

УДК 517.987+519.218.84

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИ УСРЕДНЯЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В $\mathbb{R}$

И.В. ПОДВИГИН

Аннотация. В работе рассматриваются два вида усреднений унитарного представления группы $\mathbb{R}$, построенных по некоторым последовательностям вероятностных мер на $\mathbb{R}$. Первая последовательность мер обобщает равномерное распределение. Меры из этой последовательности имеют плотности в виде свертки конечного числа индикаторов отрезка. Вторая последовательность определяется экспоненциальным убыванием преобразования Фурье. Для таких усреднений получены оценки скорости сходимости по норме, зависящие от особенности спектральной меры унитарного представления в окрестности нуля и асимптотики последовательности преобразований Фурье усредняющих вероятностных мер. При этом максимальные возможные скорости являются степенными с показателем $m > 1$ и экспоненциальными соответственно, что значительно лучше максимальной скорости сходимости в классической эргодической теореме фон Неймана.

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, статистически усредняющая последовательность, преобразование Фурье, медленно меняющиеся функции, асимптотика интегралов.

Mathematics Subject Classification: 37A30, 42A38, 26A12, 26D15, 41A60

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, на котором действует группа $\mathbb{R}$ унитарными преобразованиями U_t , $t \in \mathbb{R}$. Эргодическая теорема фон Неймана (статистическая эргодическая теорема) утверждает, что для любого вектора $h \in \mathcal{H}$

$$\left\| \frac{1}{2t} \int_{[-t,t]} U_s h \, ds - Ph \right\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$, где P — ортогональное проектирование на подпространство неподвижных векторов группы $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Скорость сходимости в этой теореме хорошо изучена: она определяется особенностью спектральной меры σ_h , $h \in \mathcal{H}$ в окрестности нуля (см. обзоры [3], [4], а также недавние работы [19], [12]).

Статистическая эргодическая теорема обобщается следующим образом. Следуя терминологии Темпельмана [22], для локально-компактной коммутативной группы $\mathcal{G}$ статистически усредняющей последовательностью будем называть последовательность (или сеть)

I.V. PODVIGIN, ON CONVERGENCE RATE IN ERGODIC THEOREM FOR SOME STATISTICALLY AVERAGING SEQUENCES IN $\mathbb{R}$.

© Подвигин И.В. 2025.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

Поступила 26 апреля 2024 г.

вероятностных мер $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ на группе $\mathcal{G}$ такую, что для любого унитарного представления $\{U_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ справедлива сходимость

$$\left\| \int_{\mathcal{G}} U_s h d\nu_n(s) - Ph \right\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ для любого $h \in \mathcal{H}$, где P — ортогональное проектирование на подпространство неподвижных векторов группы $\{U_g\}_{g \in \mathcal{G}}$. В классической эргодической теореме фон Неймана рассматриваются равномерные распределения на отрезке $[-t, t]$, т.е. сеть абсолютно непрерывных вероятностных мер

$$d\nu_t(s) = \frac{1}{2t} \chi_{[-t, t]}(s) ds.$$

По критерию Блюма — Эйзенберга [13] сеть вероятностных мер ν_t на локально компактной коммутативной группе $\mathcal{G}$ будет статистически усредняющей тогда и только тогда, когда для любого характера $\chi \in \mathcal{G}^\wedge$, $\chi \neq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{G}} \chi(g) d\nu_t(g) = 0.$$

Для группы $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ последнее условие записывается как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(s, x)} d\nu_t(x) = 0 \quad \text{для любого } s \neq 0.$$

Интеграл в этом равенстве есть преобразование Фурье $\mathcal{F}[\nu_t]$ вероятностной меры ν_t . Эта эквивалентность следует из того, что

$$\left\| \int_{\mathcal{G}} U_s h d\nu_n(s) - Ph \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathcal{G}^\wedge} |\mathcal{F}[\nu_t](s)|^2 d\sigma_{h-Ph}(s), \quad (1.1)$$

где σ_{h-Ph} — спектральная мера вектора $h - Ph$ (см., например, [18]); при этом $\sigma_{h-Ph}(1) = 0$, где 1 — единичный характер.

В эргодических теоремах (как в индивидуальной так и в статистической) важными являются следующие классы статистически усредняющих сетей [20, 2.2]: меры ν_t , абсолютно непрерывные относительно меры Лебега (в том числе меры ν_t с компактным носителем); вероятностные меры ν_t ортогональные мере Лебега (сингулярные) и дискретные меры.

В этой заметке мы акцентируем внимание на нескольких примерах статистически усредняющих последовательностей, которые реализуют более быструю скорость сходимости в эргодической теореме, чем скорость сходимости в классической теореме фон Неймана. А именно, мы рассмотрим примеры с максимальной степенной скоростью с показателем $m > 1$ и максимальной экспоненциальной. Отметим, что максимальная скорость сходимости в классической теореме фон Неймана есть $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$. Такая же медленная максимальная скорость есть и для поточечной сходимости [5]. Для поточечной сходимости также есть работы, посвященные быстрым скоростям сходимости усреднений; см., например, [15], [16], [23].

Максимальные степенные скорости можно реализовать с помощью следующей конструкции. Пусть

$$\rho \in L_2([-1, 1], dx), \quad \rho \geq 0, \quad \|\rho\|_1 = 1,$$

тогда положим

$$d\nu_t(s) = \frac{1}{t} \chi_{[-t, t]}(x) \rho\left(\frac{x}{t}\right) dx, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

Эта сеть обобщает равномерное усреднение из эргодической теоремы фон Неймана (для которого $\rho \equiv \frac{1}{2}$). Нетрудно видеть, что преобразование Фурье удовлетворяет критерию Блюма — Эйсенберга:

$$\mathcal{F}[\nu_t](s) = \frac{1}{t} \int_{[-t,t]} e^{isx} \rho\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int_{[-1,1]} e^{ist y} \rho(y) dy := R(ts) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty$$

для любого $s \neq 0$ (по лемме Римана — Лебега). Мы заинтересованы случаем, когда для некоторого $m \in \mathbb{N}$

$$R(u) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^m}\right) \quad \text{и} \quad R(u) \neq o\left(\frac{1}{u^m}\right)$$

при $|u| \rightarrow +\infty$. Это условие, в частности, выполняется для рассматриваемой ниже плотности в виде свертки m индикаторов отрезка $[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$:

$$\rho(x) = \left(\frac{2}{m}\right)^m \underbrace{\chi_{[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]} * \dots * \chi_{[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]}(x)}_{m \text{ раз}}.$$

Назовем такие статистически усредняющие сети типом (A).

Вероятностные меры с максимальной экспоненциальной скоростью зададим через преобразование Фурье. Предположим, что задана сеть (или последовательность) вероятностных мер ν_t с преобразованием Фурье

$$\mathcal{F}[\nu_t](s) = r^t(s), \quad t > 0 \quad \text{или} \quad t = n \in \mathbb{N},$$

где $r(s)$ удовлетворяет условиям: $r(0) = 1$ и $|r(s)| < 1$ для всех $s \neq 0$. Из самого определения этих мер видно, что они являются статистически усредняющими. Сами меры при этом можно восстановить по своему преобразованию Фурье с помощью явной формулы (см., например, [1, 1.6.1]). Такие статистически усредняющие сети назовем типом (B). Примерами таких сетей являются свертки мер и распределения с быстро убывающими плотностями.

Пусть для некоторых чисел $a, b > 0$ усредняющая сеть ν_t имеет растянутое экспоненциальное преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}[\nu_t](s) = e^{-at|s|^b}, \quad t > 0. \quad (1.3)$$

В качестве примера мер, удовлетворяющих условию (1.3), можно рассмотреть Гауссово распределение

$$d\nu_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}} dx, \quad t > 0$$

или распределение Коши

$$d\nu_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}, \quad t > 0.$$

Преобразование Фурье для них равно (легко вычислить или посмотреть в таблицах [7]):

$$\mathcal{F}[\nu_t](s) = e^{-\frac{ts^2}{4}} \quad \text{и, соответственно,} \quad \mathcal{F}[\nu_t](s) = e^{-t|s|}.$$

Рассмотрим другой способ построения сетей типа (B). Пусть ν_0 — вероятностная мера в $\mathbb{R}$, такая, что ее преобразование Фурье обладает свойством: $|\mathcal{F}[\nu_0](s)| \leq 1$ и равенство 1 только для $s = 0$. Таким свойством не обладают, например, меры Дирака. Тогда положим

$$\nu_n(x) = \underbrace{\nu_0 * \dots * \nu_0}_{n \text{ раз}} := \nu_0^n, \quad n \geq 1.$$

Из формулы Бореля для свертки получаем

$$\mathcal{F}[\nu_n](s) = (\mathcal{F}[\nu_0](s))^n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty$$

для любого $s \neq 0$.

В этой заметке, используя недавний новый подход [6, §3.1] к задаче, мы получаем асимптотику интегралов (1.1) для группы $\mathbb{R}$ и усредняющих сетей (A) и (B). При этом удобнее рассматривать более общую конструкцию: вместо спектральной меры σ_{f-Pf} возьмем произвольную борелевскую меру μ на $\mathbb{R}$, непрерывную в нуле, т.е. $\mu\{0\} = 0$.

2. УСРЕДНЯЮЩИЕ СЕТИ С УСЛОВИЕМ (A)

2.1. Теорема Уиттекера — Котельникова — Шеннона. Напомним, что прямым (обратным) преобразованием Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R}, dx)$ называется функция

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-its} dt \quad \left(\text{соответственно} \quad \check{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{its} dt \right).$$

Преобразование Фурье обратимо в $L_2(\mathbb{R}, dx)$, т.е. $\check{\check{f}}(s) = f(s) = \hat{\hat{f}}(s)$ для п.в. $s \in \mathbb{R}$. Из определения видно, что преобразование Фурье меры ν_t из (1.2) есть с точностью до коэффициента обратное преобразование Фурье функции ρ , т.е.

$$\mathcal{F}[\nu_t](s) = \sqrt{2\pi} \check{\rho}(st) = R(ts).$$

Таким образом, функция R лежит в $L_2(\mathbb{R}, dx) \cap C(\mathbb{R})$ и ее прямое преобразование Фурье $\hat{R}(u) = \sqrt{2\pi} \rho(u)$, т.е. $\text{supp } \hat{R} = [-1, 1]$. Последнее означает, что для функции R справедлива теорема Уиттекера — Котельникова — Шеннона, которая утверждает (см. например, [17], [14]), что

$$R(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R(k\pi) \frac{\sin(k\pi - u)}{k\pi - u} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R(k\pi) \frac{(-1)^{|k|+1} \sin u}{k\pi - u}, \quad (2.1)$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$, и последовательность $\{R(\pi k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ лежит в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Из этого представления следует, что

$$R(u) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{u}\right) \quad \text{при} \quad |u| \rightarrow +\infty.$$

Приведем обоснование этого факта. Зафиксируем $m \geq 1$ и разобьем сумму в (2.1) на две: для $|k| \leq m$ и для $|k| > m$. Вторую сумму оценим с помощью неравенства Коши — Буняковского — Шварца:

$$\left| \sum_{|k| > m} R(k\pi) \frac{(-1)^{k+1} \sin u}{\pi k - u} \right| \leq \sqrt{\sum_{|k| > m} |R(\pi k)|^2} \left\| \frac{\sin u}{k\pi - u} \right\|_{\ell^2} \leq M \sqrt{\sum_{|k| > m} |R(\pi k)|^2},$$

где

$$M = \max_{u \in \mathbb{R}} \left\| \frac{\sin u}{k\pi - u} \right\|_{\ell^2} < \infty$$

(так как функция $\varphi(u) = \left\| \frac{\sin u}{k\pi - u} \right\|_{\ell^2}$ всюду принимает конечные значения и π -периодична).

При оценке первой суммы учитываем, что $|R| \leq 1$. Для $|u| \geq \sqrt{3}\pi m$ получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|k| \leq m} R(k\pi) \frac{(-1)^{k+1} \sin u}{\pi k - u} \right| &= \left| \frac{\sin u}{u} + \sin u \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \left(\frac{R(k\pi)}{\pi k - u} - \frac{R(-k\pi)}{\pi k + u} \right) \right| \\ &\leq \frac{|\sin u|}{|u|} \left(1 + |u| \sum_{k=1}^m \frac{1}{|u| - \pi k} + \frac{1}{|u| + \pi k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|\sin u|}{|u|} \left(1 + \sum_{k=1}^m \frac{2u^2}{u^2 - (\pi k)^2} \right) \\
&\leq \frac{|\sin u|}{|u|} \left(1 + \frac{2u^2 m}{u^2 - (\pi m)^2} \right) \leq \frac{|\sin u|}{|u|} (1 + 3m).
\end{aligned}$$

Таким образом, для всех

$$|u| \geq \max \left\{ \sqrt{3\pi m}; M^{-1} \left(\sum_{|k|>m} |R(\pi k)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

будет верна оценка

$$|R(u)| \leq \frac{1}{|u|} (2 + 3m).$$

Отметим, что полученная оценка для R достигается, например, на плотности ρ из статистической эргодической теоремы фон Неймана. Поэтому интересны плотности, для которых преобразование Фурье убывает быстрее.

2.2. Максимальные скорости. Если ρ задается сверткой (A) , то по формуле Бореля получаем, что

$$R(u) = c \frac{\sin^m \left(\frac{u}{m} \right)}{u^m}$$

для некоторой константы $c = c(m) > 0$. Тогда из формулы (1.1), записанной в терминах непрерывной в нуле меры μ , следует, что

$$I_t(\mu) = \int_{\mathbb{R}} |R(ts)|^2 d\mu(s) = c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^{2m} \left(\frac{ts}{m} \right)}{(ts)^{2m}} d\mu(s).$$

Рассмотрим максимальные скорости сходимости к нулю интеграла $I_t(\mu)$.

Теорема 2.1. *Справедливы следующие эквивалентности:*

$$\begin{aligned}
I_t(\mu) = \mathcal{O}(t^{-2m}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty &\iff \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(s)}{s^{2m}} < \infty; \\
I_t(\mu) = o(t^{-2m}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty &\iff \mu \equiv 0.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства импликаций достаточно рассмотреть прямые утверждения; обратные очевидны. Пусть $I_t(\mu) \leq At^{-2m}$ для всех $t > 0$. Тогда для любого $T > 0$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^{2m} \left(\frac{ts}{m} \right)}{s^{2m}} d\mu(s) dt \leq \frac{A}{c^2}.$$

Поскольку для $s \neq 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^{2m} \left(\frac{ts}{m} \right) dt &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\left(e^{\frac{its}{m}} - e^{-\frac{its}{m}} \right)^{2m}}{(2i)^{2m}} dt \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^{m+k}}{4^m} C_{2m}^k \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{i2ts(k-m)}{m}} dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^m}{4^m} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k \delta_{km} = \frac{C_{2m}^m}{4^m},$$

учитывая, что $\mu\{0\} = 0$, по теореме Фубини и лемме Фату, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(s)}{s^{2m}} \leq \frac{4^m A}{c^2 C_{2m}^m} < \infty.$$

Предположим теперь, что $I_t(\mu) = o(t^{-2m})$ при $t \rightarrow +\infty$. Введением конечной меры

$$d\eta(s) = \frac{d\mu(s)}{s^{2m}}$$

это соотношение сводится к

$$\int_{\mathbb{R}} \sin^{2m} \left(\frac{ts}{m} \right) d\eta(s) = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \sin \left(\frac{ts}{m} \right) \right\|_{L_{2m}(\mathbb{R}, d\eta)} = 0.$$

Неравенство Гёльдера

$$\left\| \sin \left(\frac{ts}{m} \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}, d\eta)} \leq \left\| \sin \left(\frac{ts}{m} \right) \right\|_{L_{2m}(\mathbb{R}, d\eta)} \eta^{\frac{m-1}{2m}}(\mathbb{R})$$

влечет

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \sin \left(\frac{ts}{m} \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}, d\eta)} = 0.$$

Из этого последнего соотношения по лемме 4 из [19] следует, что $\eta(\mathbb{R}) = 0$. Значит и $\mu(\mathbb{R}) = 0$. $\square$

2.3. Правильно меняющиеся функции. Поскольку максимальная скорость является степенной, естественно найти критерий для степенных скоростей с меньшим показателем степени. Для случая $m = 1$, т.е. для классической эргодической теоремы фон Неймана, критерий Качуровского для степенных скоростей был расширен (для дискретного времени) Гапошкиным в [2] на класс функций вида $u^{-\alpha}\varphi(u)$, $\alpha \in [0, 2)$, где φ — слабо колеблющаяся функция. Напомним, что функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется слабо колеблющейся (или медленно меняющейся в смысле Зигмунда), если для любого $\theta > 0$ при достаточно больших $u > 0$ функция $u^\theta \varphi(u)$ монотонно возрастает, а функция $u^{-\theta} \varphi(u)$ монотонно убывает. Класс слабо колеблющихся функций является подклассом медленно меняющихся в смысле Караматы функций, т.е. таких измеримых функций для которых справедливо равенство: для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)} = 1.$$

Функция $\psi(u) = u^\rho \varphi(u)$, где $\varphi(u)$ медленно меняющаяся в смысле Караматы, называется правильно меняющейся на бесконечности порядка $\rho \in \mathbb{R}$. Подробности о таких функциях можно почерпнуть из монографии Сенеты [9], а также из недавней статьи [21]. Мы покажем, что результат Гапошкина обобщается на все правильно меняющиеся функции с порядком $-\alpha$, где $\alpha \in [0, 2m)$. Приведем ключевые утверждения.

Как показывает следующая лемма, для оценок в одну сторону не нужны дополнительные условия на скорость сходимости.

Лемма 2.1. Пусть $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, и $I_t(\mu) \leq B\psi(t)$ для некоторой константы $B > 0$ при всех $t > 0$. Тогда для всех $\delta > 0$

$$\mu([- \delta, \delta]) \leq \frac{c^{-2}B}{\sin^{2m}(\frac{1}{m})} \psi\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Доказательство. Произвольное $\delta > 0$ представим в виде $\delta = \frac{1}{t}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu([- \delta, \delta]) &= \int_{[-\frac{1}{t}, \frac{1}{t}]} d\mu(s) \leq \frac{(\frac{1}{m})^{2m}}{\sin^{2m}(\frac{1}{m})} \int_{[-\frac{1}{t}, \frac{1}{t}]} \frac{\sin^{2m}(\frac{ts}{m})}{(\frac{ts}{m})^{2m}} d\mu(s) \\ &\leq \frac{c^{-2}}{\sin^{2m}(\frac{1}{m})} I_t(\mu) \leq \frac{c^{-2}B}{\sin^{2m}(\frac{1}{m})} \psi(t) = \frac{c^{-2}B}{\sin^{2m}(\frac{1}{m})} \psi\left(\frac{1}{\delta}\right). \end{aligned}$$

□

Следующая теорема Альянчи, Боянича и Томица [11, теорема 1] (см. также [9, теорема 2.7]) является ключевым ингредиентом для доказательства оценки в другую сторону.

Теорема 2.2. Пусть $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\theta > 0$ такие, что интеграл $\int_0^a u^{-\theta} f(u) du$ сходится для некоторого $a \in (0, +\infty)$. Тогда для любой медленно меняющейся в смысле Караматы функции φ , ограниченной на каждом конечном интервале из $(0, +\infty)$, справедливо соотношение

$$\int_0^a f(u) \varphi(tu) du \sim \varphi(t) \int_0^a f(u) du \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Сформулируем теперь критерий для всех возможных регулярных скоростей сходимости.

Теорема 2.3. Пусть $\psi(u) = u^{-\alpha} \varphi(u)$, где $\alpha \in [0, 2m)$ и φ — медленно меняющаяся в смысле Караматы функция, ограниченная на каждом конечном интервале из $(0, +\infty)$. Тогда справедлива эквивалентность

$$\mu([- \delta, \delta]) = \mathcal{O}\left(\psi\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \quad \text{при } \delta \rightarrow +0 \quad \Leftrightarrow \quad I_t(\mu) = \mathcal{O}(\psi(t)) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Импликация в обратную сторону следует из леммы 2.1. Для прямого утверждения получим сначала следующую оценку: для всех $t > 0$

$$\begin{aligned} I_t(\mu) &= c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^{2m}(\frac{ts}{m})}{(ts)^{2m}} d\mu(s) = 2mc^2 \int_0^\infty u^{2m-1} \mu\left(\left\{s \in \mathbb{R} : \frac{|\sin(\frac{ts}{m})|}{|ts|} > u\right\}\right) du \\ &= 2mc^2 \int_0^{\frac{1}{m}} u^{2m-1} \mu\left(\left\{s \in \mathbb{R} : \frac{|\sin(\frac{ts}{m})|}{|ts|} > u\right\}\right) du \\ &\leq 2mc^2 \int_0^{\frac{1}{m}} u^{2m-1} \mu\left(\left\{s \in \mathbb{R} : |s| \leq \frac{1}{tu}\right\}\right) du \\ &\leq 2mc^2 A \int_0^{\frac{1}{m}} u^{2m-1} (tu)^{-\alpha} \varphi(ut) du. \end{aligned}$$

Здесь (и далее в замечании 2.1) константа $A > 0$ определяется из условия теоремы: $\mu([- \delta, \delta]) \leq A\psi\left(\frac{1}{\delta}\right)$ для всех $\delta > 0$. Таким образом,

$$I_t(\mu) = \mathcal{O} \left(t^{-\alpha} \int_0^{\frac{1}{m}} u^{2m-\alpha-1} \varphi(ut) du \right) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Остается лишь применить теорему 2.2 для функции $f(u) = u^{2m-\alpha-1}$ на интервале $(0, \frac{1}{m})$. В качестве θ можно взять произвольное число из интервала $(0, 2m - \alpha)$. $\square$

Замечание 2.1. Для степенных скоростей $\psi(u) = u^{-\alpha}$, $\alpha \in [0, 2m)$ справедлива оценка

$$I_t(\mu) \leq 2mc^2 At^{-\alpha} \int_0^{\frac{1}{m}} u^{2m-\alpha-1} du = \frac{2c^2 A}{(2m - \alpha)m^{2m-\alpha-1}} t^{-\alpha}.$$

3. ОЦЕНКИ СКОРОСТИ ДЛЯ УСРЕДНЯЮЩИХ СЕТЕЙ ТИПА (B)

3.1. Максимальные скорости. Положим $R(s) = |r(s)|^2$; в случае усреднений (1.3) имеем $R(s) = e^{-2a|s|^b}$. Таким образом, нас интересует асимптотика интегралов

$$I_n(\mu) = \int_{\mathbb{R}} R^n(s) d\mu(s), \quad \text{и, соответственно,} \quad I_t(\mu) = \int_{\mathbb{R}} R^t(s) d\mu(s)$$

при $n \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим сначала максимально возможные скорости сходимости.

Теорема 3.1. Пусть $q \in (0, 1)$ тогда

$$I_t(\mu) = \mathcal{O}(q^t) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{найдется } \delta > 0 \text{ такое, что } \mu([- \delta, \delta]) = 0.$$

Если для любого $q \in (0, 1)$ имеется асимптотическое соотношение $I_t(\mu) = o(q^t)$ при $t \rightarrow +\infty$, то $I_t(\mu) \equiv 0$. Аналогичные утверждения справедливы для интегралов $I_n(\mu)$.

Доказательство. Если $\mu([- \delta, \delta]) = 0$ для некоторого $\delta > 0$, то

$$\int_{\mathbb{R}} R^t(s) d\mu(s) = \int_{|s| > \delta} R^t(s) d\mu(s) \leq \max_{|s| \geq \delta} R^t(s) \mu\{|s| \geq \delta\} = \mu(\mathbb{R}) q^t,$$

где $q = \max_{|s| \geq \delta} R(s) < 1$. Обратно, пусть для некоторых констант $A > 0$ и $q \in (0, 1)$ будет $I_t(\mu) \leq Aq^t$ при всех $t > 0$. Тогда

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{R(s)}{q} \right)^t d\mu(s) dt \leq A.$$

Полагая

$$g(s) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{R(s)}{q} \right)^t dt = \begin{cases} +\infty, & R(s) > q, \\ 1, & R(s) = q, \\ 0, & R(s) < q, \end{cases}$$

меняя интегрирование местами по теореме Тонелли и применяя лемму Фату, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} g(s) d\mu(s) \leq A.$$

Откуда заключаем, что $\mu(\{R(s) > q\}) = 0$. Поскольку R — непрерывная функция и $R(0) = 1$, открытое множество $\{R(s) > q\}$ содержит некоторую окрестность нуля вида $[-\delta, \delta]$. Следовательно, $\mu([- \delta, \delta]) = 0$.

Предположим теперь, что $I_t(\mu) = o(q^t)$ при $t \rightarrow +\infty$ для любого $q \in (0, 1)$. Тогда по доказанному $\mu(\{R(s) > q\}) = 0$. Устремляя $q \rightarrow +0$, получаем равенство $\mu(\{R(s) > 0\}) = 0$, т.е. мера μ сосредоточена на нулях функции R . В этом случае мы получаем, что $I_t(\mu) \equiv 0$.

Для интегралов $I_n(\mu)$ доказательство аналогично. Единственное отличие — вместо интегрирования $\frac{1}{T} \int_0^T$ нужно произвести суммирование $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N$. $\square$

Обсудим способ получения оценок для интеграла $I_t(\mu)$ по особенностям меры μ около нуля. В дальнейших рассуждениях будем предполагать, что R — четная функция, монотонно убывающая к нулю на бесконечности. Пусть для некоторого $A > 0$ имеется оценка

$$\mu([- \delta, \delta]) \leq A\varphi(\delta)$$

для всех $\delta > 0$, где $\varphi \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$. Тогда

$$\begin{aligned} I_t(\mu) &= \int_{\mathbb{R}} R^t(s) d\mu(s) = \int_0^1 \mu\{R^t(s) > u\} du \\ &= \int_0^1 \mu\{|s| < R^{-1}(u^{\frac{1}{t}})\} du \leq A \int_0^1 \varphi(R^{-1}(u^{\frac{1}{t}})) du. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что для некоторой константы $B > 0$ справедлива оценка интеграла

$$I_t(\mu) \leq B\psi(t)$$

для всех $t > 0$, где ψ — положительная дифференцируемая монотонно убывающая функция. Тогда

$$\begin{aligned} \mu([- \delta, \delta]) &= \int_{[- \delta, \delta]} d\mu(s) = R^{-t}(\delta) \int_{[- \delta, \delta]} R^t(s) d\mu(s) \\ &\leq R^{-t}(\delta) \int_{[- \delta, \delta]} R^t(s) d\mu(s) \leq R^{-t}(\delta) \int_{\mathbb{R}} R^t(s) d\mu(s) \leq BR^{-t}(\delta)\psi(t). \end{aligned}$$

Откуда

$$\mu([- \delta, \delta]) \leq B \inf_{t>0} R^{-t}(\delta)\psi(t) = BR^{-t_0}(\delta)\psi(t_0),$$

где t_0 — единственная стационарная точка, удовлетворяющая уравнению

$$(\ln \psi)'(t_0) = \ln R(\delta). \quad (3.1)$$

3.2. Степенные оценки. Применим описанный метод для получения критерия степенной сходимости.

Теорема 3.2. Пусть R — четная функция, монотонно убывающая к нулю на бесконечности, и константы $A, B, \alpha > 0$.

(1) Если $I_t(\mu) \leq Bt^{-\alpha}$ для всех $t > 0$, то

$$\mu([- \delta, \delta]) \leq B \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)} \quad \text{для всех } \delta > 0.$$

(2) Если $\mu([- \delta, \delta]) \leq A \ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)}$ для всех $\delta > 0$, то

$$I_t(\mu) \leq A\Gamma(\alpha + 1)t^{-\alpha} \quad \text{для всех } t > 0.$$

Доказательство. (1) Имеем $\psi(t) = t^{-\alpha}$. Находим $t_0 = t_0(\delta)$ из уравнения (3.1), получаем

$$t_0 = -\frac{\alpha}{\ln(R(\delta))}.$$

Откуда следует искомая оценка: для всех $\delta > 0$

$$\mu([- \delta, \delta]) \leq BR^{-t_0}(\delta)\psi(t_0) = BR^{-t_0}(\delta)t_0^{-\alpha} = B\left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)}.$$

(2) Имеем $\varphi(\delta) = \ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)}$. Тогда для всех $t > 0$ получаем

$$I_t(\mu) \leq A \int_0^1 \varphi(R^{-1}(u^{\frac{1}{t}})) du = A \int_0^1 \ln^\alpha(u^{-\frac{1}{t}}) du = At^{-\alpha} \int_0^1 \ln^\alpha\left(\frac{1}{u}\right) du.$$

Используя подстановку $\ln\left(\frac{1}{u}\right) = s$, приходим к искомой оценке

$$I_t(\mu) \leq At^{-\alpha} \int_0^\infty s^\alpha e^{-s} ds = A\Gamma(\alpha + 1)t^{-\alpha}.$$

□

Константа $A\Gamma(\alpha + 1)$ в утверждении (2) теоремы 3.2 неулущаема в классе всех конечных борелевских мер μ на $\mathbb{R}$. Более того, она неулущаема в классе спектральных мер унитарных представлений группы $\mathbb{R}$.

Действительно, рассмотрим последовательность мер μ_n с носителями в отрезках $[0, n]$:

$$d\mu_n(s) = \chi_{[0, n]}(s) \frac{d}{ds} \left(\ln^\alpha \frac{1}{R(s)} \right) ds.$$

Ввиду монотонности R на положительной полупрямой производная определена везде за исключением не более чем счетного множества точек (меры ноль). Для любого $\delta \in (0, n]$ имеем

$$\mu_n([- \delta, \delta]) = \int_0^\delta \frac{d}{ds} \ln^\alpha \frac{1}{R(s)} ds = \ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)},$$

т.е. $A = 1$. Для интеграла при этом получаем равенство

$$I_t(\mu_n) = \int_0^n R^t(s) \frac{d}{ds} \ln^\alpha \frac{1}{R(s)} ds = R^t(n) \ln^\alpha \frac{1}{R(n)} - \int_0^n \ln^\alpha \frac{1}{R(s)} dR^t(s).$$

Положим $y = \ln \frac{1}{R^t(n)}$, тогда получим

$$I_t(\mu) = t^{-\alpha} \left(y^\alpha e^{-y} + \int_0^y s^\alpha e^{-s} ds \right).$$

Нетрудно проверить, что выражение, стоящее в скобках, монотонно возрастает к $\Gamma(\alpha + 1)$ при $y \rightarrow +\infty$ (что происходит, когда $n \rightarrow \infty$).

Покажем, что меры μ_n могут быть реализованы как спектральные меры. Для этого достаточно в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ рассмотреть группу унитарных операторов умножения

$$U_t f(s) = e^{its} f(s).$$

Нетрудно проверить, что неподвижной точкой этой группы является только нулевая функция, а спектральная мера имеет вид $d\sigma_f(s) = |f(s)|^2 ds$. Таким образом, достаточно взять функции

$$f_n(s) = \chi_{[0,n]}(s) \sqrt{\frac{d}{ds} \left(\ln^\alpha \frac{1}{R(s)} \right)}, \quad n \geq 1.$$

Отметим, что с помощью этой же группы унитарных операторов доказывалась неулучшаемость констант для оценок в классической теореме фон Неймана (см. [19, 3.4]).

Замечание 3.1. Для усреднений типа (1.3) критерий степенной сходимости имеет вид:

$$\mu([- \delta, \delta]) = \mathcal{O}(\delta^{\alpha b}) \iff I_t(\mu) = \mathcal{O}(t^{-\alpha}).$$

3.3. Растянутые экспоненциальные скорости. Как видно из теоремы 3.1, интегралы $I_t(\mu)$ допускают любые скорости вплоть до экспоненциальных. Получим условия для растянутых экспоненциальных скоростей.

Теорема 3.3. Пусть R — четная функция, монотонно убывающая к нулю на бесконечности, и константы $A, B > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$.

(1) Если $I_t(\mu) \leq Bq^{t^\alpha}$ для всех $t > 0$ и некоторого $q \in (0, 1)$, то

$$\mu([- \delta, \delta]) \leq B \exp \left(- \left(\frac{Q}{\ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)$$

для всех $\delta > 0$, где $Q = \alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} \ln(\frac{1}{q})$.

(2) Если

$$\mu([- \delta, \delta]) \leq A \exp \left(- \left(\frac{Q}{\ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)$$

для всех $\delta > 0$ и некоторого $Q > 0$, то

$$I_t(\mu) \leq A \sqrt{2\pi Q (1 - \alpha)^\alpha \alpha^{1-\alpha}} t^{\frac{\alpha}{2}} q^{t^\alpha}$$

для всех достаточно больших $t > 0$, где $q = \exp \left(- \frac{Q}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \right)$.

Доказательство. (1) Действуем так же как при доказательстве теоремы 3.2 про степенные скорости. Имеем $\psi(t) = q^{t^\alpha}$. Находим $t_0 = t_0(\delta)$ из уравнения (3.1):

$$t_0 = \left(\frac{\alpha \ln(q)}{\ln(R(\delta))} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Откуда для всех $\delta > 0$ получаем

$$\mu([- \delta, \delta]) \leq BR^{-t_0}(\delta) \psi(t_0) = BR^{-t_0}(\delta) q^{t_0^\alpha} = B \exp \left(- \left(\frac{Q}{\ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right).$$

(2) Имеем

$$\varphi(\delta) = \exp \left(- \left(\frac{Q}{\ln^\alpha \frac{1}{R(\delta)}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right).$$

Тогда для всех $t > 0$ получаем

$$I_t(\mu) \leq A \int_0^1 \varphi(R^{-1}(u^{\frac{1}{t}})) du = A \int_0^1 \exp \left(- \left(\frac{Q}{\ln^\alpha \frac{1}{u^{\frac{1}{t}}}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) du.$$

Используя подстановку $\ln\left(\frac{1}{u}\right) = s$, приходим к интегралу

$$I_t(\mu) \leq A \int_0^\infty \exp\left(-\left(s + \left(\frac{Qt^\alpha}{s^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\right) ds.$$

Положим $T = Qt^\alpha$, $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ и сделаем в интеграле замену $s = Tu$, тогда

$$I_t(\mu) \leq AT \int_0^\infty \exp\left(-T\left(u + \frac{1}{u^\beta}\right)\right) du.$$

К получившемуся интегралу, для определения его асимптотики, применим метод Лапласа [10, глава 2], [8]. Поскольку гладкая функция $f(u) = -u - \frac{1}{u^\beta}$ имеет единственный максимум в точке

$$u_0 = \beta^{\frac{1}{\beta+1}} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha},$$

при $T \rightarrow \infty$ будет верно асимптотическое равенство

$$\int_0^\infty \exp\left(-T\left(u + \frac{1}{u^\beta}\right)\right) du = e^{Tf(u_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(u_0)}} \left(T^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(T^{-1})\right)$$

Подставляя значения

$$f(u_0) = -\frac{1}{(1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^\alpha}, \quad f''(u_0) = -\frac{1}{(1-\alpha)^\alpha\alpha^{1-\alpha}},$$

получим при достаточно больших $t > 0$

$$I_t(\mu) \leq AQt^{\frac{1}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{Qt^\alpha}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right) \sqrt{2\pi(1-\alpha)^\alpha\alpha^{1-\alpha}}.$$

□

Замечание 3.2. Теоремы 3.2 и 3.3 справедливы и для дискретной последовательности мер ν_n (возможно с немного другими константами).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Богачев. *Слабая сходимость мер*. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2016.
2. В.Ф. Гапошкин. О скорости убывания вероятностей ε -уклонений средних стационарных процессов // Мат. заметки. **64**:3, 366–372 (1998).
3. А.Г. Качуровский. Скорости сходимости в эргодических теоремах // Усп. мат. наук **51**:4, 73–124 (1996).
4. А.Г. Качуровский, И.В. Подвигин. Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Тр. моск. мат. о-ва **77**:1, 1–66 (2016).
5. А.Г. Качуровский, И.В. Подвигин, А.А. Свищёв. Максимальная поточечная скорость сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Зап. научн. семин. ПОМИ **498**, 18–25 (2020).
6. А.Г. Качуровский, И.В. Подвигин, В.Э. Тодиков, А.Ж. Хакимбаев. Спектральный критерий степенной скорости сходимости в эргодической теореме для $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ действий // Сиб. мат. ж. **65**:1, 92–114 (2024).
7. Ф. Оберхеттингер. *Преобразование Фурье распределений и их обращения. Таблицы*. М.: Наука. 1979.
8. Э.Я. Риекстыньш. *Асимптотические разложения интегралов. Том 2*. Рига: Зинатне. 1977.
9. Е. Сенета. *Правильно меняющиеся функции*. М.: Наука. 1985.

10. М.В. Федорюк. *Асимптотика. Интегралы и ряды*. М.: Наука. 1987.
11. S. Aljancic, R. Bojancic, M. Tomic. *Sur la valeur asymptotique d'une classe des integrales definies* // Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. **7**, 81–94 (1954).
12. M. Aloisio, S.L. Carvalho, C.R. Oliveira, E. Souza. *On spectral measures and convergence rate in von Neumann's ergodic theorem* // Monatsh. Math. **203**:3, 543–562 (2024).
13. J. Blum, B. Eisenberg. *Generalized summing sequences and the mean ergodic theorem* // Proc. Am. Math. Soc. **42**:2, 423–429 (1974).
14. P.L. Butzer, J.R. Higgins, R.L. Stens. *Classical and approximate sampling theorems; studies in the $L^P(\mathbb{R})$ and the uniform norm* // J. Approximation Theory. **137**:2, 250–263 (2005).
15. S. Das, J.A. Yorke. *Super convergence of ergodic averages for quasiperiodic orbits* // Nonlinearity **31**:2, 491–501 (2018).
16. N. Duignan, J.D. Meiss. *Distinguishing between regular and chaotic orbits of flows by the weighted Birkhoff average* // Physica D **449**, 133749 (2023).
17. G. Fang. *Whittaker — Kotelnikov — Shannon sampling theorem and aliasing error* // J. Approximation Theory. **85**:2, 115–131 (1996).
18. G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press, Boca Raton (1995).
19. A.G. Kachurovskii, I.V. Podvigin, V.E. Todikov. *Uniform convergence on subspaces in von Neumann's ergodic theorem with continuous time* // Sib. Elektron. Mat. Izv. **20**:1, 183–206 (2023).
20. A. Nevo. *Pointwise ergodic theorems for actions of groups* // in “Handbook of Dynamical Systems”, ed. B. Hasselblatt. Elsevier, Amsterdam, **1B**, 871–982 (2006).
21. E. Seneta. *Slowly varying functions in the Zygmund sense and generalized regular variation* // J. Math. Anal. Appl. **475**:2, 1647–1657 (2019).
22. A. Tempelman. *Ergodic Theorems for Group Actions. Informational and Thermodynamical Aspects*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1992).
23. Z. Tong, Y. Li. *Exponential convergence of the weighted Birkhoff average* // J. Math. Pures Appl. **188**, 470–492 (2024).

Иван Викторович Подвигин,
 Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
 проспект ак. Коптюга, 4,
 630090, г. Новосибирск, Россия
 E-mail: ipodvigin@math.nsc.ru