

УДК 517.547.7

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ЛЕОНТЬЕВА В ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

К.Г. МАЛЮТИН

Аннотация. Исследуется связь ρ -тригонометрически выпуклых функций с классом субгармонических функций. Установленная связь используется для доказательства новых неравенств, характеризующих ρ -тригонометрически выпуклые функции и нахождения интегральных уравнений первого рода, которым удовлетворяют ρ -тригонометрические функции. При более детальной разработке этой темы появляется свёрточное интегральное уравнение

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta - u) d\sigma(u),$$

где σ — конечная финитная мера. Результаты по теории этого уравнения излагаются следуя А.Ф. Леонтьеву, который изучал его в связи с теорией рядов Дирихле. Используя интерполирующую функцию Леонтьева, предлагаются дополнительные условия, гарантирующие, что непрерывное решение уравнения

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} a_R(u) h(\theta - u) du$$

при фиксированном R будет ρ -тригонометрической функцией.

Ключевые слова: субгармоническая функция, тригонометрически выпуклая функция, интегральное уравнение первого рода, свёрточное уравнение, интерполирующая функция Леонтьева.

Mathematics Subject Classification: 26A51, 31A05

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы исследуем связь ρ -тригонометрически выпуклых функций с классом субгармонических функций. Установленная связь используется для доказательства новых неравенств, характеризующих ρ -тригонометрически выпуклые функции и нахождения интегральных уравнений первого рода, которым удовлетворяют ρ -тригонометрические функции. При более детальной разработке этой темы появляется свёрточное интегральное уравнение

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta - u) d\sigma(u),$$

K.G. MALYUTIN, ON ONE APPLICATION OF LEONTIEV INTERPOLATING FUNCTION IN THEORY OF TRIGONOMETRICALLY CONVEX FUNCTIONS.

© МАЛЮТИН К.Г. 2025.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПОЛНЕНО ЗА СЧЕТ ГРАНТА РОССИЙСКОГО НАУЧНОГО ФОНДА № 24-21-00006, [HTTPS://RSCF.RU/PROJECT/24-21-00006/](https://rscf.ru/project/24-21-00006/).

Поступила 20 июня 2024 г.

где σ — конечная финитная мера. Используя интерполирующую функцию Леонтьева, предлагаются дополнительные условия, гарантирующие, что непрерывное решение уравнения

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} a_R(u)h(\theta - u)du$$

при фиксированном R будет ρ -тригонометрической функцией.

Структура работы следующая.

В разделе 2 приводятся предварительные сведения по теории субгармонических и ρ -тригонометрически выпуклых функций. В теореме 2.7 доказывается, что любую ρ -тригонометрически выпуклую функцию можно приблизить семейством бесконечно дифференцируемых ρ -тригонометрически выпуклых функций. В теореме 2.8 установлена связь между ρ -тригонометрически выпуклыми функциями и субгармоническими функциями.

В разделе 3 мы доказываем новые неравенства для ρ -тригонометрически выпуклых функций (теоремы 3.1 и 3.3). Как следствия из теорем 3.1 и 3.3 получаем критерии для того, чтобы непрерывная на всей оси функция h была ρ -тригонометрической (теоремы 3.2 и 3.6).

Раздел 4 посвящен изучению одного сверточного уравнения. Результаты по теории этого уравнения излагаются следуя А.Ф. Леонтьеву, который изучал его в связи с теорией рядов Дирихле. Используя интерполирующую функцию Леонтьева, предлагаются дополнительные условия, гарантирующие, что непрерывное решение интегрального уравнения будет ρ -тригонометрической функцией.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Символом $\langle a, b \rangle$ обозначается либо интервал, либо сегмент, либо один из двух видов полуинтервалов. Конечно, отрезок $\langle a, b \rangle$ — это вполне определенный отрезок, он не может быть интервалом и полуинтервалом одновременно. Использование символа $\langle a, b \rangle$ оправдано при исследовании тех свойств функций, которые могут быть определены для функций, заданных на интервале, сегменте или полуинтервале. Использование этого символа позволяет более кратко выражаться в некоторых случаях. Так, вместо того, чтобы говорить, что функция f определена на отрезке с концами a , b , который может быть интервалом, сегментом или полуинтервалом, можно сказать кратко — функция f определена на отрезке $\langle a, b \rangle$.

Мы установим связь между ρ -тригонометрически выпуклыми функциями и субгармоническими функциями. Изложение теории субгармонических функций можно найти в книгах Привалова [6], Хеймана и Кеннеди [8], Цудзи [13]. Мы начнём с необходимых определений и изложения тех свойств субгармонических функций, которые будут использованы в дальнейшем.

Определение 2.1. Функция $v(z)$, определенная в плоской области D со значениями из расширенной вещественной прямой $[-\infty, \infty]$ называется субгармонической в области D , если она удовлетворяет условиям:

- 1) $v(z) < \infty$ для любой точки $z \in D$,
- 2) существует точка $z \in D$ такая, что $v(z) > -\infty$,
- 3) функция $v(z)$ полунепрерывна сверху, то есть,

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} v(z) \leq v(z_0)$$

для любой точки $z_0 \in D$,

- 4) выполняется неравенство среднего, то есть, для любой точки $z_0 \in D$ и для любого $R > 0$, такого что круг $|z - z_0| \leq R$ находится в D , выполняется неравенство

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (2.1)$$

Определение 2.2. Функция $v(z)$ называется локально интегрируемой в области D , если она интегрируема по любому компакту, вложенному в область D .

В теории субгармонических функций доказывается, что всякая субгармоническая функция в области D является локально интегрируемой в этой области. В частности, субгармоническая функция не может обращаться в $-\infty$ ни на каком открытом множестве. Заметим ещё, что наряду с неравенством (2.1) выполняется неравенство

$$v(z_0) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\varphi}) r dr d\varphi, \quad (2.2)$$

причём в определении 2.1 неравенство (2.1) можно заменить на неравенство (2.2).

Сейчас будет дано определение главного для нас объекта — ρ -тригонометрически выпуклой функции (см. [3]). Часто запрет принимать бесконечные значения оказывается неудобным. Это, в частности, связано с тем, что вещественная прямая $(-\infty, \infty)$ не является компактом в отличие от расширенной вещественной прямой $[-\infty, \infty]$. Функции, принимающие только конечные вещественные значения, мы будем называть конечными. Априори мы не запрещаем функции принимать бесконечные значения.

Определение 2.3. Функция $h(\theta)$, определенная на отрезке $\langle \alpha, \beta \rangle$, со значениями из расширенной вещественной прямой $[-\infty, \infty]$ называется ρ -тригонометрически выпуклой на этом отрезке, если для любых $\theta_1, \theta_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, и для любого $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ выполняется неравенство

$$h(\theta) \leq \frac{\sin \rho(\theta_2 - \theta)}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)} h(\theta_1) + \frac{\sin \rho(\theta - \theta_1)}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)} h(\theta_2). \quad (2.3)$$

Чтобы избежать фразы «если сумма имеет смысл», в этом определении мы принимаем соглашение, что неравенство $x \leq \infty - \infty$ выполняется для любого $x \in [-\infty, \infty]$. Это соглашение не делает противоречивым наше определение.

Легко доказать, что определение 2.3 эквивалентно следующему.

Определение 2.4. Функция $h(\theta)$, определенная на отрезке $\langle \alpha, \beta \rangle$, со значениями из расширенной вещественной прямой $[-\infty, \infty]$ называется ρ -тригонометрически выпуклой на этом отрезке, если для любых $\theta_1, \theta_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, и для любой ρ -тригонометрической функции $H(\theta)$ из неравенств $h(\theta_1) \leq H(\theta_1)$, $h(\theta_2) \leq H(\theta_2)$ следует неравенство $h(\theta) \leq H(\theta)$ для любого $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Несомненно, существуют ситуации, когда удобнее пользоваться определением 2.4. Однако, заметим, что если пользоваться этим определением, то нужно рассматривать два варианта: первый, когда не существует функции $H(\theta)$, для которой справедливы неравенства $h(\theta_1) \leq H(\theta_1)$, $h(\theta_2) \leq H(\theta_2)$, и второй — когда такая функция существует. При использовании определения 2.3 вариантов рассматривать не нужно. Заметим еще, что согласно предложенным определениям пустая функция, то есть функция с пустой областью определения и любая функция, определенная на одноточечном множестве являются ρ -тригонометрически выпуклыми функциями.

Условимся о терминологии. Были определены ρ -тригонометрически выпуклые функции при любом $\rho > 0$. Наиболее часто встречаются 1-тригонометрически выпуклые функции. Следуя традиции, такие функции будем называть тригонометрически выпуклыми. Мы будем употреблять термин «общая тригонометрически выпуклая функция», то есть функция, которая является ρ -тригонометрически выпуклой для некоторого $\rho > 0$. Этот термин удобно применять в случаях, где нет необходимости фиксировать конкретное ρ .

Важнейший результат в теории субгармонических функций — это принцип максимума. Приведем такой вариант этого принципа.

Теорема 2.1. Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в ограниченной области D . Пусть M такое вещественное число, что для любой точки ζ на границе области D выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in D}}} v(z) \leq M.$$

Тогда для любой точки z области D выполняется неравенство $v(z) \leq M$, причём имеет место один из случаев:

- 1) $v(z) < M$ для любой точки z из D ,
- 2) $v(z) \equiv M$ в области D .

Важным обобщением принципа максимума на случай неограниченных областей служит теорема Фрагмена — Линделёфа. Не останавливаясь на общем случае, мы сформулируем теорему Фрагмена — Линделёфа для наиболее важной для нас области — для угла. Для её формулировки мы нуждаемся ещё в одном определении.

Определение 2.5. Пусть $A = A(\varphi_1, \varphi_2) = \{z : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$ — открытый угол. Пусть $\rho \geq 0$ — некоторое число. Число ρ называется формальным порядком субгармонической внутри угла A функции $v(z)$, если существуют числа $M_1, M_2 \geq 0$, такие что при $z \in A$ выполняется неравенство

$$v(z) \leq M_1 + M_2|z|^\rho.$$

Теорема 2.2. Пусть внутри угла $A(\varphi_1, \varphi_2)$ задана субгармоническая функция $v(z)$, для которой выполняются условия:

- 1) существует число M такое, что для любой точки ζ на границе угла выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in A}}} v(z) \leq M,$$

- 2) некоторое число $\rho \geq 0$ является формальным порядком функции $v(z)$ внутри угла $A(\varphi_1, \varphi_2)$,
- 3) выполняется неравенство $\varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\rho}$.

Тогда для любой точки $z \in A(\varphi_1, \varphi_2)$ выполняется неравенство $v(z) \leq M$.

ρ -тригонометрически выпуклые функции впервые появились в математике в связи со следующей теоремой, также принадлежащей Фрагмену и Линделёфу.

Теорема 2.3. Пусть $v(z)$ есть субгармоническая функция формального порядка $\rho > 0$ внутри угла $A(\alpha, \beta)$, и пусть

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r \rightarrow \infty}} \frac{v(re^{i\theta})}{r^\rho}$$

— её индикатор роста (это определение индикатора). Тогда $h(\theta)$ — ρ -тригонометрически выпуклая функция на интервале (α, β) .

Сформулируем без доказательства ещё две нужные нам теоремы из теории субгармонических функций. Первая из них — это теорема о характеристизации гладких субгармонических функций.

Теорема 2.4. Пусть $v(x, y)$ — дважды дифференцируемая функция в области D . Для того, чтобы она была субгармонической, необходимо и достаточно, чтобы в области D выполнялось неравенство

$$\Delta v(x, y) \geq 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа.

Вторая теорема — это теорема о сохранении субгармоничности при равномерном предельном переходе. Поскольку субгармонические функции могут обращаться в $-\infty$ в некоторых точках, слова «последовательность $v_n(z)$ равномерно сходится к $v(z)$ » означают, что последовательность ограниченных функций $\arctg v_n(z)$ равномерно сходится к функции $\arctg v(z)$.

Теорема 2.5. Пусть $v_n(z)$ — равномерно сходящаяся на компактах в области D последовательность субгармонических функций. Тогда функция

$$v(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z)$$

есть субгармоническая функция в области D , если $v(z) \not\equiv -\infty$.

Теоремы о приближении — важное средство для изучения различных классов функций. Наиболее известны теоремы о приближении непрерывных функций полиномами. Как мы увидим далее, любую функцию из класса ρ -тригонометрически выпуклых функций можно с произвольной точностью приблизить бесконечно дифференцируемой функцией из того же класса. Такое утверждение позволяет в некоторых случаях проводить доказательство только для класса бесконечно дифференцируемых ρ -тригонометрически выпуклых функций. Прежде, чем формулировать соответствующую теорему о приближении, приведём обозначения и некоторые факты из теории усреднения.

Обозначим

$$\omega(x) = c \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

где константу c выбирают так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1.$$

Известно, что $\omega(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на всей оси. Далее обозначим

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2.4)$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) dt = 1.$$

Оператор усреднения, ставящий в соответствие функции f функцию f_ε , определяется следующим образом

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau) \omega_\varepsilon(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \omega_\varepsilon(x - u) du.$$

Если $f(x)$ — локально интегрируемая функция на оси $(-\infty, \infty)$, то $f_\varepsilon(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на этой оси. Если $f(x)$ — локально интегрируемая функция на интервале (α, β) , то функция $f_\varepsilon(x)$ корректно определяется только на интервале $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$. Для этого подынтегральную функцию нужно считать равной нулю вне носителя функции ω_ε вне зависимости от того определена или не определена подынтегральная функция на этом множестве.

Однако, нас интересуют только непрерывные функции f . Для этого случая мы приведём без доказательства известное и просто доказываемое утверждение.

Теорема 2.6. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на интервале (α, β) . Тогда f_ε — бесконечно дифференцируемая функция на интервале $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$. Если $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$, то функции $f_\varepsilon(x)$ равномерно сходятся на сегменте $[a, b]$ к функции $f(x)$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Переходим теперь к случаю тригонометрически выпуклых функций.

Теорема 2.7. Пусть $h(\theta)$ — конечная ρ -тригонометрически выпуклая функция на интервале (α, β) , тогда $h_\varepsilon(\theta)$ есть бесконечно дифференцируемая ρ -тригонометрически выпуклая функция на интервале $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$. Если $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$, то $h_\varepsilon(x) \Rightarrow h(x)$ на сегменте $[a, b]$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Доказательство. Ввиду теоремы 2.6 нужно только доказать, что функция $h_\varepsilon(\theta)$ есть ρ -тригонометрически выпуклая функция на интервале $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$. Имеем

$$h_\varepsilon(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta - \tau) \omega_\varepsilon(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим функцию

$$F_1(\theta) = h'_\varepsilon(\theta) + \rho^2 \int_{\theta_0}^{\theta} h_\varepsilon(\varphi) d\varphi.$$

Учитывая определение функции h_ε , находим

$$\begin{aligned} F_1(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} (h'_+(\theta - \tau) + \rho^2 \int_{\theta_0}^{\theta} h(\varphi - \tau) d\varphi) \omega_\varepsilon(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(h'_+(\theta - \tau) + \rho^2 \int_{\theta_0 - \tau}^{\theta - \tau} h(s) ds \right) \omega_\varepsilon(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Так как из тригонометрической выпуклости функции h следует, что функция

$$F(\theta) = h'_+(\theta - \tau) + \rho^2 \int_{\theta_0 - \tau}^{\theta - \tau} h(s) ds$$

является возрастающей, тогда функция $F_1(\theta)$ также будет возрастающей. Отсюда следует (см., например, [3, §16]), что функция $h_\varepsilon(\theta)$ будет ρ -тригонометрически выпуклой. $\square$

Замечание 2.1. В работе Б.Н. Хабибуллина [7, Предложение 1.7] показано, что для любой субсферической функции h порядка $\rho \geq 0$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ существует последовательность n -раз непрерывно дифференцируемых субсферических функций того же порядка, которая, монотонно убывая, стремится к h . Отсюда, в частности, следует, что для любой ρ -тригонометрически выпуклой функции h существует последовательность n -раз непрерывно дифференцируемых ρ -тригонометрически выпуклых функций, которая, монотонно убывая, стремится к h .

В следующей теореме устанавливается связь между ρ -тригонометрически выпуклыми функциями и субгармоническими функциями.

Теорема 2.8. Пусть $h(\theta)$ — конечная функция на интервале (α, β) . Для того, чтобы функция h была ρ -тригонометрически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы функция $H(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$ была субгармонической функцией в угле $A(\alpha, \beta)$.

Замечание 2.2. Если $\beta - \alpha > 2\pi$, то угол $A(\alpha, \beta)$ не помещается в плоскости и расположен на римановой поверхности логарифма.

Теорема 2.8 хорошо известна для гладких ρ -тригонометрически выпуклых функций. В общем случае мы не встречали ее доказательство. Для полноты изложения, не претендуя на авторство, приводим ее со своим доказательством.

Доказательство. Необходимость. Пусть h — ρ -тригонометрически выпуклая функция. Вначале предположим дополнительно, что h — бесконечно дифференцируемая функция. Тогда функция $H(z) = |z|^\rho h(\arg z)$ будет также бесконечно дифференцируемой функцией в угле $A(\alpha, \beta)$. Поскольку оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

получим

$$\Delta H(re^{i\theta}) = r^{\rho-2}(h''(\theta) + \rho^2 h(\theta)).$$

Выполняется неравенство $\Delta H(z) \geq 0$ (см. [3, §16]). По теореме 2.4 функция H — субгармоническая. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть h — произвольная ρ -тригонометрически выпуклая функция. Из теоремы 2.7 следует, что существует последовательность $h_n(\theta)$ бесконечно дифференцируемых ρ -тригонометрически выпуклых функций на интервале $\left(\alpha + \frac{1}{n}, \beta - \frac{1}{n}\right)$, которая равномерно сходится к функции $h(\theta)$ на любом сегменте $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. По доказанному $H_n(z)$ является субгармонической в угле $A\left(\alpha + \frac{1}{n}, \beta - \frac{1}{n}\right)$. Причём эта последовательность является равномерно сходящейся на любом компакте, лежащем в угле $A(\alpha, \beta)$. По теореме 2.5 функция $H(z)$ будет субгармонической в угле $A(\alpha, \beta)$.

Достаточность. Предположим, что функция $H(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$ является субгармонической в угле $A(\alpha, \beta)$. Субгармоническая функция является полунепрерывной сверху функцией. Поэтому функция $h(\theta)$ будет также полунепрерывной сверху. Заметим ещё, что выполняется неравенство $h(\theta) < \infty$. Пусть $[\alpha_1, \beta_1]$ — произвольный сегмент, расположенный на интервале (α, β) . Функция $h(\theta)$ является полунепрерывной сверху функцией на компакте $[\alpha_1, \beta_1]$, не принимающей значения $+\infty$. По теореме Вейерштрасса функция $h(\theta)$ является ограниченной сверху функцией на сегменте $[\alpha_1, \beta_1]$. Поэтому число ρ будет формальным порядком субгармонической функции $H(z)$ в угле $A(\alpha_1, \beta_1)$. По теореме 2.3 функция $h(\theta)$ будет ρ -тригонометрически выпуклой функцией на интервале (α_1, β_1) , и, следовательно, на интервале (α, β) . $\square$

Установленная связь будет использована для доказательства новых неравенств, характеризующих ρ -тригонометрически выпуклые функции и нахождения интегральных уравнений первого рода, которым удовлетворяют ρ -тригонометрические функции.

3. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ρ -ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 3.1. Пусть h — не тождественно равная $-\infty$ нигде не обращающаяся в $+\infty$ полунепрерывная сверху функция на интервале (α, β) . Для того, чтобы h была ρ -тригонометрически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\theta \in (\alpha, \beta)$ и для любого $R \in (0, 1]$ такого, что $[\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R] \subset (\alpha, \beta)$ выполнялось неравенство

$$h(\theta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2R \cos(\varphi - \theta) + R^2)^{\frac{\rho}{2}} h(\operatorname{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})) d\varphi, \quad (3.1)$$

где $\operatorname{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})$ определяется из условия, что он принадлежит написанному выше сегменту.

Доказательство. Необходимость. Пусть h — ρ -тригонометрически выпуклая функция. Тогда по теореме 2.8 функция $H(z) = |z|^\rho h(\operatorname{Arg} z)$ будет субгармонической в угле $A(\alpha, \beta)$. Если R удовлетворяет условиям теоремы, то круг $\{z : |z - e^{i\theta}| \leq R\}$ лежит в угле $A(\alpha, \beta)$. По неравенству среднего для субгармонической функции (неравенство (2.1)) имеем

$$H(e^{i\theta}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{i\theta} + Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Это неравенство совпадает с (3.1).

Достаточность. Пусть теперь h удовлетворяет условиям, сформулированным в первом предложении текста теоремы и неравенству (3.1). Рассмотрим функцию

$$H(z) = |z|^\rho h(\operatorname{Arg} z)$$

в угле $A(\alpha, \beta)$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям 1)–3) из определения 2.1 субгармонической функции. Проверим для этой функции неравенство среднего. Пусть $z_0 \in A(\alpha, \beta)$, а $R_1 > 0$ такое, что $\{z : |z - z_0| \leq R_1\} \subset A(\alpha, \beta)$. Неравенство среднего имеет вид

$$H(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(z_0 + R_1 e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Если $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, то оно также записывается в виде

$$r_0^\rho h(\theta_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |r_0 e^{i\theta_0} + R_1 e^{i\varphi}|^\rho h(\operatorname{Arg}(r_0 e^{i\theta_0} + R_1 e^{i\varphi})) d\varphi.$$

Деля обе части неравенства на r_0^ρ , получим эквивалентное неравенство

$$h(\theta_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i\theta_0} + Re^{i\varphi}|^\rho h(\operatorname{Arg}(e^{i\theta_0} + Re^{i\varphi})) d\varphi,$$

где $R = \frac{R_1}{r_0}$. Это неравенство по предположению выполняется. Следовательно, функция H — субгармоническая. По теореме 2.8 функция h есть ρ -тригонометрически выпуклая функция. $\square$

Докажем теперь следующее следствие этой теоремы.

Теорема 3.2. *Для того, чтобы непрерывная на всей оси функция h была ρ -тригонометрической, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе интегральных уравнений, $R \in (0, 1]$:*

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2R \cos(\varphi - \theta) + R^2)^{\frac{\rho}{2}} h(\text{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})) d\varphi. \quad (3.2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть h — ρ -тригонометрическая функция. Тогда функции h и $-h$ будут ρ -тригонометрически выпуклыми функциями. Для обеих этих функций по теореме 3.1 будет выполняться неравенство (3.1). Это даёт равенство (3.2).

Достаточность. Пусть h — непрерывная на всей оси функция, для которой при любом $R \in (0, 1]$ выполняется равенство (3.2). По теореме 3.1 каждая из функций h и $-h$ будет ρ -тригонометрически выпуклой функцией. Следовательно, h — ρ -тригонометрическая функция. $\square$

Заметим, что интегральное уравнение (3.2) записано в нестандартном для теории интегральных уравнений виде, поскольку неизвестная функция h входит в интеграл с достаточно сложным аргументом

$$\psi = \text{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi}). \quad (3.3)$$

Мы придём к стандартному виду, если вместо переменной интегрирования φ введём переменную ψ , связанную с φ равенством (3.3). Нужно только соблюдать осторожность, поскольку функция $\psi(\varphi)$ не является взаимнооднозначной на сегменте $[0, 2\pi]$.

Лемма 3.1. *Пусть h — измеримая функция на сегменте $[\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R]$, где R — некоторое число из полуинтервала $(0, 1]$. Тогда, если существует один из написанных ниже интегралов, то существует и второй и выполняется равенство*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2R \cos(\varphi - \theta) + R^2)^{\frac{\rho}{2}} h(\arg(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\arcsin R}^{\arcsin R} \frac{(\cos u + \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1} + (\cos u - \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{R^2 - \sin^2 u}} h(\theta - u) du. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Доказательство. Мы используем стандартные обозначения

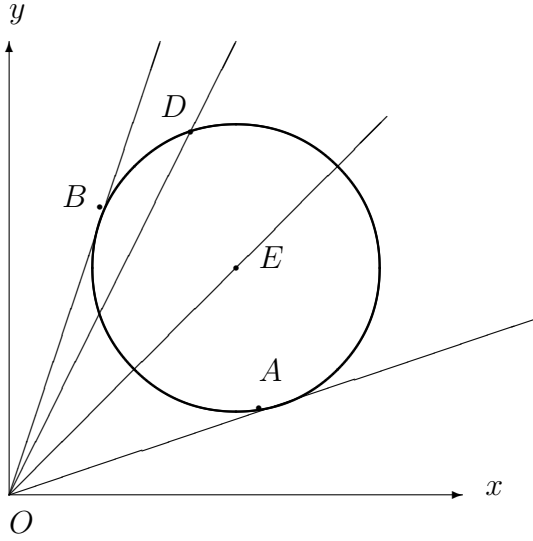
$$a_+ = \max(a, 0), \quad a_- = \max(-a, 0).$$

Здесь слова «существует интеграл $\int f(x)dx$ » означают одно из двух:

- 1) $f(x) \in L_1$ и тогда написанный интеграл — это просто интеграл Лебега,
- 2) пространству L_1 принадлежит одна и только одна из двух функций $f_+(x)$, $f_-(x)$, и тогда интеграл равен бесконечности с соответствующим знаком. Например, если $f_+ \in L_1$, то интеграл равен $-\infty$.

Поскольку измеримость функции h эквивалентна измеримости двух функций h_+ и h_- , доказательство леммы достаточно проводить только для положительных функций. Для большей наглядности последующего доказательства мы используем следующий рисунок.

На рисунке изображена плоскость $w = e^{i\theta} + z$.



Точка E с аффиксом $e^{i\theta}$ есть центр окружности радиуса $R \in (0, 1]$, O — начало координат, OA и OB — касательные к окружности, прямая OD — это произвольная прямая, проходящая через O и некоторую точку D окружности.

Имеем $\angle AOE = \angle EOB = \arcsin R$. Поэтому при фиксированном R величина

$$\psi = \text{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi}) \quad (3.5)$$

меняется на сегменте $[\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R]$, когда φ пробегает сегмент $[0, 2\pi]$.

Пусть

$$A = e^{i\theta} + Re^{i\gamma_1}, \quad B = e^{i\theta} + Re^{i\gamma_2}.$$

Величины γ_1 и γ_2 мы выбираем так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \gamma_2 - \gamma_1 < 2\pi$. Решение уравнения (3.5) относительно переменной φ , лежащее на интервале (γ_1, γ_2) , мы будем обозначать $\varphi_2 = \varphi_2(\psi)$, а решение того же уравнения, лежащее на интервале $(\gamma_2, \gamma_1 + 2\pi)$, мы будем обозначать $\varphi_1 = \varphi_1(\psi)$.

Поскольку подынтегральная функция в интеграле, стоящем в левой части равенства (3.4), имеет период 2π , мы можем написать

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2R \cos(\varphi - \theta) + R^2)^{\frac{p}{2}} h(\text{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} (1 + 2R \cos(\varphi - \theta) + R^2)^{\frac{p}{2}} h(\text{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})) d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1 + 2\pi} (1 + 2R \cos(\varphi - \theta) + R^2)^{\frac{p}{2}} h(\text{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})) d\varphi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В каждом из интегралов, стоящих в правой части равенства (3.6) введём новую переменную интегрирования по формуле (3.5). Имеем

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + Re^{i\varphi} &= |e^{i\theta} + Re^{i\varphi}| e^{i\psi}, \\ (e^{i\theta} + Re^{i\varphi})^2 &= (e^{i\theta} + Re^{i\varphi})(e^{-i\theta} + Re^{-i\varphi}) e^{2i\psi}, \\ e^{2i\psi} &= \frac{e^{i\theta} + Re^{i\varphi}}{e^{-i\theta} + Re^{-i\varphi}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Дифференцируя равенство (3.7), получим

$$2ie^{2i\psi}d\psi = \frac{iRe^{i\varphi}(e^{-i\theta} + Re^{-i\varphi}) + iRe^{-i\varphi}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})}{(e^{-i\theta} + Re^{-i\varphi})^2}d\varphi.$$

Это даёт

$$e^{2i\psi}d\psi = \frac{R(R + \cos(\varphi - \theta))}{(e^{-i\theta} + Re^{-i\varphi})^2}d\varphi.$$

Подставляя в эту формулу величину $e^{2i\psi}$ из формулы (3.7), получим

$$d\varphi = \frac{1 + 2R\cos(\varphi - \theta) + R^2}{R(R + \cos(\varphi - \theta))}d\psi. \quad (3.8)$$

Равенство (3.6) после введения новой переменной ψ преобразуется к виду

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta - \arcsin R}^{\theta + \arcsin R} \left[\frac{(1 + 2R\cos(\varphi_2 - \theta) + R^2)^{\frac{\rho}{2}+1}}{R(R + \cos(\varphi_2 - \theta))} - \frac{(1 + 2R\cos(\varphi_1 - \theta) + R^2)^{\frac{\rho}{2}+1}}{R(R + \cos(\varphi_1 - \theta))} \right] h(\psi)d\psi. \quad (3.9)$$

Теперь наша задача — упростить подынтегральную функцию в формуле (3.9). Из равенства (3.7) следует

$$Re^{2i(\varphi-\theta)} - (e^{2i(\psi-\theta)} - 1)e^{i(\varphi-\theta)} - Re^{2i(\psi-\theta)} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi-\theta)} &= \frac{e^{2i(\psi-\theta)} - 1 \pm \sqrt{(e^{2i(\psi-\theta)} - 1)^2 + 4R^2e^{2i(\psi-\theta)}}}{2R} \\ &= \frac{e^{2i(\psi-\theta)} - 1 \pm 2e^{i(\psi-\theta)}\sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)}}{2R}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Заметим, что на интервале $[\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R]$ величина $R^2 - \sin^2(\psi - \theta)$ не обращается в ноль. Выбор знака $+$ или $-$ в правой части формулы (3.10) даёт величины $e^{i(\varphi_1-\theta)}$ и $e^{i(\varphi_2-\theta)}$ в левой части этой формулы. Соображения непрерывности показывают, что каждой из величин $e^{i(\varphi_1-\theta)}$, $e^{i(\varphi_2-\theta)}$ на всём интервале $(\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R)$ соответствует один и тот же знак $+$ или $-$. Если $\psi = 0$, то $e^{i(\varphi-\theta)} = \pm 1$. Для величины $|e^{i\theta} + Re^{i\varphi}|$ получаем значения $1 + R$ и $1 - R$. Так как точка D расположена дальше от нуля, чем точка C , находим

$$e^{i(\varphi_2-\theta)} = e^{i(\psi-\theta)} \frac{i\sin(\psi - \theta) + \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)}}{R}, \quad (3.11)$$

$$e^{i(\varphi_1-\theta)} = e^{i(\psi-\theta)} \frac{i\sin(\psi - \theta) - \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)}}{R}. \quad (3.12)$$

Из формул (3.11), (3.12) следует

$$\begin{aligned} R\cos(\varphi_2 - \theta) &= -\sin^2(\psi - \theta) + \cos(\psi - \theta)\sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)}, \\ R\cos(\varphi_1 - \theta) &= -\sin^2(\psi - \theta) - \cos(\psi - \theta)\sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)}, \\ 1 + 2R\cos(\varphi_2 - \theta) + R^2 &= \left(\cos(\psi - \theta) + \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} \right)^2, \\ 1 + 2R\cos(\varphi_1 - \theta) + R^2 &= \left(\cos(\psi - \theta) - \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} \right)^2, \end{aligned}$$

$$R^2 + R \cos(\varphi_2 - \theta) = \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} \left(\cos(\psi - \theta) + \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} \right),$$

$$R^2 + R \cos(\varphi_1 - \theta) = -\sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} \left(\cos(\psi - \theta) - \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} \right).$$

Заметим, что при $\psi \in (\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R)$ выполняется неравенство

$$\cos(\psi - \theta) - \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} > 0.$$

Подставляя полученные величины в (3.9), окончательно находим

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta - \arcsin R}^{\theta + \arcsin R} \left[\left(\cos(\psi - \theta) + \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} \right)^{\rho+1} + \left(\cos(\psi - \theta) - \sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)} \right)^{\rho+1} \right] \frac{h(\psi)}{\sqrt{R^2 - \sin^2(\psi - \theta)}} d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\arcsin R}^{\arcsin R} \frac{(\cos u + \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1} + (\cos u - \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{R^2 - \sin^2 u}} h(\theta - u) du.$$

Таким образом, применение теоремы о замене переменных даёт равенство (3.4). $\square$

Обозначим

$$a_R(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{(\cos u + \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1} + (\cos u - \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{R^2 - \sin^2 u}}, & \text{если } |u| < \arcsin R; \\ 0, & \text{если } |u| \geq \arcsin R. \end{cases}$$

С помощью леммы 3.1 теоремы 3.1 и 3.2 переформулируются следующим образом.

Теорема 3.3. Пусть h — не тождественно равная $-\infty$, нигде не обращающаяся в $+\infty$, полунепрерывная сверху функция на интервале (α, β) . Для того, чтобы h была ρ -тригонометрически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\theta \in (\alpha, \beta)$ и для любого $R \in (0, 1]$ такого, что $[\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R] \subset (\alpha, \beta)$, выполнялось неравенство

$$h(\theta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\arcsin R}^{\arcsin R} a_R(u) h(\theta - u) du.$$

Теорема 3.4. Для того, чтобы непрерывная на всей оси функция h была ρ -тригонометрической, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе интегральных уравнений, $R \in (0, 1]$:

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} a_R(u) h(\theta - u) du. \quad (3.13)$$

Далее мы увидим, что справедливы варианты теорем 3.3 и 3.4 с заменой ядра $a_R(u)$ на другое ядро. Обозначим при $R \in (0, 1]$

$$b_R(u) = \begin{cases} \frac{(\cos u + \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} - (\cos u - \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+2}}{\pi(\rho+2)R^2}, & \text{если } |u| \leq \arcsin R; \\ 0, & \text{если } |u| > \arcsin R. \end{cases}$$

Теорема 3.5. Пусть h — не тождественно равная $-\infty$, нигде не обращающаяся в $+\infty$, полунепрерывная сверху функция на интервале (α, β) . Для того, чтобы h была ρ -тригонометрически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\theta \in (\alpha, \beta)$ и любого $R \in (0, 1]$ такого, что $[\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R] \subset (\alpha, \beta)$, выполнялось неравенство

$$h(\theta) \leq \int_{-\arcsin R}^{\arcsin R} b_R(u) h(\theta - u) du. \quad (3.14)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть h — ρ -тригонометрически выпуклая функция, и пусть R такое, как в условии теоремы. По теореме 3.3 для любого $r \in (0, R]$ будет выполняться неравенство

$$h(\theta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\arcsin r}^{\arcsin r} \frac{(\cos u + \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+1} + (\cos u - \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{r^2 - \sin^2 u}} h(\theta - u) du.$$

Умножим обе части неравенства на r и проинтегрируем по r по сегменту $[0, R]$. Учитывая, что

$$\int_0^R r dr = \frac{1}{2} R^2,$$

и переставляя в правой части порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} h(\theta) &\leq \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{\arcsin R} \int_{\sin u}^R r \left(\frac{(\cos u + \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{r^2 - \sin^2 u}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\cos u - \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{r^2 - \sin^2 u}} \right) dr h(\theta - u) du \\ &\quad + \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\arcsin R}^0 \int_{-\sin u}^R r \left(\frac{(\cos u + \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{r^2 - \sin^2 u}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\cos u - \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{r^2 - \sin^2 u}} \right) dr h(\theta - u) du \\ &= \frac{1}{\pi(\rho+2)R^2} \int_0^{\arcsin R} \left((\cos u + \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} \right. \\ &\quad \left. - (\cos u - \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} \right) \Big|_{\sin u}^R h(\theta - u) du \\ &\quad + \frac{1}{\pi(\rho+2)R^2} \int_{-\arcsin R}^0 \left((\cos u + \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} \right. \\ &\quad \left. - (\cos u - \sqrt{r^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} \right) \Big|_{-\sin u}^R h(\theta - u) du \\ &= \int_{-\arcsin R}^{\arcsin R} b_R(u) h(\theta - u) du. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть функция h обладает свойствами, перечисленными в первом предложении теоремы и, кроме того, удовлетворяет неравенству (3.14). Обозначим $H(z) = |z|^\rho h(\arg z)$. Тогда функция H удовлетворяет условиям 1)–3) из определения 2.1 субгармонической функции. Как следует из замечания к определению 2.1, для доказательства субгармоничности функции $H(z)$ осталось проверить, что выполняется неравенство

$$H(z_0) \leq \frac{1}{\pi R_1^2} \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} H(z_0 + r_1 e^{i\varphi}) r_1 dr_1 d\varphi \quad (3.15)$$

для любых z_0 и R_1 таких, что круг $\{z : |z - z_0| \leq R_1\}$ лежит в углу $A(\alpha, \beta)$. Пусть $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. С учётом определения функции H неравенство (3.15) переписывается в виде

$$r_0^\rho h(\theta_0) \leq \frac{1}{\pi R_1^2} \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} |r_0 e^{i\theta_0} + r_1 e^{i\varphi}|^\rho h(\arg(r_0 e^{i\theta_0} + r_1 e^{i\varphi})) r_1 dr_1 d\varphi.$$

Обозначим $R = \frac{R_1}{r_0}$. Если в интеграле переменную интегрирования r_1 заменить на новую переменную $r = \frac{r_1}{r_0}$, то увидим, что написанное выше неравенство эквивалентно неравенству

$$h(\theta_0) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} |e^{i\theta_0} + r e^{i\varphi}|^\rho h(\arg(e^{i\theta_0} + r e^{i\varphi})) r dr d\varphi. \quad (3.16)$$

Из леммы 3.1 следует, что это неравенство эквивалентно неравенству

$$h(\theta_0) \leq \frac{2}{R^2} \int_0^R \int_{-\arcsin r}^{\arcsin r} a_r(u) h(\theta - u) r du dr.$$

Теперь повторение рассуждений из первой части доказательства нашей теоремы показывает, что написанное неравенство эквивалентно неравенству (3.14). Тем самым, субгармоничность функции H доказана. Пусть $[\alpha_1, \beta_1]$ — произвольный сегмент такой, что $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$. Из полунепрерывности функции h следует, что эта функция ограничена сверху на сегменте $[\alpha_1, \beta_1]$. Из этого, в свою очередь, следует, что число ρ является формальным порядком функции H в углу $A(\alpha_1, \beta_1)$. Далее из теоремы 2.3 следует, что функция h будет ρ -тригонометрически выпуклой на интервале (α_1, β_1) и, следовательно, на интервале (α, β) . $\square$

Теорема 3.6. *Для того, чтобы непрерывная на всей оси функция h была ρ -тригонометрической, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе интегральных уравнений, $R \in (0, 1]$:*

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} b_R(u) h(\theta - u) du. \quad (3.17)$$

Эта теорема доказывается прямым повторением доказательства теоремы 3.2. При этом ссылку на теорему 3.1 следует заменить ссылкой на теорему 3.5.

Равенства (3.13), (3.17) позволяют вычислить некоторые интегралы. Остановимся на этом более подробно. Возьмём в этих равенствах $h(\theta) = \cos \rho \theta$. Мы получим

$$\cos \rho \theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\arcsin R}^{\arcsin R} \frac{(\cos u + \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1} + (\cos u - \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{R^2 - \sin^2 u}} \cos \rho(\theta - u) du,$$

$$\cos \rho \theta = \frac{1}{\pi(\rho+2)R^2} \int_{-\arcsin R}^{\arcsin R} \left[(\cos u + \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} - (\cos u - \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} \right] \cos \rho(\theta - u) du.$$

С помощью тождества $\cos \rho(\theta - u) = \cos \rho \theta \cos \rho u + \sin \rho \theta \sin \rho u$ находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\arcsin R} \frac{(\cos u + \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1} + (\cos u - \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+1}}{\sqrt{R^2 - \sin^2 u}} \cos \rho u du &= 1, \\ \frac{2}{\pi(\rho+2)R^2} \int_0^{\arcsin R} \left[(\cos u + \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} - (\cos u - \sqrt{R^2 - \sin^2 u})^{\rho+2} \right] \cos \rho u du &= 1. \end{aligned}$$

Заметим ещё, что мы доказали формулы в предположении, что $\rho > 0$. Однако, из теоремы единственности для аналитических функций следует, что эти формулы справедливы для всех комплексных ρ . При этом, конечно, последний интеграл при $\rho = -2$ нужно понимать соответствующим образом.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ЛЕОНТЬЕВА

В теоремах 3.4, 3.6 утверждается, что всякая ρ -тригонометрическая функция удовлетворяет интегральным уравнениям (3.13), (3.17) при любом $R \in (0, 1]$. Верно и обратное. Если непрерывная функция h удовлетворяет при каждом $R \in (0, 1]$ интегральному уравнению (3.13) или (3.17), то h — ρ -тригонометрическая функция.

Пусть непрерывная на всей оси функция h удовлетворяет при некотором $R \in (0, 1]$ интегральному уравнению (3.13) или (3.17). Следует ли из этого, что h — ρ -тригонометрическая функция? Как мы увидим, далее ответ отрицательный. Поэтому естественно встаёт такой вопрос: какие дополнительные ограничения на функцию h гарантируют, что эта функция является ρ -тригонометрической? Мы приводим два типа таких ограничений.

Уравнения (3.13), (3.17) являются представителями свёрточных уравнений. Поэтому мы изложим, частично без доказательств, несколько результатов, относящихся к теории таких уравнений. Вначале заметим, что если функция h есть непрерывное решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta - u) d\sigma(u) = h(\theta), \quad (4.1)$$

то h является решением уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta - u) d\sigma_1(u) = 0, \quad (4.2)$$

где $\sigma_1 = \sigma - \delta$, δ — мера Дирака. Это мотивирует то, что в дальнейшем мы ограничимся изучением уравнения

$$\int_{-q}^q F(\theta - u) d\sigma(u) = 0, \quad (4.3)$$

где σ — конечная (знакопеременная) мера, носитель которой содержит точки $-q$ и q . То, что рассматривается симметричный сегмент $[-q, q]$ — это несущественное ограничение. Случай, когда мера σ — не финитная, также является предметом многочисленных исследований. Результаты применяются, в частности, для изучения уравнения Винера — Хопфа. Но это не связано с темой работы. Поэтому мы ограничимся только ссылками на работы [1], [2].

Первые, основополагающие результаты для уравнения (4.3) получил Л. Шварц [12]. Об этих результатах можно прочесть в комментариях к §40 в книге [9]. Авторы этой книги ссылаются также на работы Кахана [10], [11]. Мы же нужные результаты по теории уравнения (4.3) изложим следуя А.Ф. Леонтьеву [4], [5], который изучал уравнение (4.3) в связи с теорией рядов Дирихле. Отметим, что в книге [4], теорема 6.4.1, изложен основной результат Шварца. В связи с уравнением (4.3) рассматривается функция

$$L(\lambda) = \int_{-q}^q e^{-i\lambda t} d\sigma(t),$$

которая называется характеристической функцией уравнения (4.3). Это название оправдывается тем, что если λ_k есть корень функции $L(\lambda)$ кратности n_k , то, как легко проверить, функция

$$h_k(\theta) = P_k(\theta)e^{i\lambda_k\theta}, \quad (4.4)$$

где P_k — произвольный полином степени не выше $n_k - 1$, является решением уравнения (4.3). Решения вида $P(\theta)e^{i\lambda\theta}$ называются элементарными решениями уравнения (4.3). Легко видеть, что равенством (4.4) задаётся общий вид элементарных решений. Л. Шварц доказал, что множество всех непрерывных решений уравнения (4.3) совпадает с замыканием в топологии равномерной сходимости на компактах линейной оболочки элементарных решений. Известно [4, гл.1, §4, пункт 3], что функция $L(\lambda)$ имеет бесконечное число корней. Тем самым, линейное пространство непрерывных решений уравнения (4.3), а, следовательно, учитывая (4.1) и (4.2), и пространство решений уравнения (3.13), будет бесконечномерным. Это доказывает объявленное ранее утверждение, что среди решений уравнения (3.13) при любом конкретном $R \in (0, 1]$ есть функции, не представимые в виде $A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta$, то есть функции, не являющиеся ρ -тригонометрическими.

В связи с уравнением (4.3) А.Ф. Леонтьев по произвольной непрерывной функции F строит функцию

$$\omega(\mu, \alpha, F) = -ie^{-i\alpha\mu} \int_{-q}^q \int_0^t F(\xi + \alpha - t) e^{-i\mu\xi} d\xi d\sigma(t),$$

которую он называет интерполирующей. Если λ_k — корень кратности n_k функции $L(\lambda)$, то для любой функции F справедливо равенство

$$P_k(z)e^{i\lambda_k z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega(\mu, \alpha, F)}{L(\mu)} e^{-i\mu z} d\mu, \quad (4.5)$$

где $P_k(z)$ — некоторый полином степени не выше $n_k - 1$, C_k — окружность с центром в точке λ_k такая, что замкнутый круг, ограниченный этой окружностью, не содержит других корней функции $L(\lambda)$. Величина $P_k(z)$ называется коэффициентом Фурье функции F , отвечающим корню λ_k характеристического уравнения. Если

$$F(t) = \sum_{k=1}^n Q_k(t)e^{i\lambda_k t}, \quad \deg Q_k \leq n_k - 1,$$

то коэффициент Фурье $P_k(z)$ функции F равен $Q_k(z)$. Это оправдывает название «интерполирующая функция» для функции $\omega(\mu, \alpha, F)$. Далее приводятся два факта, взятые из книг А.Ф. Леонтьева, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем. Первый из них в книге [4] формулируется как теорема 4.3.3.

Теорема 4.1. Пусть $F(t)$ — непрерывная функция на оси $(-\infty, \infty)$. Если все коэффициенты Фурье функции F равны нулю, то функция F есть тождественный ноль.

Следующее предложение таково. Функция $\omega(\mu, \alpha, F)$ зависит от произвольного вещественного параметра α . Тем не менее для решений уравнения (4.3) коэффициент Фурье не зависит от α . Действительно,

$$\omega(\mu, \alpha, F) = -i \int_{-q}^q \int_{\alpha-t}^{\alpha} F(\eta) e^{-i\mu(\eta+t)} d\eta d\sigma(t),$$

$$\frac{\partial \omega(\mu, \alpha, F)}{\partial \alpha} = -i \int_{-q}^q F(\alpha) e^{-i\mu(\alpha+t)} d\sigma(t) - e^{-i\mu\alpha} \int_{-q}^q F(\alpha-t) d\sigma(t) = -ie^{-i\mu\alpha} F(\alpha) L(\mu),$$

так как последний из написанных интегралов обращается в ноль. Если теперь в интеграл (4.5) вместо $\omega(\mu, \alpha, F)$ подставить $\frac{\partial \omega(\mu, \alpha, F)}{\partial \alpha}$, то получим ноль. Из этого следует независимость $P_k(z)$ от α .

В дополнение к изложенному докажем утверждение, которое уместно назвать теоремой об обращении в ноль коэффициента Фурье.

Теорема 4.2. Пусть F — непрерывное на всей оси решение уравнения (4.3), $L(\lambda)$ — характеристическая функция этого уравнения, λ_k — её корень. Пусть для некоторого вещественного τ выполняется неравенство

$$|F(t)| \leq M(\tau) e^{\tau|t|}, \quad t \in (-\infty, 0) \quad (t \in (0, \infty)).$$

Если, кроме того, $\operatorname{Im} \lambda_k > \tau$ ($\operatorname{Im} \lambda_k < -\tau$), то коэффициент Фурье $P_k(z)$ функции F равен нулю.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} P_k(z) e^{i\lambda_k z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega(\mu, \alpha, F)}{L(\mu)} e^{-i\mu z} d\mu \\ &= -i \int_{-q}^q \int_0^t \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{e^{i\mu(z-\xi-\alpha)}}{L(\mu)} d\mu F(\xi + \alpha - t) d\xi d\sigma(t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Применяя формулу для вычисления вычета в полюсе кратности n_k , получим

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{e^{-i\mu(z-\xi-\alpha)}}{L(\mu)} d\mu = \frac{1}{(n_k-1)!} \frac{d^{n_k-1}}{d\mu^{n_k-1}} \left. \frac{(\mu - \lambda_k)^{n_k} e^{i\mu(z-\xi-\alpha)}}{L(\mu)} \right|_{\mu=\lambda_k}.$$

Пусть

$$\frac{(\mu - \lambda_k)^{n_k}}{L(\mu)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (\mu - \lambda_k)^m$$

— разложение в ряд Тейлора в окрестности точки λ_k функции, стоящей в левой части равенства. Тогда

$$I = \frac{1}{(n_k-1)!} \sum_{m=0}^{n_k-1} m! C_{n_k-1}^m a_m (i(z-\xi-\alpha))^{n_k-1-m} e^{i\lambda_k(z-\xi-\alpha)}$$

$$= Q_k(z - \xi - \alpha) e^{i\lambda_k(z - \xi - \alpha)},$$

где Q_k — некоторый полином степени $n_k - 1$. Подставляя найденное значение I в формулу (4.6), получим

$$P_k(z) = -i \int_{-q}^q \int_0^t Q_k(z - \xi - \alpha) F(\xi + \alpha - t) e^{-i\lambda_k(\xi + \alpha)} d\xi d\sigma(t).$$

Делая во внутреннем интеграле замену $\xi + \alpha - t = \eta$, получим

$$P_k(z) = -i \int_{-q}^q \int_{\alpha-t}^{\alpha} Q_k(z - \eta - t) F(\eta) e^{-i\lambda_k \eta} d\eta e^{-i\lambda_k t} d\sigma(t). \quad (4.7)$$

Пусть $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\tilde{Q}_k$ — полином, коэффициенты которого равны модулям коэффициентов полинома Q_k . Тогда справедливо неравенство

$$|P_k(z)| \leq M(\sigma) e^{q\beta_k} \tilde{Q}_k(|z| + |\alpha| + 2q) \int_{-q}^q \left| \int_{\alpha-t}^{\alpha} e^{\beta_k \eta + \tau|\eta|} d\eta \right| d|\sigma|(t).$$

В первом варианте теоремы, когда $t \in (-\infty, 0)$, нужно переходить к пределу при $\alpha \rightarrow -\infty$. Во втором варианте теоремы, когда $t \in (0, \infty)$, нужно переходить к пределу, когда $\alpha \rightarrow +\infty$. В любом случае получим $P_k(z) = 0$. $\square$

Из доказанной теоремы как лёгкое упражнение получаем следующее.

Теорема 4.3. Пусть $F(\theta)$ есть непрерывное решение уравнения (4.3) и пусть по одному из направлений $\theta \rightarrow +\infty$ или $\theta \rightarrow -\infty$

$$\lim F(\theta) e^{\sigma\theta} = 0$$

для любого $\sigma \in (-\infty, \infty)$. Тогда $F(\theta) \equiv 0$.

Доказательство. По теореме 4.2 все коэффициенты Фурье функции F равны нулю. По теореме 4.1 функция F равна нулю. $\square$

Далее мы предлагаем одно дополнительное условие, гарантирующее, что непрерывное решение уравнения (3.13) или (3.17) при фиксированном R будет ρ -тригонометрической функцией.

Теорема 4.4. Пусть $F(\theta)$ — непрерывное на всей оси решение одного из уравнений (3.13) или (3.17) при некотором фиксированном $R \in (0, 1]$. Пусть существуют вещественные числа A и B , такие, что для одного из направлений $\theta \rightarrow +\infty$ или $\theta \rightarrow -\infty$ выполняется соотношение

$$\lim (F(\theta) - A \cos \rho\theta - B \sin \rho\theta) e^{\tau\theta} = 0$$

для любого вещественного τ . Тогда

$$F(\theta) = A \cos \rho\theta - B \sin \rho\theta.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_1(\theta) = F(\theta) - A \cos \rho\theta - B \sin \rho\theta.$$

Тогда функция $F_1(\theta)$ будет решением того же уравнения, что и функция $F(\theta)$. Как следует из соотношений (4.1), (4.2), функция $F_1(\theta)$ будет решением уравнения (4.3) с некоторой мерой σ . По теореме 4.3 $F_1(\theta) \equiv 0$. $\square$

В следующей теореме мы даём другое дополнительное условие, гарантирующее, что непрерывное решение уравнения (3.13) или (3.17) при фиксированном R будет ρ -тригонометрической функцией.

Теорема 4.5. Пусть $F(\theta)$ есть непрерывное на всей оси решение одного из уравнений (3.13) или (3.17) с некоторым фиксированным $R \in (0, 1]$. Если функция $F(\theta)$ есть ρ -тригонометрическая на каком-нибудь сегменте длины $2 \arcsin R$, то она ρ -тригонометрическая всюду.

Доказательство. Вновь рассмотрим функцию

$$F_1(\theta) = F(\theta) - A \cos \rho\theta - B \sin \rho\theta,$$

напишем для неё уравнение вида (4.3) и применим формулу (4.7), взяв в качестве α центр того сегмента, где функция $F_1(\theta)$ обращается в ноль. Мы получим, что все коэффициенты Фурье функции F_1 равны нулю. Тогда $F_1 = 0$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. *Уравнения в свёртках и проекционные методы их решения*. М.: Наука. 1971.
2. М.Г. Крейн. *Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов* // Усп. мат. наук **13**:5, 3-120 (1958).
3. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций*. М.: ГИТТЛ. 1956.
4. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент*. М.: Наука. 1976.
5. А.Ф. Леонтьев. *Последовательности полиномов из экспонент*. М.: Наука. 1980.
6. И.И. Привалов. *Субгармонические функции*. Москва, Ленинград: Гостехиздат. 1937.
7. Б.Н. Хабибуллин. *Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка* // Мат. сб. **182**:6, 811-827 (1991).
8. У. Хейман, П. Кеннеди. *Субгармонические функции*. М.: Мир. 1980.
9. Э. Хьюитт, К. Росс. *Абстрактный гармонический анализ 2*. М.: Наука. 1975.
10. J.-P. Kahane. *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles* // Ann. Inst. Fourier **5**, 39-130 (1953-1954).
11. J.-P. Kahane. *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées* // Ann. Inst. Fourier. **7**, 293-314 (1957).
12. L. Schwartz. *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques* // Ann. Math. (2) **48**:4, 857-929 (1947).
13. M. Tsuji. *Potential theory in modern function theory*. Maruzen Co., Ltd, Tokyo (1959).

Константин Геннадьевич Малютин,
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия
E-mail: malyutinkg@gmail.com