $S(u)$ убывает на промежутке $[0,\beta_m]$ поскольку $S'(u)<0$, и, следовательно, достигает своего максимального значения при $u=0$. Учитывая разложение

$$S(u) = -2u\sum_{k=1}^m \frac{1}{\beta_k} - \frac{2}{3}u^3\sum_{k=1}^m \frac{1}{\beta_k^3} + O(u^5), \qquad u\to 0,$$

и очевидное асимптотическое равенство $g_\gamma(u)\sim u^{2\gamma-1}$, $u\to 0$, для некоторого достаточно малого $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$ находим, что

$$I_n^{(1)}(A) \sim \int_0^\varepsilon u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-2u\mu_m(A)}\,du.$$

В интегралах справа выполним замену переменного по формуле $2u\mu_m(A)\mapsto t$. Тогда

$$I_n^{(1)}(A) = \frac{1}{(2\mu_m(A))^{2\gamma}}\int_0^{\varphi(m,\varepsilon)} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt, \quad n\to\infty,$$

где $\varphi(m,\,\varepsilon) = 2\varepsilon\mu_m(A)\to\infty$ при $n\to\infty$, в силу условия (4.3). Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} u^{s-1}\mathrm{e}^{-u}\,du = \Gamma(s), \quad s>0,$$

из последнего асимптотического равенства получим

$$I_n^{(1)}(A) = \frac{\Gamma(2\gamma)}{(2\mu_m(A))^{2\gamma}}(1+o(1)), \quad n \to \infty. \tag{4.8}$$

Займемся исследованием интеграла $I_n^{(2)}(A)$. Очевидно, что

$$I_n^{(2)}(A) \leqslant \max_{u\in[0,1]} \left| \prod_{k=1}^{m} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right| \int\limits_{\beta_m}^{1} g_\gamma(u)\,du.$$

Интеграл справа существует. Его подынтегральная функция неотрицательна. Следовательно, его значение мажорируется интегралом с аналогичной подынтегральной функцией по промежутку $[0,1]$. Известно [27], что

$$\max_{u\in[0,1]} \left| \prod_{k=1}^{m} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}.$$

С учетом последнего соотношения приходим к оценке

$$I_n^{(2)}(A) \leqslant c(\gamma) \prod_{k=1}^{m} \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}, \quad n \to \infty, \tag{4.9}$$

где

$$c(\gamma) = \int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p du = \frac{\Gamma(2\gamma)\Gamma(1+p-\gamma)}{2^{2\gamma}\Gamma(1+p+\gamma)}.$$

Подставив оценки (4.8) и (4.9) в представление (4.7), придем к неравенству (4.5).

Докажем справедливость оценки (4.6). Оценка первого интеграла справа в (4.2) по сути содержится в асимптотическом равенстве (4.8). Применив аналогичные рассуждения в отношении второго интеграла, придем к (4.6). Теорема 4.1 доказана. □

Положив в теореме 4.1 $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, с учетом неравенства (3.4) приходим к третьей и четвертой оценкам в следствии 3.1.

5. Случай «ньюменовских» параметров аппроксимирующей функции

Исследуем асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений (4.5) и оценку сверху приближений в точке $x = 1$ (4.6) в случае, когда принимаемые параметрами β_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, значения, являются некоторой модификацией параметров, введенных в своей работе Д. Ньюменом [27]. Эта задача будет изучаться нами далее.

Пусть A_N — набор параметров α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих следующим условиям

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0, \qquad p = \max\{[\gamma], [r-1]\}; \\ &\alpha_{p+k} = \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}, \qquad \beta_k = \mathrm{e}^{-\frac{ck}{\sqrt{m}}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{5.1}$$

c — некоторая положительная постоянная, не зависящая от n, $n = m + p$ при $n > p$.

Теорема 5.1. *При любых $\gamma \in (0, +\infty)$ и $r \in (1, +\infty)$ для приближений функции $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,1]$ рациональным интегральным оператором (2.2) с параметрами (5.1) справедлива оценка сверху*

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A_N)| \leqslant (\sqrt{1-x^2})^{r-1} \tilde{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A_N), \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad x \in (-1,1), \tag{5.2}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A_N) \leqslant \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma)c^r}{\pi n^{\frac{r}{2}}}\left[\frac{c^{2\gamma}}{n^\gamma}\mathrm{e}^{-2\gamma c\sqrt{n}} + \frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{\Gamma(1+p+\gamma)}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{4c}\sqrt{n}}\right](1+o(1));$$

$$\begin{aligned}|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, 1, A_N)| \leqslant & \frac{2^{2-r-\gamma}|\sin\pi\gamma||\sin\pi r|\Gamma(2\gamma)\Gamma(2r-1)}{\pi\Gamma(r)} \\ & \cdot\left[\frac{c^{2\gamma}}{n^\gamma}\mathrm{e}^{-2\gamma c\sqrt{n}} + \frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{\Gamma(1+p+\gamma)}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{4c}\sqrt{n}}\right] \\ & \cdot\left[\frac{c^{2r-1}}{n^{\frac{2r-1}{2}}}\mathrm{e}^{-(2r-1)c\sqrt{n}} + \frac{\Gamma(2+p-r)}{\Gamma(1+p+r)}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{4c}\sqrt{n}}\right](1+o(1)), \quad n\to\infty.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Доказательство. Исследуем асимптотическое поведение правой части равенства (4.5), когда параметры β_k, $k = 1, 2, \dots, m$, заданы формулами (5.1). Известно [7], что при этом справедливы асимптотические равенства

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \sim \sqrt{m}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{4c}\sqrt{m}}, \qquad n\to\infty,$$

$$\mu_m(A_N) = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\beta_k} \sim \frac{\sqrt{m}}{c}\mathrm{e}^{c\sqrt{m}}, \qquad n\to\infty.$$

Установим асимптотическое равенство для величины $\nu_m(A_N)$ (см. (4.4)). Воспользуемся методами исследования асимптотического поведения подобных сумм, изложенными в [15]:

$$\nu_m(A_N) = \sum_{k=1}^{m}\beta_k = \int_1^m \mathrm{e}^{-\frac{ct}{\sqrt{m}}}\,dt + O\left(\mathrm{e}^{-c\sqrt{m}}\right) + O(1), \quad n\to\infty.$$

После соответствующих вычислений находим, что

$$\nu_m(A_N) \sim \frac{\sqrt{m}}{c}, \quad n\to\infty.$$

Из неравенства (4.5) с учетом указанных выше асимптотических равенств, получим

$$\tilde{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A_N) \leqslant \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma)c^r}{\pi m^{\frac{r}{2}}}\left[\frac{c^{2\gamma}}{m^\gamma}\mathrm{e}^{-2\gamma c\sqrt{m}} + \frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{\Gamma(1+p+\gamma)}\sqrt{m}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{4c}\sqrt{m}}\right](1+o(1)).$$

Учитывая, что $n = m + p$, из последнего неравенства приходим к оценке (5.2).

Для того, чтобы получить оценку (5.3) необходимо применить рассуждения, используемые в настоящей теореме выше, к оценке (4.6). Теорема 5.1 доказана. □

Представляет интерес минимизировать мажоранту в оценке (5.2) и правую часть оценки (5.3) путем выбора оптимального для каждой из задач параметра c. Другими словами, найти наилучшие оценки приближений с параметрами (5.1). Положим

$$\hat{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma) = \inf_c \hat{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma, A_N).$$

Имеет место

Теорема 5.2. *При любых* $\gamma \in (0, +\infty)$ *и* $r \in (1, +\infty)$ *для приближений функции* $f_\gamma(x)$ *на интервале* $(-1, 1)$ *рациональным интегральным оператором* (2.2) *с параметрами* (5.1) *при* $n \to \infty$ *справедливы оценки сверху*

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma, x, A_N)| \leqslant \begin{cases}(\sqrt{1-x^2})^{r-1}c_1(\gamma, r)\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{2\gamma n}}}{n^{\frac{r-1}{2}}}(1+o(1)), & x\in(-1,1),\\ c_2(\gamma, r)n\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{(r+\gamma-\frac{1}{2})n}}(1+o(1)), & x = 1,\end{cases} \tag{5.4}$$

где

$$c_1(\gamma,r)=\frac{2^{1-r-\gamma}\pi^{r-1}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma)\Gamma(1+p-\gamma)}{(\sqrt{2\gamma})^r\Gamma(1+p+\gamma)},$$
$$c_2(\gamma,r)=\frac{2^{2-r-\gamma}|\sin\pi\gamma||\sin\pi r|\Gamma(2\gamma)\Gamma(2r-1)\Gamma(1+p-\gamma)\Gamma(1+p+\gamma)}{\pi\Gamma(r)\Gamma(2+p-r)\Gamma(1+p+r)}.$$

Доказательство. Константу c в (5.2) выберем исходя из равенства $2\gamma c=\frac{\pi^2}{4c}$, т.е.

$$c=\frac{\pi}{2\sqrt{2\gamma}}. \tag{5.5}$$

При этом из (5.2) после некоторых преобразований следует, что

$$|\tilde{\varepsilon}_n(\varphi_\gamma,x,A_N)|\leqslant\frac{2^{1-r-\gamma}\pi^{r-1}|\sin\pi\gamma|(\sqrt{1-x^2})^{r-1}\Gamma(2\gamma)}{n^{\frac{r-1}{2}}(\sqrt{2\gamma})^r}\frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{\Gamma(1+p+\gamma)}e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{2\gamma n}}$$
$$+O\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^{r-1}e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{2\gamma n}}}{n^{\frac{r}{2}+\gamma}}\right),\qquad n\in\mathbb{N},\qquad x\in(-1,1).$$

Для того, чтобы доказать, что константа c, определенная в (5.5), действительно доставляет правой части (5.2) асимптотически минимальное значение, достаточно воспользоваться методом, изложенным в [7]. Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma,A_N^*)=\inf_c\hat{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma,A_N)=\hat{\varepsilon}_n^*(\varphi_\gamma)$$

и мы приходим к (5.4).

Докажем вторую оценку в (5.4). С этой целью обратимся к соотношению (5.3). Выражение справа представляет собой четыре слагаемых, скорость стремления к нулю каждого из которых определяется экспонентой и некоторой степенью n. Оптимальный параметр c будем искать из условия равенства степеней при экспоненте в слагаемых с самой малой и самой большой скоростью стремления к нулю. То есть

$$(2\gamma+2r-1)c=\frac{\pi^2}{2c},\qquad c=\frac{\pi}{\sqrt{2(2\gamma+2r-1)}}.$$

Для того, чтобы доказать, что определенная нами константа c, доставляет правой части оценки (5.3) асимптотически минимальное значение, опять же необходимо воспользоваться методом, изложенным в [7]. При этом придем ко второй оценке в (5.4). Теорема 5.2 доказана. □

6. Заключение

В работе исследованы аппроксимации интеграла типа Римана — Лиувилля на отрезке $[-1,1]$ интегралом типа Римана — Лиувилля с плотностью представляющей собой рациональный интегральный оператор Фурье — Чебышёва.

Найдена оценка приближений интеграла типа Римана — Лиувилля с ограниченной плотностью, зависящая от полюсов аппроксимирующей рациональной функции. Эта оценка существенным образом зависит от положения точки на отрезке $[-1,1]$. Установлено, что скорость приближений на концах отрезка выше, чем в целом на отрезке.

Изучены рациональные аппроксимации интеграла типа Римана — Лиувилля с плотностью, представляющей собой функцию со степенной особенностью. Установлено интегральное представление и оценки приближений, зависящие от полюсов аппроксимирующей функции. Рассмотрен случай, когда полюсы представляют собой некоторые модификации «ньюменовских» параметров. Найдены их оптимальные значения, при которых равномерные рациональные приближения имеют наибольшую скорость убывания.

В качестве следствия найдены оценки приближений интеграла типа Римана — Лиувилля полиномиальным аналогом рассматриваемого рационального интегрального оператора.

Проведенные исследования позволяют заключить, что класс функций, задаваемых интегралами Римана — Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность, на отрезке $[-1, 1]$ отражает особенности рациональной аппроксимации введенным методом в том смысле, что при определенном выборе параметров аппроксимирующей функции скорость равномерных рациональных приближений (теорема 5.2) является выше в сравнении со своими полиномиальными аналогами (следствие 3.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.И. Ахиезер. *Лекции по теории аппроксимации. Изд. 2е, перераб. и доп.*. М.: Наука. 1965.
2. Ю.И. Бабенко. *Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена.* СПб.: НПО «Профессионал». 2009.
3. Т.Ю. Горская, А.Ф. Галимянов. *Аппроксимация дробных интегралов частными суммами ряда Фурье* // Изв. Казанского госуд. арх.-стр. унив. **3**:41, 261–265 (2017).
4. М.А. Евграфов. *Асимптотические оценки и целые функции.* М.: Наука. 1979.
5. Д.А. Зенюк, Ю.Н. Орлов. *О применении дробного исчисления Римана — Лиувилля для описания распределений вероятностей* // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша **18**, (2014).
6. С.М. Никольский. *О наилучшем приближении функции, s-ая производная которой имеет разрывы первого рода* // Докл. акад. наук СССР **55**, 99–102 (1947).
7. П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба. *Об оценках равномерных приближений рациональными интегральными операторами Фурье — Чебышева при определенном выборе полюсов* // Мат. заметки. **113**:6, 876–894 (2023).
8. П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба. *Аппроксимация интегралов типа Римана — Лиувилля на отрезке некоторыми методами основанными на суммах Фурье — Чебышева* // Мат. заметки. **116**:1, 122–138. (2024).
9. Е.А. Ровба. *Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации* // Докл. акад. наук БССР **23**:11, 968–971 (1979).
10. Е.А. Ровба. *Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана — Лиувилля, рациональными операторами* // Докл. акад. наук Беларуси **40**:6, 18–22 (1996).
11. Е.А. Ровба. *Рациональные интегральные операторы на отрезке* // Вестн. Белорусс. гос. унив., Сер. 1, Физ. Мат. Информ. **1**, 34–39 (1996).
12. В.Н. Русак. *Об одном методе приближения рациональными функциями* // Весцi акад. навук БССР. Сер. фiз.-мат. навук **3**, 36–43 (1978).
13. И.В. Рыбаченко. *Рациональная интерполяция функций с производной Римана — Лиувилля из L_p* // Вестн. Белорусс. гос. унив., Сер. 1, Физ. Мат. Информ. 2, 69–74, 127 (2006).
14. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника. 1987.
15. Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. *Лекции по теории функций комплексного переменного* М.: Наука. 1989.
16. А.П. Старовойтов. *Сравнение скоростей рациональных и полиномиальных аппроксимаций дифференцируемых функций* // Мат. заметки. **44**:4, 528–535 (1988).
17. А.П. Старовойтов. *Рациональные приближения дробных интегралов Римана — Лиувилля и Вейля* // Мат. заметки. **78**:3, 428–441 (2005).

18. К.А. Смотрицкий. *О приближении дифференцируемых в смысле Римана — Лиувилля функций* // Весцi нац. акад. навук Беларусi, Сер. фiз.-мат. навук 4, 42–47 (2002).
19. К.А. Смотрицкий. *О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке* // Вестн. Белорусс. гос. унив., Сер. 1, Физ. Мат. Информ. 3, 64–70, 125 (2005).
20. А.А. Тюленева. *Приближение интегралов Римана — Лиувилля алгебраическими полиномами на отрезке* // Изв. Сарат. унив. (Н.с.), Сер. Мат. Мех. Информ. **14**:3, 305–311 (2014).
21. М.В. Федорюк. *Асимптотика. Интегралы и ряды.* М.: Наука. 1987.
22. H. Akçay, B. Ninness. *Rational basis functions for robust identification from frequency and time–domain measurements* // Automatica **34**:9, 1101–1117 (1998).
23. A. Atangana, J.F. Gómez–Aguilar. *Numerical approximation of Riemann — Liouville definition of fractional derivative: From Riemann — Liouville to Atangana — Baleanu* // Numer. Methods Partial Differ. Equations **34**:5, 1502–1523 (2018).
24. A. Galimyanov, T. Gorskaya. *Calculation of fractional integrals using partial sums of Fourier series for structural mechanics problems* // E3S Web of Conferences. **274**, 03011 (2021).
25. L. Khitri–Kazi–Tani, H. Dib. *On the approximation of Riemann — Liouville integral by fractional nabla h-sum and applications* // Mediterr. J. Math. **14**:2, 86 (2017).
26. T. Marinov, N. Ramirez, F. Santamaria. *Fractional integration toolbox* // Fract. Calc. Appl. Anal. **16**:3, 670–681 (2013).
27. D.J. Newman. *Rational approximation to* $|x|$ // Mich. Math. J. **11**:1, 11–14 (1964).
28. K.M. Owolabi, A. Atangana. *Numerical approximation of Riemann — Liouville differentiation* // In ”Numerical Methods for Fractional Differentiation”, Springer, Singapore **54**, 139–160 (2019).

Павел Геннадьевич Поцейко,
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22,
230023, г. Гродно, Республика Беларусь
E-mail: pahamatby@gmail.com

Евгений Алексеевич Ровба,
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22,
230023, г. Гродно, Республика Беларусь
E-mail: rovba.ea@gmail.com