

УДК 517.54

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ДВУСВЯЗНЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

А.Ю. ДЮТИН, С.Р. НАСЫРОВ

Аннотация. Мы предлагаем приближённый метод нахождения конформного отображения концентрического кольца на произвольную неограниченную двусвязную многоугольную область. Этот метод основан на идеях, связанных с параметрическим методом Лёвнера — Комацу. Мы рассматриваем гладкие однопараметрические семейства конформных отображений $\mathcal{F}(z, t)$ концентрических колец на двусвязные многоугольные области $\mathcal{D}(t)$, которые получаются из фиксированной неограниченной двусвязной многоугольной области $\mathcal{D}$ проведением конечного числа прямолинейных или, в общем случае, полигональных разрезов переменной длины; при этом мы не требуем монотонности семейства областей $\mathcal{D}(t)$. В интегральное представление для конформных отображений $\mathcal{F}(z, t)$ входят неизвестные (акцессорные) параметры. Мы находим дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяют такие семейства конформных отображений, и выводим из него систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику акцессорных параметров при изменении параметра t и динамику конформного модуля данной двусвязной области в зависимости от параметра t . Отметим, что в правые части полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений входят функции, которые являются скоростями движения концевых точек разрезов. Это позволяет полностью контролировать динамику разрезов, в частности, добиваться их согласованного изменения в случае, если в области $\mathcal{D}$ проводится более одного разреза. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода. Отметим, что предложенный в этой работе параметрический метод уже рассматривался нами для случая ограниченных двусвязных многоугольных областей.

Ключевые слова: неограниченные двусвязные области, полигональные области, конформные модули, конформные отображения, формула Кристоффеля — Шварца, акцессорные параметры, однопараметрические семейства функций, параметрический метод, эллиптические функции, эллиптические интегралы, уравнение Лёвнера — Комацу.

Mathematics Subject Classification: 30C30

1. ВВЕДЕНИЕ

В геометрической теории функций и её приложениях важную роль играют конформные отображения многоугольных областей. В односвязном случае по теореме Римана существует конформное отображение заданной многоугольной области на единичный круг или полуплоскость. При этом, обратное отображение задается формулой Кристоффеля — Шварца (см., напр., [15]). В двусвязном случае многоугольную область можно конформно

A.Yu. DYUTIN, S.R. NASYROV, ONE PARAMETER FAMILIES OF CONFORMAL MAPPINGS OF UNBOUNDED DOUBLY CONNECTED POLYGONAL DOMAINS.

© Дютин А.Ю., Насыров С.Р. 2025.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 23-11-00066.

Поступила 10 сентября 2024 г.

отобразить на круговое кольцо (см., напр., [17, гл. 5, § 1]), а обратное отображение определяется обобщением интеграла Кристоффеля — Шварца, использующим эллиптические и связанные с ними тета-функции (см. напр. [2], [13]). Впервые интегральные представления таких конформных отображений получил Н.И. Ахиезер [2, гл. VIII, п. 48], Г.М. Голузин [3] и Ю. Комацу [19], [20] (см., также [18, § 17.5]). В многосвязном случае полигональную область можно отобразить конформно на круговую область, т.е. область границей которой является объединение непересекающихся окружностей (обзор некоторых работ можно найти в [16]).

Несомненным преимуществом формулы Кристоффеля — Шварца и её обобщений на многосвязный случай является их простота. Существенным недостатком является то, что подобные формулы содержат неизвестные параметры. Прежде всего, это — прообразы вершин ломаных, ограничивающих область. В случае неограниченных областей добавляется ещё один неизвестный параметр — прообраз бесконечно далёкой точки. В многосвязном случае дело осложняется тем, что при отображении на круговую область параметры этой области (так называемые конформные модули) неизвестны. В двусвязном случае имеется один параметр — конформный модуль области, который также подлежит определению. Напомним его определение. Если двусвязная область $\mathcal{D}$ конформно эквивалентна кольцу $\{\tau \in \mathbb{C} : q < |\tau| < 1\}$, то её конформный модуль может быть определён следующим образом:

$$\text{Mod}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2\pi} \ln q^{-1}.$$

Существуют различные методы определения неизвестных (акцессорных) параметров в интегралах Кристоффеля — Шварца и их обобщениях. Одним из наиболее интересных является параметрический метод Лёвнера, который имеет и другие важные применения в теории однолистных функций (см. напр., обзор [11], а также монографию [1]). В частности, в 1984 г. параметрическим методом Луи де Бранж [12] доказал знаменитую гипотезу Бибераха об оценке модулей коэффициентов однолистных в круге функций [10].

Параметрический метод Лёвнера основан на рассмотрении однопараметрических семейств однолистных функций, зависящих от вещественного параметра, которые конформно отображают каноническую область на семейство областей, получающихся из данной области проведением удлиняющегося разреза, и исследовании дифференциального уравнения, которому удовлетворяют функции этого семейства, так называемого уравнения Лёвнера и его модификаций.

Обзор приближенных методов нахождения акцессорных параметров основанных на параметрическом методе Лёвнера можно найти в [16]. Отметим работу [23], в которой предложено применение параметрического метода для нахождения акцессорных параметров односвязных многоугольных областей в случае нескольких разрезов. В работе [16] параметрический метод использован для нахождения акцессорных параметров и конформного модуля в случае ограниченных двусвязных многоугольных областей; в ней использован подход, применённый ранее в работах [7], [8], [14], [22].

Настоящая статья посвящена нахождению акцессорных параметров в обобщенном интеграле Кристоффеля — Шварца параметрическим методом в случае неограниченных двусвязных областей, когда в исходной области $\mathcal{D}$ одновременно проводится несколько разрезов переменной длины. Соответствующее однопараметрическое семейство разрезанных многоугольных областей мы обозначим через $\mathcal{D}(t)$, где t — вещественный параметр.

Опишем структуру работы и основные полученные в ней результаты.

Сначала в п. 2 мы приводим необходимые нам сведения из теории эллиптических функций и эллиптических интегралов.

В п. 3 мы описываем интегральное представление конформного отображения концентрического кольца на неограниченную двусвязную многоугольную область (теорема 3.1).

Это интегральное представление можно также получить из аналогичных формул Ахиезера и Голузина (см. напр. [2, гл. VIII, п. 48] и [3]).

Далее в п. 4 с использованием этого интегрального представления, мы рассматриваем гладкие однопараметрические семейства $\mathcal{F}(z, t)$ конформных отображений концентрических колец на неограниченные двусвязные многоугольные области $\mathcal{D}(t)$. Подчеркнём, что мы выпускаем сразу несколько разрезов, причём мы не требуем, чтобы семейство областей $\mathcal{D}(t)$ было монотонным (в смысле включения). За счёт этого мы можем как увеличивать, так и уменьшать длины некоторых разрезов. Мы находим дифференциальное уравнение в частных производных для семейства таких конформных отображений, которое является некоторой модификацией уравнения Лёвнера — Комацу на случай нескольких разрезов (теорема 4.1). Из этого уравнения мы выводим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющую динамику акцессорных параметров данных конформных отображений, а также динамику конформного модуля двусвязного многоугольника (теорема 4.2). Решая задачу Коши для этой системы, мы находим все неизвестные параметры в интегральном представлении семейства $\mathcal{F}(z, t)$. Особо отметим, что мы можем просто контролировать положение, скорость и направление движения концов разрезов, поскольку скорости движения концевых точек разрезов входят явно в правые части выведенных дифференциальных уравнений.

Основываясь на теореме Каратеодори о сходимости к ядру и её обобщениях (см., напр., [17]), мы можем вырезать из заданной неограниченной области $\mathcal{D}$ области более сложной геометрии. Также мы можем повторять процедуру вырезания области из заданной и получать более сложные многоугольные области за несколько этапов. В этом случае реализация метода будет состоять в последовательном решении нескольких задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом решения (акцессорные параметры), полученные на каждом из этапов, кроме последнего, определяют начальные условия для системы, решаемой на последующем этапе.

В заключение, в п. 5, мы демонстрируем эффективность предложенного приближённого метода на примерах. В качестве начальной двусвязной области, из которой вырезаются нужные области, мы рассматриваем внешность двух симметричных параллельных разрезов. При этом, формулы, определяющие все акцессорные параметры для данного конформного отображения, найдены ранее, в п. 3 (пример 3.1). Далее мы начинаем двигать концы разрезов по полигональным траекториям и вырезать из начальных областей более сложные многоугольные области (пример 5.1, 5.2 и 5.3). Отметим, что точность вычислений для акцессорных параметров и конформного модуля составила до 10^{-15} , а для вершин многоугольников — до 10^{-6} .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В начале мы напомним некоторые факты теории эллиптических интегралов и эллиптических функций (см. напр. [2], [13], [21]).

Мероморфная функция в $\mathbb{C}$ называется эллиптической, если она имеет периоды ω_1 и ω_2 , линейно независимые над $\mathbb{R}$. Возьмём произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и построим параллелограмм с вершинами $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2$. Этот параллелограмм мы будем называть параллелограммом периодов. К этому параллелограмму мы причисляем все точки вида $z_0 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ ($0 \leq r_1 < 1, 0 \leq r_2 < 1$). При $z_0 = 0$ параллелограмм периодов назовём основным. Назовём порядком эллиптической функции число её полюсов в параллелограмме периодов с учётом порядков. Обозначим через $\Omega = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2\}$ решётку, порождённую периодами ω_1 и ω_2 ($m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$). Далее будем обозначать через ω произвольный элемент решётки и считать, что $\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$.

Одной из основных эллиптических функций является $\wp$ -функция Вейерштрасса:

$$\wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Это мероморфная функция в $\mathbb{C}$ с полюсами второго порядка в каждой из точек $\omega \in \Omega$. В полупериодах $\wp$ -функция принимает попарно различные значения:

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_2, \quad \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = e_3.$$

Нам также понадобится ζ -функция Вейерштрасса

$$\zeta(z) = \zeta(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right),$$

которая обладает свойствами: $\zeta'(z) = -\wp(z)$ и $\zeta(z + \omega_k) - \zeta(z) = \eta_k$, где $\eta_k = 2\zeta\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$, $k = 1, 2$. Между периодами ω_1 и ω_2 и постоянными η_1 и η_2 имеется соотношение Лежандра (см. [2, гл. III, п. 12]):

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = 2\pi i. \quad (2.1)$$

Наконец, σ -функция Вейерштрасса

$$\sigma(z) = \sigma(z; \omega_1, \omega_2) = z \prod_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\omega} \right) \exp \left\{ \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right\}$$

обладает свойствами:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \sigma(z)}{dz} &= \zeta(z), & \frac{d^2 \ln \sigma(z)}{dz^2} &= -\wp(z), \\ \sigma(z \pm \omega_k) &= -\exp \left\{ \pm \eta_k \left(z \pm \frac{\omega_k}{2} \right) \right\} \sigma(z), & k &= 1, 2. \end{aligned}$$

Также нам понадобятся следующие функции:

$$\begin{aligned} \sigma_1(z) &= \pm \frac{\sigma\left(z \pm \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)} \exp \left\{ \mp \frac{\eta_1}{2} z \right\}, \\ \sigma_2(z) &= \pm \frac{\sigma\left(z \pm \frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)} \exp \left\{ \mp \frac{\eta_2}{2} z \right\}, \\ \sigma_3(z) &= \pm \frac{\sigma\left(z \pm \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)} \exp \left\{ \mp \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} z \right\}. \end{aligned}$$

Напомним, что инварианты Вейерштрасса g_2 и g_3 определяются следующим образом:

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^6}.$$

Далее нам понадобятся явные выражения для частных производных функции $\zeta(z) = \zeta(z; \omega_1, \omega_2)$ по периодам. В [8] доказывается следующий факт.

Теорема 2.1. Частные производные функции $\zeta(z) = \zeta(z; \omega_1, \omega_2)$ по периодам равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta(z)}{\partial \omega_1} &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{2} \omega_2 \wp'(z) + (\omega_2 \zeta(z) - \eta_2 z) \wp(z) + \eta_2 \zeta(z) - \frac{g_2}{12} \omega_2 z \right], \\ \frac{\partial \zeta(z)}{\partial \omega_2} &= -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{2} \omega_1 \wp'(z) + (\omega_1 \zeta(z) - \eta_1 z) \wp(z) + \eta_1 \zeta(z) - \frac{g_2}{12} \omega_1 z \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Наконец, нам понадобятся тета-функции Якоби, которые могут быть представлены в терминах эллиптических функций Вейерштрасса (см. напр. [2, гл. IV, п. 19]):

$$\begin{aligned}\vartheta_1(\tau) &= \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} (e_1 - e_2)^{\frac{1}{4}} (e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}} (e_3 - e_2)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1} \right\} \sigma(z), \\ \vartheta_2(\tau) &= \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} (e_3 - e_2)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1} \right\} \sigma_1(z), \\ \vartheta_3(\tau) &= \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} (e_1 - e_2)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1} \right\} \sigma_3(z), \\ \vartheta_4(\tau) &= \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} (e_1 - e_3)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1} \right\} \sigma_2(z),\end{aligned}\tag{2.3}$$

где $\tau = \frac{z}{\omega_1}$.

Неполный эллиптический интеграл 1-го рода в канонической форме Лежандра имеет вид

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}},\tag{2.4}$$

где параметр $k \in (0, 1)$ называется модулем этого интеграла. Полагая в (2.4) $z = 1$, получаем

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}},\tag{2.5}$$

который называют полными эллиптическим интегралом 1-го рода. Мы будем использовать обозначение $K'(k) = K(k')$, где параметр $k' = \sqrt{1 - k^2}$ называется дополнительным модулем. Между величинами K , K' , E , E' в теории Якоби имеется соотношение Лежандра (см. [2, гл. V, § 31])

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}.\tag{2.6}$$

Функция $z = \operatorname{sn}(w, k)$, обратная к функции, определяемой интегралом (2.4), называется эллиптическим синусом Якоби, её аргумент выражается эллиптическим интегралом 1-го рода (2.4). Она является эллиптической функцией второго порядка с основными периодами $4K$ и $2iK'$.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В этом пункте мы выведем интегральное представление для функции, отображающей конформно концентрическое кольцо на неограниченную двусвязную многоугольную область. Мы будем придерживаться тех же обозначений, что и для случая ограниченных областей [16].

Рассмотрим конформное отображение $w = \mathcal{G}(\tau)$ кольца $\mathcal{A} = \{\tau : q < |\tau| < 1\}$ на двусвязную многоугольную область $\mathcal{D}$, содержащую внутри себя бесконечно удалённую точку, и следовательно, являющуюся внешностью двух непересекающихся многоугольников. Тогда функция $\mathcal{G}$ имеет единственный полюс в $\mathcal{A}$, обозначим его через τ_0 . Обозначим границу одного из многоугольников через Γ_1 , а границу второго — через Γ_2 . Пусть Γ_1 имеет вершины в точках w_{1,i_1} , $1 \leq i_1 \leq n_1$, а Γ_2 — в точках w_{2,i_2} , $1 \leq i_2 \leq n_2$. Далее обозначим через $\alpha_{1,i_1}\pi$ и $\alpha_{2,i_2}\pi$ внутренние углы области $\mathcal{D}$ при соответствующих вершинах

w_{1,i_1} и w_{2,i_2} . Величины углов связаны соотношениями

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \alpha_{1,i_1} = n_1 + 2, \quad \sum_{i_2=1}^{n_2} \alpha_{2,i_2} = n_2 + 2. \quad (3.1)$$

С помощью экспоненциального отображения $\tau(z) = e^{iz}$, мы можем рассмотреть отображение $\mathcal{F}(z) = \mathcal{G}(e^{iz})$ из горизонтальной полосы $\{0 < \operatorname{Im} z < \ln q^{-1}\}$ на $\mathcal{D}$. Очевидно, что в этой полосе функция $\mathcal{F}$ является 2π -периодической функцией. Тогда функция $\mathcal{F}$ осуществляет конформное отображение прямоугольника $\Pi = [0, 2\pi] \times (0, \ln q^{-1})$ с отождествлёнными вертикальными сторонами на $\mathcal{D}$ (см. рис. 1). Будем искать интегральное представление этого отображения, используя эллиптические функции Вейерштрасса с периодами $\omega_1 = 2\pi$ и $\omega_2 = 2i \ln q^{-1}$.

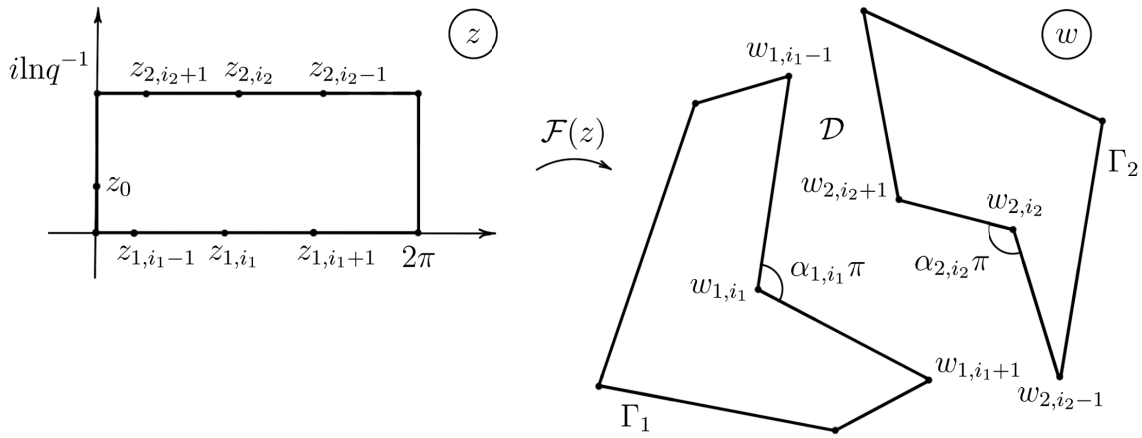


РИС. 1. Конформное отображение прямоугольника $[0, 2\pi] \times (0, \ln q^{-1})$ с отождествлёнными вертикальными сторонами на $\mathcal{D}$.

Пусть при отображении $\mathcal{F}$ точка z_0 , лежащая в прямоугольнике $[0, 2\pi] \times (0, \ln q^{-1})$, переходит в бесконечно удалённую точку. Путём сдвига, переводящего полосу $\{0 < \operatorname{Im} z < \ln q^{-1}\}$ в себя, можно достигнуть того, чтобы точка $z = z_0$ лежала на мнимой оси, т.е. $z_0 = iy_0$, $0 < y_0 < \ln q^{-1}$. Очевидно, что функция $\mathcal{F}$ аналитична в полосе $\{0 < \operatorname{Im} z < \ln q^{-1}\}$ всюду, кроме точки z_0 , в которой эта функция имеет простой полюс.

На плоскости z рассмотрим прообразы вершин

$$z_{1,i_1} \in [0, 2\pi] \quad \text{и} \quad z_{2,i_2} = x_{2,i_2} + i \ln q^{-1} \in [i \ln q^{-1}, 2\pi + i \ln q^{-1}]$$

области $\mathcal{D}$. Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество точек, которые получаются из множества прообразов вершин всевозможными сдвигами на вектора решетки Ω , порождённой векторами ω_1 и ω_2 . С использованием принципа симметрии Римана — Шварца, мы можем продолжить $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}$ как многозначную аналитическую функцию через любой интервал $(z_{k,j} + \omega, z_{k,j+1} + \omega)$, параллельный вещественной оси. Причём при первом продолжении, например через интервал (z_{2,i_2}, z_{2,i_2+1}) , продолженная функция будет иметь полюс первого порядка в точке $\bar{z}_0 + \omega_2$, которая посредством отображения $\mathcal{F}(z)$ также должна перейти в бесконечно далёкую точку.

Нетрудно убедиться, что функция $\frac{\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}$ мероморфна и двоякопериодична в $\mathbb{C}$ с периодами ω_1 и ω_2 . Рассмотрим её в прямоугольнике $\Pi_\omega = [0, \omega_1) \times [0, \frac{\omega_2}{i})$, который является её основным параллелограммом периодов. Тогда конформный модуль области $\mathcal{D}$ равен $\operatorname{Mod}(\mathcal{D}) = \frac{\omega_2}{2\omega_1 i}$. Функция $\frac{\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}$ в прямоугольнике Π_ω имеет простые полюсы в точках

z_{1,i_1} и z_{2,i_2} с вычетами $\alpha_{1,i_1} - 1$ и $\alpha_{2,i_2} - 1$ соответственно, а в точках z_0 и $\bar{z}_0 + \omega_2$ имеет полюсы первого порядка с вычетами, равными -2 . Поэтому мы можем восстановить её по особенностям с помощью эллиптической функции Вейерштрасса $\zeta(z) = \zeta(z; \omega_1, \omega_2)$, которая имеет в каждом параллелограмме периодов единственный простой полюс в точке, сравнимой с нулём по модулю периодов. Имеем

$$\frac{\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)} = c + \sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) \zeta(z - z_{1,i_1}) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) \zeta(z - z_{2,i_2}) - 2(\zeta(z - z_0) + \zeta(z - \bar{z}_0)), \quad (3.2)$$

где c — некоторая комплексная константа.

Проводя те же выводы для функции (3.2), что и в [16], получим

$$\mathcal{F}(z) = C_1 \int_0^z \exp\{c\xi\} \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(\xi - z_{1,i_1}) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(\xi - z_{2,i_2}) \cdot (\sigma(\xi - z_0)\sigma(\xi - \bar{z}_0))^{-2} d\xi + C_2, \quad (3.3)$$

где $C_1 \neq 0$ и C_2 — некоторые комплексные константы.

Найдём константу c в (3.3). Используя соотношения (2.1), (3.1) и то, что функция $\mathcal{F}'(z)$ является периодической с периодом ω_1 , получаем

$$c = \frac{\eta_1}{\omega_1} \left[\sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) z_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) z_{2,i_2} \right] + \eta_2. \quad (3.4)$$

Таким образом мы получили следующую теорему.

Теорема 3.1. *Функция $\mathcal{F}$, отображающая кольцо $\mathcal{A} = \{\tau : q < |\tau| < 1\}$ на двусвязную неограниченную многоугольную область $\mathcal{D}$, имеет вид (3.3), где $z = -i \ln \tau$. В (3.3) точки z_{1,i_1} и z_{2,i_2} — это прообразы вершин области $\mathcal{D}$, константа c имеет вид (3.4), а $C_1 \neq 0$ и C_2 — это некоторые комплексные константы.*

Из (2.3) следует интегральное представление нужного конформного отображения, использующее тета-функции Якоби.

Следствие 3.1. *Описанное в теореме 3.1 конформное отображение $\mathcal{F}$ имеет вид*

$$\mathcal{F}(z) = C'_1 \int_0^z \exp\{-i\xi\} \prod_{i_1=1}^{n_1} \vartheta_1^{\alpha_{1,i_1}-1} \left(\frac{\xi - z_{1,i_1}}{\omega_1} \right) \prod_{i_2=1}^{n_2} \vartheta_1^{\alpha_{2,i_2}-1} \left(\frac{\xi - z_{2,i_2}}{\omega_1} \right) \cdot \vartheta_1^{-2} \left(\frac{\xi - z_0}{\omega_1} \right) \vartheta_1^{-2} \left(\frac{\xi - \bar{z}_0}{\omega_1} \right) d\xi + C_2. \quad (3.5)$$

Отметим, что поскольку тета-функции представляются быстро сходящимися рядами, формула (3.5) более удобна для численной реализации конформного отображения, чем (3.3).

Далее рассмотрим примеры конформных отображений неограниченных двусвязных многоугольных областей и найдём для них явные формулы для нахождения акцессорных параметров. Эти примеры будут использованы ниже в п. 5.

Пример 3.1. В качестве двусвязной неограниченной многоугольной области $\mathcal{D}$ возьмём, к примеру, внешность двух отрезков действительной оси. Пусть отрезками действительной оси являются отрезки $[-\frac{1}{k}, -1]$ и $[1, \frac{1}{k}]$, где $k \in (0, 1)$. Опишем функцию $\mathcal{F}(z)$, конформно отображающую прямоугольник $[-\pi, \pi] \times (0, \ln q^{-1})$ с отождествлёнными вертикальными сторонами на $\mathcal{D}$ (см. рис. 2).

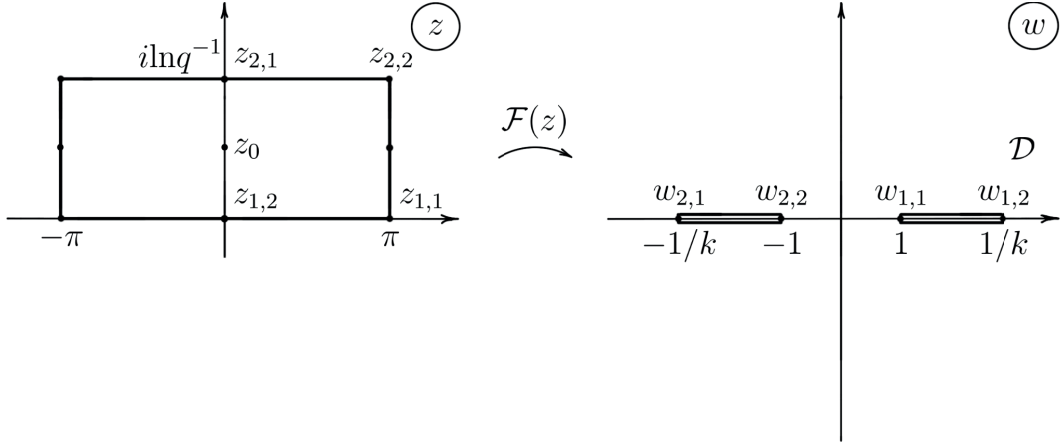


Рис. 2. Конформное отображение прямоугольника $[-\pi, \pi] \times (0, \ln q^{-1})$ с отождествлёнными вертикальными сторонами на $\mathcal{D}$.

Так как область $\mathcal{D}$ симметрична относительно вещественной оси, мы можем считать, что

$$z_{1,1} = \pi, \quad z_{1,2} = 0, \quad z_{2,1} = i \ln q^{-1}, \quad z_{2,2} = \pi + i \ln q^{-1},$$

кроме того, $z_0 = \frac{i \ln q^{-1}}{2}$. При этом,

$$\mathcal{F}(z_{k,j}) = w_{k,j}, \quad k, j = 1, 2,$$

где

$$w_{1,1} = 1, \quad w_{1,2} = \frac{1}{k}, \quad w_{2,1} = -\frac{1}{k}, \quad w_{2,2} = -1.$$

По теореме 3.1, функция $\mathcal{F}$, отображающая кольцо $\mathcal{A} = \{\tau : q < |\tau| < 1\}$ на $\mathcal{D}$, определена формулой

$$\mathcal{F}(z) = C_1 \int_0^z \exp\{c\xi\} \prod_{i_1=1}^2 \sigma(\xi - z_{1,i_1}) \prod_{i_2=1}^2 \sigma(\xi - z_{2,i_2}) (\sigma(\xi - z_0) \sigma(\xi - \bar{z}_0))^{-2} d\xi + C_2, \quad (3.6)$$

где $z = -i \ln \tau$, $c = \eta_1 + \eta_2$ и $\sigma(z) = \sigma(z; 2\pi, 2i \ln q^{-1})$. Заметим, что в (3.6) присутствует только один неизвестный параметр q , найдём его.

В [2, гл. VIII, п. 49] было рассмотрено конформное отображение кольца

$$\mathcal{A} = \{\tau : q(\ell) < |\tau| < 1\}$$

на область $\mathcal{D}'$, являющуюся плоскостью, разрезанной вдоль отрезков $[-1, \alpha]$ и $[\beta, 1]$ вещественной оси. Функция, осуществляющая это конформное отображение, имеет следующий вид

$$w(\tau; \ell) = \frac{1 - \alpha^2}{2 \operatorname{sn} \left(\frac{K'(\ell)}{\pi} \ln \tau; \ell \right) + \alpha - 1} + \alpha,$$

где

$$\ell^2 = \frac{2(\beta - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 + \beta)}, \quad q(\ell) = \exp \left\{ -\pi \frac{K(\ell)}{K'(\ell)} \right\}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Mod}(\mathcal{D}') = \frac{K(\ell)}{2K'(\ell)}.$$

Заметим, что функция

$$z(w) = \frac{\pi}{K'(k)} \left[F(w, k) - (K(k) + iK'(k)) \right]$$

осуществляет конформное отображение области $\mathcal{D}$ на прямоугольник $(-\frac{2\pi K(k)}{K'(k)}, 0) \times (-\pi, \pi)$. Тогда

$$q(k) = \exp \left\{ -2\pi \frac{K(k)}{K'(k)} \right\}$$

и

$$\text{Mod}(\mathcal{D}) = \frac{K(k)}{K'(k)}.$$

Используя преобразование Ландена, заключаем, что параметры k и ℓ связаны соотношением

$$k = \frac{1 - \ell'}{1 + \ell'}.$$

В таблице 1 приведены значения параметра q и конформного модуля для некоторых $k \in (0, 1)$.

ТАБЛИЦА 1. Некоторые значения параметра q и конформного модуля внешности двух отрезков $[-\frac{1}{k}, -1]$ и $[1, \frac{1}{k}]$.

k	$2/3$	$1/2$	$1/3$
q	0.002551352513688673	0.007360907921497923	0.01797238700896722
ω_2	11.942263325795764	9.823143989900522	8.037837508021143
$\text{Mod}(\mathcal{D})$	0.9503351200027268	0.7817009613480557	0.6396307855855035

Пример 3.2. В качестве двусвязной неограниченной многоугольной области $\mathcal{D}$ возьмём теперь внешность двух параллельных разрезов длины $2a$, расположенных друг от друга на расстоянии $2b$ (см. рис. 3). Опишем функцию $\mathcal{F}(z)$, конформно отображающую прямоугольник $[-\pi, \pi] \times (0, \ln q^{-1})$ с отождествлёнными вертикальными сторонами на $\mathcal{D}$.

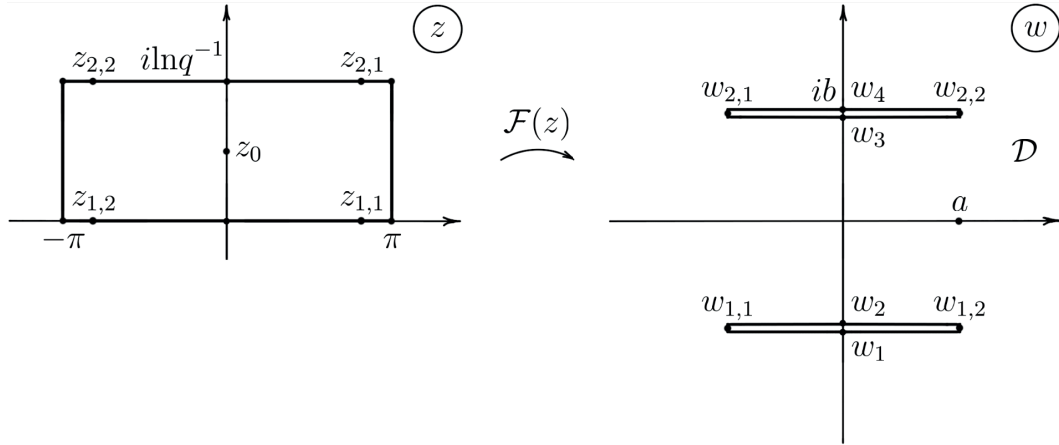


РИС. 3. Конформное отображение прямоугольника $[-\pi, \pi] \times (0, \ln q^{-1})$ с отождествлёнными вертикальными сторонами на $\mathcal{D}$.

Так как область $\mathcal{D}$ симметрична относительно действительной оси, мы можем считать, что

$$z_{1,1} = \beta, \quad z_{1,2} = -\beta, \quad z_{2,1} = \beta + i \ln q^{-1}, \quad z_{2,2} = -\beta + i \ln q^{-1}, \quad 0 < \beta < \pi,$$

кроме того, $z_0 = \frac{i \ln q^{-1}}{2}$. При этом,

$$\mathcal{F}(z_{k,j}) = w_{k,j}, \quad k, j = 1, 2,$$

где

$$w_{1,1} = -a + ib, \quad w_{1,2} = a + ib, \quad w_{2,1} = -a - ib, \quad w_{2,2} = a - ib.$$

Тогда по теореме 3.1, функция $\mathcal{F}$, отображающая кольцо $\mathcal{A} = \{\tau : q < |\tau| < 1\}$ на $\mathcal{D}$, определена формулой

$$\mathcal{F}(z) = C_1 \int_0^z \exp\{c\xi\} \prod_{i_1=1}^2 \sigma(\xi - z_{1,i_1}) \prod_{i_2=1}^2 \sigma(\xi - z_{2,i_2}) (\sigma(\xi - z_0) \sigma(\xi - \bar{z}_0))^{-2} d\xi + C_2, \quad (3.7)$$

где $z = -i \ln \tau$, $c = \eta_2$ и $\sigma(z) = \sigma(z; 2\pi, 2i \ln q^{-1})$. Найдём неизвестные параметры, входящие в (3.7).

Пусть параметр $k = k(q) \in (0, 1)$ определяется равенством

$$k^{1/2} = \frac{\vartheta_2\left(0, \exp\left\{\frac{2\pi^2}{\ln q}\right\}\right)}{\vartheta_3\left(0, \exp\left\{\frac{2\pi^2}{\ln q}\right\}\right)}$$

и $c_1 = 2K(k)/\ln q$. Тогда функция

$$u(z) = \operatorname{sn}\left(c_1\left(-iz + i\pi - \frac{\ln q^{-1}}{2}\right), k\right)$$

конформно отображает прямоугольник $(0, \pi) \times (0, \ln q^{-1})$ на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}_u^+$. При этом, вершины

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \pi, \quad z_3 = \pi + i \ln q^{-1}, \quad z_4 = i \ln q^{-1}$$

этого прямоугольника перейдут соответственно в точки

$$u_1 = -\frac{1}{k}, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = \frac{1}{k}.$$

Точки $z_{1,1}$ и $z_{2,1}$ перейдут соответственно в точки $u_{1,1} = -\lambda$ и $u_{2,1} = \lambda$, где $\lambda \in (1, \frac{1}{k})$.

Теперь рассмотрим отображение $\mathbb{H}_u^+$ на часть области $\mathcal{D}$ расположенную в левой полуплоскости, обозначим эту область через $\mathcal{D}_1$. Отображающая функция $H(u) = H(u; \lambda, k)$ имеет вид:

$$H(u) = C \int_0^u \frac{k(\xi^2 - \lambda^2) d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}, \quad (3.8)$$

где $C = C(k) \neq 0$ и $H(u_j) = w_j$, $1 \leq j \leq 4$. Используя эллиптические интегралы можно получить следующую формулу (см. подр. [9]):

$$H(u) = \frac{2ib}{\pi} \left[K'(k)E(u, k) - (K'(k) - E'(k)) F(u, k) \right].$$

Таким образом, мы имеем формулу для нахождения неизвестного параметра $\beta = \beta(q)$ в интегральном представлении (3.7):

$$\beta = \frac{\ln q}{2K(k)} F(t, k'),$$

где

$$t = \sqrt{\frac{1 - k^2 \lambda^2}{1 - k^2}}, \quad t \in (0, 1).$$

Неизвестный параметр q мы можем выбрать, к примеру, задав параметр k (см. пример 3.1).

Заметим, что

$$a = \frac{1}{k} \left[E(t, k') - k^2 \lambda^2 F(t, k') \right], \quad b = \frac{\pi}{2kK'(k)}.$$

В таблице 2 приведены некоторые значения аксессуарных параметров и конформного модуля для некоторых $k \in (0, 1)$.

ТАБЛИЦА 2. Некоторые значения аксессуарных параметров и конформного модуля внешности отрезков $[-1 - ib, 1 - ib]$ и $[-1 + ib, 1 + ib]$.

k	2/3	1/2	1/3
q	0.00255135251368	0.00736090792149	0.01797238700896
ω_2	11.9422633257957	9.82314398990052	8.03783750802114
β	1.47011356981425	1.40082495304699	1.30853828460806
$\text{Mod}(\mathcal{D})$	0.95033512000272	0.78170096134805	0.63963078558550
b	4.92429742192023	2.87161351081953	1.80004021386307

Данный пример, как и предыдущий, имеют важные приложения в механике, к примеру, в теории составных крыльев [5].

Более подробно про многоугольники, стороны которых лежат на прямых, параллельных или проходящих через начало координат, можно посмотреть в [6, раздел Б, § 8, с. 359], а также в [14].

В двусвязном случае для достаточно простых симметричных областей (как представлено в примерах 3.1 и 3.2) аксессуарные параметры можно найти с помощью теории эллиптических интегралов и эллиптических функций. Для двусвязных многоугольных областей с более сложной геометрией задача существенно усложняется и применяются приближённые методы.

4. СЕМЕЙСТВА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теперь рассмотрим однопараметрическое семейство двусвязных областей $\mathcal{D}(t)$, получаемых из фиксированной неограниченной двусвязной области $\mathcal{D}$, ограниченной двумя замкнутыми ломаными, проведением нескольких прямолинейных попарно непересекающихся разрезов внутрь области и исходящих из её границы (рис. 4). Будем считать, что концевые точки разрезов являются гладкими функциями от вещественного параметра $t \in [0, T]$. Договоримся использовать для объектов и характеристик, связанных с областью $\mathcal{D}$, те же обозначения, что и в п. 3, указывая в случае необходимости в скобках зависимость от параметра t .

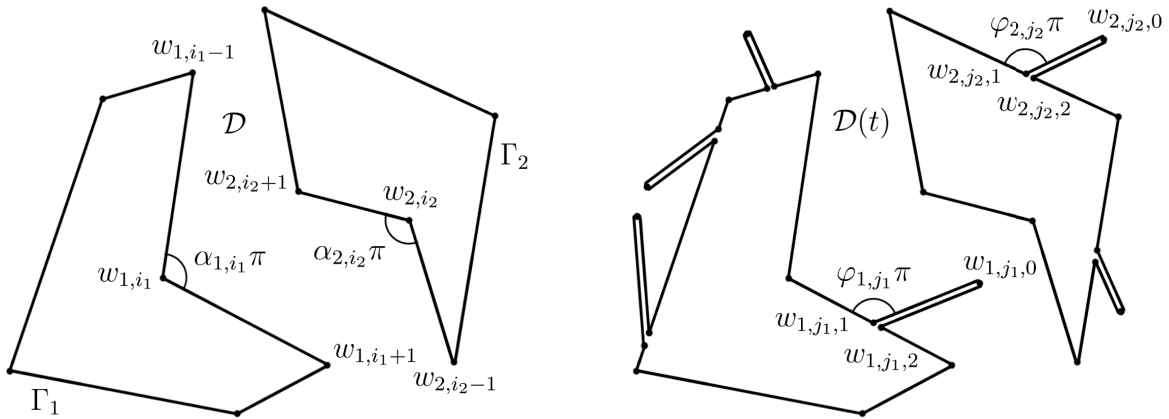


РИС. 4. Двусвязная многоугольная область $\mathcal{D}$ и область $\mathcal{D}(t)$, полученная из $\mathcal{D}$ проведением конечного числа разрезов.

Пусть из попарно различных точек граничной компоненты Γ_1 выходят m_1 разрезов под углами $\varphi_{1,j_1} \pi$, $1 \leq j_1 \leq m_1$, а из Γ_2 — m_2 разрезов под углами $\varphi_{2,j_2} \pi$, $1 \leq j_2 \leq m_2$ (рис. 4). Для простоты будем считать, что все разрезы исходят из не угловых точек границы.

Общий случай можно рассмотреть аналогично (см. замечание 4.2 ниже). Обозначим через $z_{1,j_1,0}(t) \in [0, \omega_1]$ прообразы концов разрезов, выходящих из точек компоненты Γ_1 , а

$$z_{2,j_2,0}(t) = x_{2,j_2,0}(t) + \frac{\omega_2(t)}{2} \in \left[\frac{\omega_2(t)}{2}, \omega_1 + \frac{\omega_2(t)}{2} \right]$$

— прообразы концов разрезов, выходящих из точек компоненты Γ_2 . Через $z_{1,j_1,1}(t)$ и $z_{1,j_1,2}(t)$ обозначим прообразы новых угловых точек компоненты Γ_1 с внутренними углами $\varphi_{1,j_1}\pi$ и $(1 - \varphi_{1,j_1})\pi$ соответственно, а через $z_{2,j_2,1}(t)$ и $z_{2,j_2,2}(t)$ обозначим прообразы новых угловых точек компоненты Γ_2 с внутренними углами $\varphi_{2,j_2}\pi$ и $(1 - \varphi_{2,j_2})\pi$ соответственно. Опишем гладкие однопараметрические семейства функций $\mathcal{F}(z, t)$, конформно отображающие концентрические кольца $\mathcal{A}(t) = \{\tau : q(t) < |\tau| < 1\}$ на $\mathcal{D}(t)$, где $q(t) = \exp\{-2\pi m(t)\}$, $m(t)$ — конформный модуль области $\mathcal{D}(t)$.

Отметим, что в отличие от метода Лёвнера — Комацу, мы рассматриваем случай нескольких разрезов, причём не предполагаем, что семейство областей $\mathcal{D}(t)$ является монотонным по параметру t .

Мы найдём дифференциальное уравнение в частных производных, которому будет удовлетворять семейство $\mathcal{F}(z, t)$. Из этого уравнения мы выведем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющую динамику аксессуарных параметров для данного семейства конформных отображений. Мы также определим динамику конформного модуля $m(t)$ при изменении параметра t .

Отметим, что для того чтобы вывести систему дифференциальных уравнений, мы используем подход, разработанный ранее для двусвязных областей являющихся внешностью двух прямолинейных разрезов переменной длины [14], а также однопараметрических семейств конформных отображений ограниченных двусвязных многоугольных областей [16].

Итак, рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство конформных отображений

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, t) = & C_1(t) \int_0^z \exp\{c(t)\xi\} \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(\xi - z_{1,i_1}(t)) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(\xi - z_{2,i_2}(t)) \\ & \cdot \prod_{j_1=1}^{m_1} s_{1,j_1}(\xi, t) \prod_{j_2=1}^{m_2} s_{2,j_2}(\xi, t) (\sigma(\xi - z_0(t)) \sigma(\xi - \bar{z}_0(t)))^{-2} d\xi + C_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} s_{1,j_1}(z, t) &= \sigma(z - z_{1,j_1,0}(t)) \sigma^{\varphi_{1,j_1}-1}(z - z_{1,j_1,1}(t)) \sigma^{-\varphi_{1,j_1}}(z - z_{1,j_1,2}(t)), \\ s_{2,j_2}(z, t) &= \sigma(z - z_{2,j_2,0}(t)) \sigma^{\varphi_{2,j_2}-1}(z - z_{2,j_2,1}(t)) \sigma^{-\varphi_{2,j_2}}(z - z_{2,j_2,2}(t)), \\ c(t) &= \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \left[\sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) z_{1,i_1}(t) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) x_{2,i_2}(t) \right. \\ &+ \sum_{j_1=1}^{m_1} (z_{1,j_1,0}(t) + (\varphi_{1,j_1} - 1) z_{1,j_1,1}(t) - \varphi_{1,j_1} z_{1,j_1,2}(t)) \\ &\left. + \sum_{j_2=1}^{m_2} (x_{2,j_2,0}(t) + (\varphi_{2,j_2} - 1) x_{2,j_2,1}(t) - \varphi_{2,j_2} x_{2,j_2,2}(t)) \right] + \eta_2(t). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma(z; \omega_1, \omega_2(t)), \quad \eta_1(t) = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}; \omega_1, \omega_2(t)\right), \\ \eta_2(t) &= 2\zeta\left(\frac{\omega_2(t)}{2}; \omega_1, \omega_2(t)\right), \quad z_0(t) = iy_0(t). \end{aligned}$$

Конформный модуль области $\mathcal{D}(t)$ равен

$$\text{Mod}(\mathcal{D}(t)) = \frac{\omega_2(t)}{2\omega_1 i}.$$

Для фиксированного t функция $\mathcal{F}(z, t)$ является периодической с периодом $\omega_1 = 2\pi$. По принципу симметрии мы можем продолжить $\mathcal{F}(z, t)$ через интервалы, концы которых являются прообразами вершин граничных компонент. Очевидно, что продолжение удовлетворяет равенствам

$$\mathcal{F}(z + \omega_1, t) = \mathcal{F}(z, t), \quad \mathcal{F}(z + \omega_2(t), t) = e^{i\alpha} \mathcal{F}(z, t) + \beta.$$

Дифференцируя по t и z , мы получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}(z + \omega_1, t) &= \dot{\mathcal{F}}(z, t), & \dot{\omega}_2(t) \mathcal{F}'(z + \omega_2(t), t) + \dot{\mathcal{F}}(z + \omega_2(t), t) &= e^{i\alpha} \dot{\mathcal{F}}(z, t), \\ \mathcal{F}'(z + \omega_1, t) &= \mathcal{F}'(z, t), & \mathcal{F}'(z + \omega_2(t), t) &= e^{i\alpha} \mathcal{F}'(z, t). \end{aligned}$$

Здесь и далее точка обозначает дифференцирование по параметру t , а штрих обозначает дифференцирование по параметру z . Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathcal{F}}(z + \omega_1, t)}{\mathcal{F}'(z + \omega_1, t)} &= \frac{\dot{\mathcal{F}}(z, t)}{\mathcal{F}'(z, t)}, \\ \frac{\dot{\mathcal{F}}(z + \omega_2(t), t)}{\mathcal{F}'(z + \omega_2(t), t)} + \dot{\omega}_2(t) &= \frac{\dot{\mathcal{F}}(z, t)}{\mathcal{F}'(z, t)}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$\mathcal{H}(z, t) := \frac{\dot{\mathcal{F}}(z, t)}{\mathcal{F}'(z, t)}$$

удовлетворяет равенствам

$$\mathcal{H}(z + \omega_1, t) - \mathcal{H}(z, t) = 0, \quad \mathcal{H}(z + \omega_2(t), t) - \mathcal{H}(z, t) = -\dot{\omega}_2(t). \quad (4.2)$$

Запишем разложение Пуансо для $\mathcal{F}(z, t)$ в окрестности точек $z_{1,k_1}(t)$:

$$\mathcal{F}(z, t) = A_0 + A_1(t) (z - z_{1,k_1}(t))^{\alpha_{1,k_1}} + \dots, \quad 1 \leq k_1 \leq n_1.$$

Здесь величина A_0 не зависит от t . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(z, t) &= \alpha_{1,k_1} A_1(t) (z - z_{1,k_1}(t))^{\alpha_{1,k_1}-1} + \dots, \\ \dot{\mathcal{F}}(z, t) &= -\alpha_{1,k_1} A_1(t) (z - z_{1,k_1}(t))^{\alpha_{1,k_1}-1} \dot{z}_{1,k_1}(t) + \dots \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\dot{z}_{1,k_1}(t) = -\mathcal{H}(z_{1,k_1}(t), t), \quad 1 \leq k_1 \leq n_1. \quad (4.3)$$

Аналогично получим, что

$$\dot{z}_{2,k_2}(t) = -\mathcal{H}(z_{2,k_2}(t), t), \quad 1 \leq k_2 \leq n_2, \quad (4.4)$$

$$\dot{z}_{1,\ell_1,j}(t) = -\mathcal{H}(z_{1,\ell_1,j}(t), t), \quad 1 \leq \ell_1 \leq m_1, \quad j = 1, 2, \quad (4.5)$$

$$\dot{z}_{2,\ell_2,j}(t) = -\mathcal{H}(z_{2,\ell_2,j}(t), t), \quad 1 \leq \ell_2 \leq m_2, \quad j = 1, 2. \quad (4.6)$$

Теперь запишем разложение Тейлора для $\mathcal{F}(z, t)$ в окрестности точек $z_{1,\ell_1,0}(t)$:

$$\mathcal{F}(z, t) = \mathcal{E}_{1,\ell_1}(t) + \frac{1}{2} \mathcal{F}''(z_{1,\ell_1,0}(t), t) (z - z_{1,\ell_1,0}(t))^2 + \dots, \quad 1 \leq \ell_1 \leq m_1, \quad (4.7)$$

где $\mathcal{E}_{1,\ell_1}(t) = \mathcal{F}(z_{1,\ell_1,0}(t), t)$ — конец ℓ_1 -го разреза, выходящий из Γ_1 . Из разложения следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(z, t) &= \mathcal{F}''(z_{1,\ell_1,0}(t), t) (z - z_{1,\ell_1,0}(t)) + \dots, \\ \dot{\mathcal{F}}(z, t) &= \dot{\mathcal{E}}_{1,\ell_1}(t) - \mathcal{F}''(z_{1,\ell_1,0}(t), t) (z - z_{1,\ell_1,0}(t)) \dot{z}_{1,\ell_1,0}(t) + \dots, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{H}(z, t) = \frac{\mathcal{L}_{1,\ell_1}(t)}{z - z_{1,\ell_1,0}(t)} + O(1), \quad z \rightarrow z_{1,\ell_1,0}(t),$$

где

$$\mathcal{L}_{1,\ell_1}(t) := \frac{\dot{\mathcal{E}}_{1,\ell_1}(t)}{\mathcal{F}''(z_{1,\ell_1,0}(t), t)}, \quad 1 \leq \ell_1 \leq m_1.$$

Аналогично

$$\mathcal{L}_{2,\ell_2}(t) := \frac{\dot{\mathcal{E}}_{2,\ell_2}(t)}{\mathcal{F}''(z_{2,\ell_2,0}(t), t)}, \quad 1 \leq \ell_2 \leq m_2.$$

Теперь найдём $\mathcal{F}''(z_{1,\ell_1,0}(t), t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}''(z, t) = & C_1(t) \exp\{c(t) z\} \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(z - z_{1,i_1}(t)) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(z - z_{2,i_2}(t)) \\ & \cdot \prod_{j_1=1}^{m_1} s_{1,j_1}(z, t) \prod_{j_2=1}^{m_2} s_{2,j_2}(z, t) (\sigma(z - z_0(t)) \sigma(z - \bar{z}_0(t)))^{-2} \\ & \cdot \left[\mathcal{Q}(z, t) + \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{Q}_{1,j_1}(z, t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{Q}_{2,j_2}(z, t) + \mathcal{Q}_0(z, t) \right], \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{Q}(z, t) = c(t) + \sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) \zeta(z - z_{1,i_1}(t)) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) \zeta(z - z_{2,i_2}(t)),$$

$$\mathcal{Q}_{k,j_k}(z, t) = \zeta(z - z_{k,j_k,0}(t)) + (\varphi_{k,j_k} - 1) \zeta(z - z_{k,j_k,1}(t)) - \varphi_{k,j_k} \zeta(z - z_{k,j_k,2}(t)), \quad 1 \leq k \leq 2,$$

$$\mathcal{Q}_0(z, t) = -2\zeta(z - z_0(t)) - 2\zeta(z - \overline{z_0(t)}).$$

Следовательно, при $z \rightarrow z_{1,\ell_1,0}(t)$ мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}''(z_{1,\ell_1,0}(t), t) = & C_1(t) \exp\{c(t) z_{1,\ell_1,0}(t)\} \\ & \cdot \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(z_{1,\ell_1,0}(t) - z_{1,i_1}(t)) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(z_{1,\ell_1,0}(t) - z_{2,i_2}(t)) \\ & \cdot \prod_{j_1=1}^{m_1} \sigma^{\varphi_{1,j_1}-1}(z_{1,\ell_1,0}(t) - z_{1,j_1,1}(t)) \sigma^{-\varphi_{1,j_1}}(z_{1,\ell_1,0}(t) - z_{1,j_1,2}(t)) \\ & \cdot \prod_{j_2=1}^{m_2} s_{2,j_2}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) \left(\sigma(z_{1,\ell_1,0}(t) - z_0(t)) \sigma(z_{1,\ell_1,0}(t) - \overline{z_0(t)}) \right)^{-2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mathcal{F}''(z_{2,\ell_2,0}(t), t) = & C_1(t) \exp\{c(t) z_{2,\ell_2,0}(t)\} \\ & \cdot \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(z_{2,\ell_2,0}(t) - z_{1,i_1}(t)) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(z_{2,\ell_2,0}(t) - z_{2,i_2}(t)) \\ & \cdot \prod_{j_2=1}^{m_2} \sigma^{\varphi_{2,j_2}-1}(z_{2,\ell_2,0}(t) - z_{2,j_2,1}(t)) \sigma^{-\varphi_{2,j_2}}(z_{2,\ell_2,0}(t) - z_{2,j_2,2}(t)) \\ & \cdot \prod_{j_1=1}^{m_1} s_{1,j_1}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) \left(\sigma(z_{2,\ell_2,0}(t) - z_0(t)) \sigma(z_{2,\ell_2,0}(t) - \overline{z_0(t)}) \right)^{-2}. \end{aligned}$$

В точке $z_0(t)$ функция $\dot{\mathcal{F}}(z, t)$ имеет полюс порядка не выше второго, а $\mathcal{F}'(z, t)$ имеет полюс порядка 2. Тогда функция $\mathcal{H}(z, t)$ имеет устранимую особенность в этой точке. Обозначим через $r_{-1}(t)$ вычет функции $\mathcal{F}(z, t)$ в точке $z_0(t)$. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(z, t) &= \frac{r_{-1}(t)}{z - z_0(t)} + r_0(t) + O(1), \\ \dot{\mathcal{F}}(z, t) &= \frac{r_{-1}(t) \dot{z}_0(t)}{(z - z_0(t))^2} + \frac{\dot{r}_{-1}(t)}{z - z_0(t)} + O(1), \\ \mathcal{F}'(z, t) &= -\frac{r_{-1}(t)}{(z - z_0(t))^2} + O(1).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Отсюда видим, что в окрестности точки $z_0(t)$ функция $\mathcal{H}(z, t)$ имеет разложение

$$\mathcal{H}(z, t) = -\dot{z}_0(t) + O(1), \quad z \rightarrow z_0(t).\tag{4.10}$$

Аналогично, функция $\mathcal{H}(z, t)$ имеет устранимую особенность в точке $\bar{z}_0(t)$.

Функция

$$\mathcal{S}(z, t) := \mathcal{H}(z, t) - \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \zeta(z - z_{1,j_1,0}(t)) - \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \zeta(z - z_{2,j_2,0}(t))$$

имеет только устранимые особенности в точках — прообразах концов разрезов — и в точках $z_0(t)$, $\bar{z}_0(t)$, а также в точках эквивалентных им по модулю решетки. Следовательно, она может быть голоморфно продолжена на всю плоскость $\mathbb{C}$. Из (4.2) имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(z + \omega_1, t) - \mathcal{S}(z, t) &= - \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \zeta(z + \omega_1 - z_{1,j_1,0}(t)) - \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \zeta(z + \omega_1 - z_{2,j_2,0}(t)) \\ &\quad + \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \zeta(z - z_{1,j_1,0}(t)) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \zeta(z - z_{2,j_2,0}(t)) \\ &= -\eta_1(t) \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \right),\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$\mathcal{S}(z + \omega_2(t), t) - \mathcal{S}(z, t) = -\dot{\omega}_2(t) - \eta_2(t) \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \right).\tag{4.12}$$

В силу (4.11) и (4.12), функция $\mathcal{S}$ растёт на бесконечности не быстрее, чем линейная функция, поэтому $\mathcal{S}(z, t) = \alpha(t)z + \beta(t)$. Таким образом

$$\mathcal{H}(z, t) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \zeta(z - z_{1,j_1,0}(t)) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \zeta(z - z_{2,j_2,0}(t)) + \alpha(t)z + \beta(t).\tag{4.13}$$

Из (4.11) при $z = 0$ следует, что

$$\alpha(t) = -\frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \right).\tag{4.14}$$

Из (4.10) находим

$$\begin{aligned} \beta(t) = & - \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \zeta(z_0(t) - z_{1,j_1,0}(t)) \\ & - \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \zeta(z_0(t) - z_{2,j_2,0}(t)) - \dot{z}_0(t) - \alpha(t) z_0(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Наконец, из (4.13), (4.14) и (4.15) мы выводим, что

$$\mathcal{H}(z, t) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \mathcal{K}_{1,j_1}(z, t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \mathcal{K}_{2,j_2}(z, t) - \dot{z}_0(t), \quad (4.16)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{1,j_1}(z, t) &= \zeta(z - z_{1,j_1,0}(t)) - \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} (z - z_0(t)) + \zeta(z_{1,j_1,0}(t) - z_0(t)), \\ \mathcal{K}_{2,j_2}(z, t) &= \zeta(z - z_{2,j_2,0}(t)) - \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} (z - z_0(t)) + \zeta(z_{2,j_2,0}(t) - z_0(t)). \end{aligned}$$

Из (4.12) при $z = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_2(t) &= -\alpha(t) \omega_2(t) - \eta_2(t) \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \right) \\ &= \frac{\eta_1(t) \omega_2(t) - \eta_2(t) \omega_1}{\omega_1} \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \right), \end{aligned}$$

и, с помощью соотношения Лежандра (2.1), мы получаем

$$\dot{\omega}_2(t) = i \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \right). \quad (4.17)$$

Отметим, что функции $\mathcal{K}_{1,j_1}$ и $\mathcal{K}_{2,j_2}$ схожи с ядром Вилля, входящим в интегральное представление, дающее решение задачи Шварца о восстановлении аналитической в кольце функции по граничным значениям её вещественной части (см, напр., [2, гл. XI, п. 56]). Таким образом, мы доказали следующий результат:

Теорема 4.1. *Гладкое семейство $\mathcal{F}(z, t)$ конформных отображений, определённое выше, удовлетворяет уравнению в частных производных*

$$\frac{\dot{\mathcal{F}}(z, t)}{\mathcal{F}'(z, t)} = \mathcal{H}(z, t), \quad (4.18)$$

где функция $\mathcal{H}(z, t)$ определена формулой (4.16). При этом в (4.16) у ζ -функции Вейерштрасса период ω_1 равен 2π , а период $\omega_2 = \omega_2(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.17).

Теперь найдём дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $z_{1,j_1,0}(t)$. Для этого запишем $\dot{\mathcal{F}}'(z_{1,j_1,0}(t), t)$ двумя разными способами. Из (4.7) следует, что

$$\mathcal{F}'(z, t) = \mathcal{F}''(z_{1,j_1,0}(t), t) (z - z_{1,j_1,0}(t)) + \dots$$

Тогда

$$\dot{z}_{1,j_1,0}(t) = - \frac{\dot{\mathcal{F}}'(z_{1,j_1,0}(t), t)}{\mathcal{F}''(z_{1,j_1,0}(t), t)}. \quad (4.19)$$

С другой стороны, по теореме 4.1, при $z \rightarrow z_{1,\ell_1,0}(t)$ мы имеем

$$\dot{\mathcal{F}}'(z_{1,\ell_1,0}(t), t) = \mathcal{F}''(z_{1,\ell_1,0}(t), t) \mathcal{H}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) + \mathcal{F}'(z_{1,\ell_1,0}(t), t) \mathcal{H}'(z_{1,\ell_1,0}(t), t). \quad (4.20)$$

Сравнивая (4.19) и (4.20), с учётом (4.8) мы получаем, что

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,\ell_1,0}(t) = \dot{z}_0(t) - \sum_{j_1=1, j_1 \neq \ell_1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \mathcal{K}_{1,j_1}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) - \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \mathcal{K}_{2,j_2}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) \\ - \mathcal{L}_{1,\ell_1}(t) \left[\sum_{j_1=1, j_1 \neq \ell_1}^{m_1} \mathcal{Q}_{1,j_1}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{Q}_{2,j_2}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) \right. \\ + \mathcal{Q}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) + \mathcal{Q}_0(z_{1,\ell_1,0}(t), t) \\ + (\varphi_{1,\ell_1} - 1) \zeta(z_{1,\ell_1,0}(t) - z_{1,\ell_1,1}(t)) - \varphi_{1,\ell_1} \zeta(z_{1,\ell_1,0}(t) - z_{1,\ell_1,2}(t)) \\ \left. - \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} (z_{1,\ell_1,0}(t) - z_0(t)) + \zeta(z_{1,\ell_1,0}(t) - z_0(t)) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2,\ell_2,0}(t) = \dot{z}_0(t) - \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \mathcal{K}_{1,j_1}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) - \sum_{j_2=1, j_2 \neq \ell_2}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \mathcal{K}_{2,j_2}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) \\ - \mathcal{L}_{2,\ell_2}(t) \left[\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{Q}_{1,j_1}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) + \sum_{j_2=1, j_2 \neq \ell_2}^{m_2} \mathcal{Q}_{2,j_2}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) \right. \\ + \mathcal{Q}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) + \mathcal{Q}_0(z_{2,\ell_2,0}(t), t) \\ + (\varphi_{2,\ell_2} - 1) \zeta(z_{2,\ell_2,0}(t) - z_{2,\ell_2,1}(t)) - \varphi_{2,\ell_2} \zeta(z_{2,\ell_2,0}(t) - z_{2,\ell_2,2}(t)) \\ \left. - \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} (z_{2,\ell_2,0}(t) - z_0(t)) + \zeta(z_{2,\ell_2,0}(t) - z_0(t)) \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Теперь найдём дифференциальное уравнение для $C_1(t)$. Из (4.9), (4.18) и (4.10) следует, что

$$\begin{aligned} r_{-1}(t) = -C_1(t) \exp\{c(t) z_0(t)\} \\ \cdot \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(z_0(t) - z_{1,i_1}(t)) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(z_0(t) - z_{2,i_2}(t)) \\ \cdot \prod_{j_1=1}^{m_1} s_{1,j_1}(z_0(t), t) \prod_{j_2=1}^{m_2} s_{2,j_2}(z_0(t), t) \sigma^{-2}(2z_0(t)). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Так как

$$\mathcal{Q}(z_0(t), t) + \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{Q}_{1,j_1}(z_0(t), t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{Q}_{2,j_2}(z_0(t), t) - 2\zeta(2z_0(t)) = 0, \quad (4.24)$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{r}_{-1}(t) = C_1(t) \exp\{c(t) z_0(t)\} \\ \cdot \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(z_0(t) - z_{1,i_1}(t)) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(z_0(t) - z_{2,i_2}(t)) \\ \cdot \prod_{j_1=1}^{m_1} s_{1,j_1}(z_0(t), t) \prod_{j_2=1}^{m_2} s_{2,j_2}(z_0(t), t) \sigma^{-2}(2z_0(t)) \end{aligned}$$

$$\cdot \left[\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \left(\wp(z_0(t) - z_{1,j_1,0}(t)) + \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \right) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \left(\wp(z_0(t) - z_{2,j_2,0}(t)) + \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \right) \right].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) = & \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) \left(\wp(z_0(t) - z_{1,j_1,0}(t)) + \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \right) \\ & + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \left(\wp(z_0(t) - z_{2,j_2,0}(t)) + \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $p(t) = \ln r_{-1}(t)$.

Дифференцируя (4.24), мы получаем

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(t) = & i \operatorname{Im} \frac{\mathcal{X}(t) + \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{X}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{X}_{2,j_2}(t)}{\mathcal{P}(t) + \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{P}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{P}_{2,j_2}(t)} \\ & + \dot{\omega}_2(t) \operatorname{Re} \frac{\mathcal{C}(t) + \mathcal{R}(t) + \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{R}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{R}_{2,j_2}(t) + \frac{1}{2} \mathcal{Y}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{Y}_{2,j_2}(t)}{\mathcal{P}(t) + \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{P}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{P}_{2,j_2}(t)}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) = & \sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) \dot{z}_{1,i_1}(t) \left(\wp(z_0(t) - z_{1,i_1}(t)) - \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \right) \\ & + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) \dot{z}_{2,i_2}(t) \left(\wp(z_0(t) - z_{2,i_2}(t)) - \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \right), \\ \mathcal{X}_{k,j_k}(t) = & \dot{x}_{k,j_k,0}(t) \wp(z_0(t) - z_{k,j_k,0}(t)) + (\varphi_{k,j_k} - 1) \dot{x}_{k,j_k,1}(t) \wp(z_0(t) - z_{k,j_k,1}(t)) \\ & + \varphi_{k,j_k} \dot{x}_{k,j_k,2}(t) \wp(z_0(t) - z_{k,j_k,2}(t)), \quad 1 \leq k \leq 2, \\ \mathcal{Y}(t) = & \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) \wp(z_0(t) - z_{2,i_2}(t)), \\ \mathcal{Y}_{2,j_2}(t) = & \wp(z_0(t) - z_{2,j_2,0}(t)) + (\varphi_{2,j_2} - 1) \wp(z_0(t) - z_{2,j_2,1}(t)) + \varphi_{2,j_2} \wp(z_0(t) - z_{2,j_2,2}(t)), \\ \mathcal{C}(t) = & \frac{2}{\omega_1} \frac{\partial \zeta(\frac{\omega_1}{2})}{\partial \omega_2} \left[\sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) z_{1,i_1}(t) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) x_{2,i_2}(t) \right. \\ & + \sum_{j_1=1}^{m_1} (z_{1,j_1,0}(t) + (\varphi_{1,j_1} - 1) z_{1,j_1,1}(t) - \varphi_{1,j_1} z_{1,j_1,2}(t)) \\ & + \sum_{j_2=1}^{m_2} (x_{2,j_2,0}(t) + (\varphi_{2,j_2} - 1) x_{2,j_2,1}(t) - \varphi_{2,j_2} x_{2,j_2,2}(t)) \Big] \\ & + 2 \frac{\partial \zeta(\frac{\omega_2}{2})}{\partial \omega_2} - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(t) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) \wp(z_0(t) - z_{1,i_1}(t)) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) \wp(z_0(t) - z_{2,i_2}(t)) - 4\wp(2z_0(t)), \\
\mathcal{P}_{k,j_k}(t) &= \wp(z_0(t) - z_{k,j_k,0}(t)) + (\varphi_{k,j_k} - 1) \wp(z_0(t) - z_{k,j_k,1}(t)) \\
&\quad + \varphi_{k,j_k} \wp(z_0(t) - z_{k,j_k,2}(t)), \quad 1 \leq k \leq 2, \\
\mathcal{R}(t) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) \frac{\partial \zeta(z_0(t) - z_{1,i_1}(t))}{\partial \omega_2} + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) \frac{\partial \zeta(z_0(t) - z_{2,i_2}(t))}{\partial \omega_2} - 2 \frac{\partial \zeta(z_0(t))}{\partial \omega_2}, \\
\mathcal{R}_{k,j_k}(t) &= \frac{\partial \zeta(z_0(t) - z_{k,j_k,0}(t))}{\partial \omega_2} + (\varphi_{k,j_k} - 1) \frac{\partial \zeta(z_0(t) - z_{k,j_k,1}(t))}{\partial \omega_2} \\
&\quad - \varphi_{k,j_k} \frac{\partial \zeta(z_0(t) - z_{k,j_k,2}(t))}{\partial \omega_2}, \quad 1 \leq k \leq 2.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем следующее утверждение.

Теорема 4.2. Акцессорные параметры семейства конформных отображений $\mathcal{F}(z, t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3)–(4.6), (4.17), (4.21), (4.22), (4.25) и (4.26), где $p(t) = \ln r_{-1}(t)$ и $r_{-1}(t)$ определяется из (4.23), а функция $\mathcal{H}(z, t)$ определена формулой (4.16). В (4.26) частная производная функции $\zeta(z)$ по периоду ω_2 вычисляется по формуле (2.2).

Следствие 4.1. Конформный модуль $m(t) = \text{Mod}(\mathcal{D}(t))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{m}(t) = \frac{1}{2\omega_1} \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t) \right).$$

Замечание 4.1. Заметим, что правые части (4.3)–(4.6), (4.17), (4.21), (4.22), (4.25) и (4.26) имеют особенности в начальный момент ($t = 0$). Это вызвано тем, что длины разрезов стремятся к нулю при $t \rightarrow 0$, следовательно, при любых фиксированных $1 \leq k \leq 2$ и $1 \leq j_k \leq m_k$ точки $z_{k,j_k,0}(t)$, $z_{k,j_k,1}(t)$ и $z_{k,j_k,2}(t)$ имеют один и тот же предел. Чтобы избежать вырождения при решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, на практике мы меняем начальные значения параметров на значения порядка 10^{-12} .

Замечание 4.2. Рассмотрим случай, когда мы делаем новый $(m_1 + 1)$ разрез из j -той вершины Γ_1 (для Γ_2 будет аналогично), тогда семейство конформных отображений (4.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(z, t) &= C_1(t) \int_0^z \exp\{c(t) \xi\} \prod_{i_1=1, i_1 \neq j}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(\xi - z_{1,i_1}(t)) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(\xi - z_{2,i_2}(t)) \\
&\quad \cdot \prod_{j_1=1}^{m_1+1} s_{1,j_1}(\xi, t) \prod_{j_2=1}^{m_2} s_{2,j_2}(\xi, t) (\sigma(\xi - z_0(t)) \sigma(\xi - \bar{z}_0(t)))^{-2} d\xi + C_2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
s_{1,j_1}(z, t) &= \sigma(z - z_{1,j_1,0}(t)) \sigma^{\varphi_{1,j_1}-1}(z - z_{1,j_1,1}(t)) \sigma^{-\varphi_{1,j_1}}(z - z_{1,j_1,2}(t)), \quad 1 \leq j_1 \leq m_1, \\
s_{1,m_1+1}(z, t) &= \sigma(z - z_{1,m_1+1,0}(t)) \sigma^{\varphi_{1,m_1+1,1}-1}(z - z_{1,m_1+1,1}(t)) \sigma^{\varphi_{1,m_1+1,2}-1}(z - z_{1,m_1+1,2}(t)), \\
s_{2,j_2}(z, t) &= \sigma(z - z_{2,j_2,0}(t)) \sigma^{\varphi_{2,j_2}-1}(z - z_{2,j_2,1}(t)) \sigma^{-\varphi_{2,j_2}}(z - z_{2,j_2,2}(t)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(t) = \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} & \left[\sum_{i_1=1, i_1 \neq j}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1) z_{1,i_1}(t) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1) x_{2,i_2}(t) \right. \\
& + \sum_{j_1=1}^{m_1} (z_{1,j_1,0}(t) + (\varphi_{1,j_1} - 1) z_{1,j_1,1}(t) - \varphi_{1,j_1} z_{1,j_1,2}(t)) \\
& + z_{1,m_1+1,0}(t) + (\varphi_{1,m_1+1,1} - 1) z_{1,m_1+1,1}(t) + (\varphi_{1,m_1+1,2} - 1) z_{1,m_1+1,2}(t) \\
& \left. + \sum_{j_2=1}^{m_2} (x_{2,j_2,0}(t) + (\varphi_{2,j_2} - 1) x_{2,j_2,1}(t) - \varphi_{2,j_2} x_{2,j_2,2}(t)) \right] + \eta_2(t).
\end{aligned}$$

Внутренние углы области при основании разреза удовлетворяют соотношению $\varphi_{1,m_1+1,1} + \varphi_{1,m_1+1,2} = \alpha_{1,j}$. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений для этого семейства также можно переписать в подходящем виде.

5. ПРИМЕРЫ

В этом разделе мы рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих предложенный метод. Все вычисления и построения проводились с помощью пакета Wolfram Mathematica (версия 13.3).

Пример 5.1. Рассмотрим задачу о приближённом нахождении конформного отображения кольца $\mathcal{A} = \{\tau : q < |\tau| < 1\}$ на двусвязную область $\mathcal{D}_1$, являющуюся внешностью двух правильных треугольников с вершинами в точках

$$w_{1,1} = -1 - ib, \quad w_{1,2} = 1 - ib, \quad w_{1,3} = i(-b + \sqrt{3})$$

и

$$w_{2,1} = -1 + ib, \quad w_{2,2} = 1 + ib, \quad w_{2,3} = i(b - \sqrt{3})$$

(рис. 5). Согласно теореме 3.1 конформное отображение кольца на $\mathcal{D}_1$ имеет вид

$$\mathcal{F}(z) = C_1 \int_0^z \exp\{c\xi\} \prod_{k,j=1}^3 \sigma^{\frac{2}{3}}(\xi - z_{k,j}) (\sigma(\xi - z_0) \sigma(\xi - \bar{z}_0))^{-2} d\xi + C_2, \quad (5.1)$$

где $z = -i \ln \tau$ и

$$c = \frac{2}{3} \frac{\eta_1}{\omega_1} \left[\sum_{i_1=1}^3 z_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^3 x_{2,i_2} \right] + \eta_2.$$

Так как область $\mathcal{D}_1$ симметрична относительно мнимой оси, мы можем считать, что прообразы вершин треугольников симметричны относительно мнимой оси, т.е.

$$\begin{aligned}
z_{1,1} &= \beta, & z_{1,2} &= -\beta, & z_{1,3} &= \frac{\omega_1}{2}, \\
x_{2,1} &= \beta, & x_{2,2} &= -\beta, & x_{2,3} &= \frac{\omega_1}{2}, & 0 < \beta < \frac{\omega_1}{2},
\end{aligned}$$

кроме того,

$$z_0 = \frac{i \ln q^{-1}}{2}.$$

При этом, $\mathcal{F}(z_{k,j}) = w_{k,j}$, $1 \leq k, j \leq 3$.

Нашей задачей является приближённое нахождение параметров в (5.1). Для этого рассмотрим конформное отображение кольца $\mathcal{A}$ на область $\mathcal{D}_0$, которая является внешностью отрезков $[-1 - ib, 1 - ib]$ и $[-1 + ib, 1 + ib]$; все параметры для конформного отображения кольца на область $\mathcal{D}_0$ известны (см. пример 3.2). Выпустим из точек $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $w_{2,1}$, $w_{2,2}$

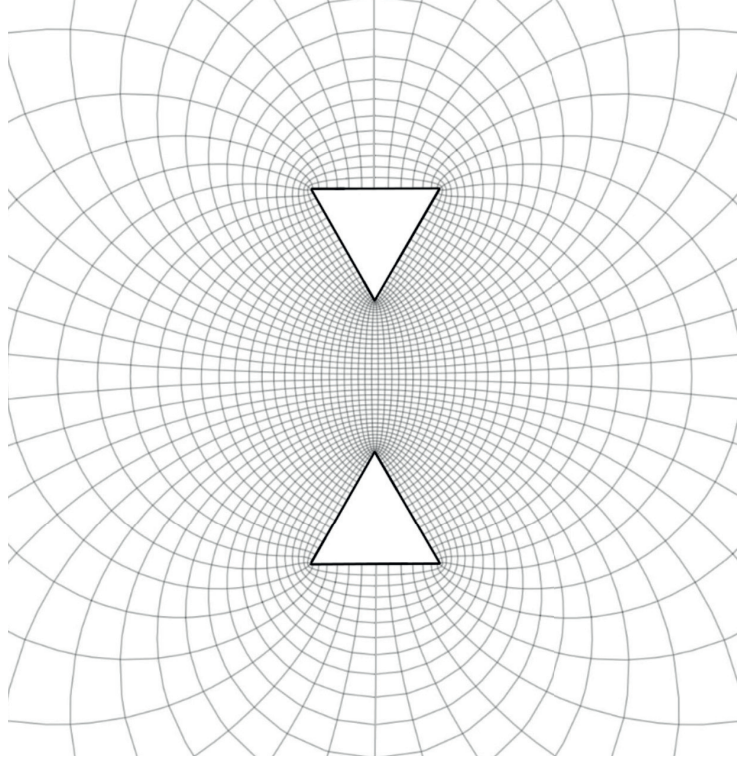


РИС. 5. Образ полярной сетки при конформном отображении кольца на внешность двух правильных треугольников.

прямолинейные разрезы. Пусть концы этих разрезов двигаются с постоянными скоростями по следующим законам

$$\begin{aligned} v_{1,1}(t) &= -1 - ib + (1 + i\sqrt{3})t, & v_{1,2}(t) &= 1 - ib + (-1 + i\sqrt{3})t, \\ v_{2,1}(t) &= -1 + ib + (1 - i\sqrt{3})t, & v_{2,2}(t) &= 1 + ib + (-1 - i\sqrt{3})t, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Тогда при $t = 1$ концы разрезов смыкаются в точках $w_{1,3}$ и $w_{2,3}$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{D}(t)$ двусвязную область, которая получается из $\mathcal{D}_0$ проведением разрезов вдоль двух ломаных: первая имеет вершины в точках $v_{1,1}(t)$, $w_{1,1}$, $w_{1,2}$, $v_{1,2}(t)$, а вторая — в точках $v_{2,1}(t)$, $w_{2,1}$, $w_{2,2}$, $v_{2,2}(t)$. Заметим, что $\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}_0$ и при $t \rightarrow 1$ области $\mathcal{D}(t)$ сходятся как к ядру к области $\mathcal{D}_1$.

Семейство конформных отображений колец $\mathcal{A}(t) = \{\tau : q(t) < |\tau| < 1\}$ на $\mathcal{D}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, t) &= C_1(t) \int_0^z \exp\{c(t)\xi\} \sigma^{\frac{2}{3}}(\xi - z_{1,1}(t)) \sigma^{\frac{2}{3}}(\xi - z_{1,2}(t)) \\ &\quad \cdot \sigma(\xi - z_{1,3}(t)) \sigma^{-\frac{2}{3}}(\xi - z_{1,4}(t)) \sigma^{-\frac{2}{3}}(\xi - z_{1,5}(t)) \sigma(\xi - z_{1,6}(t)) \\ &\quad \cdot \sigma^{\frac{2}{3}}(\xi - z_{2,1}(t)) \sigma^{\frac{2}{3}}(\xi - z_{2,2}(t)) \sigma(\xi - z_{2,3}(t)) \sigma^{-\frac{2}{3}}(\xi - z_{2,4}(t)) \\ &\quad \cdot \sigma^{-\frac{2}{3}}(\xi - z_{2,5}(t)) \sigma(\xi - z_{2,6}(t)) (\sigma(\xi - z_0(t)) \sigma(\xi - \bar{z}_0(t)))^{-2} d\xi + C_2(t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $z = -i \ln \tau$ и

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} \left[\frac{2}{3} z_{1,1}(t) + \frac{2}{3} z_{1,2}(t) + z_{1,3}(t) - \frac{2}{3} z_{1,4}(t) - \frac{2}{3} z_{1,5}(t) + z_{1,6}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} z_{2,1}(t) + \frac{2}{3} z_{2,2}(t) + z_{2,3}(t) - \frac{2}{3} z_{2,4}(t) - \frac{2}{3} z_{2,5}(t) + z_{2,6}(t) \right] + \eta_2(t). \end{aligned}$$

При $t = 0$ начальные значения параметров совпадают со значениями для конформного отображения кольца на $\mathcal{D}_0$, их можно взять из таблицы 1.

Решая задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной для семейства (5.2) (см. теорему 4.2 и замечание 4.2), получаем при $t = 1$ акцессорные параметры $\mathcal{D}_1$; они приведены в таблице 3 при $b = 2.87161351081953$. Также мы получили, что конформный модуль $m(1) = 0.52465479179157$.

ТАБЛИЦА 3. Некоторые значения акцессорных параметров внешности двух правильных треугольников.

$q(1)$	$\omega_2(1)$	$z_0(1)$
0.03701236329192	6.59300655825243	1.64825163956313
$z_{1,1}(1)$	$z_{1,2}(1)$	$z_{1,3}(1)$
0.74428332332553	-0.74428332332553	-3.13964907706861
$z_{1,4}(1)$	$z_{1,5}(1)$	$z_{1,6}(1)$
-3.14159265358973	3.14159265358984	3.13964907706868
$x_{2,1}(1)$	$x_{2,2}(1)$	$x_{2,3}(1)$
0.74428332332553	-0.74428332332553	-3.13964907706784
$x_{2,4}(1)$	$x_{2,5}(1)$	$x_{2,6}(1)$
-3.14159265358959	3.14159265358998	3.13964907706810

Акцессорные параметры $x_{k,3}$ и $x_{k,4}$ ($1 \leq k \leq 2$) при $t \rightarrow 1$ неограниченно сближаются и сливаются в точку $-\frac{\omega_1}{2} = -\pi$, однако при численных расчётах их значения отличаются; это вызвано неравномерной сходимостью семейства конформных отображений вблизи указанной точки. Аналогично точки $x_{k,5}$ и $x_{k,6}$ при $t \rightarrow 1$ сливаются в точку $\frac{\omega_1}{2} = \pi$. Возникает интерес, так как $z_{1,6} < z_{1,5} \leq \frac{\omega_1}{2}$, тогда точка $z_{1,6}$ при $t \rightarrow 1$ поджимает точку $z_{1,5}$ и соответственно имеет меньшую точность, что и показывают численные вычисления. Отметим, что точность вычислений для акцессорных параметров составила до 10^{-15} , а точность вычислений вершин треугольников — до 10^{-6} . Расстояние между треугольниками составило 1.13956922911083, а точное значение $b - \sqrt{3} = 1.13956270325065$ ($b = 2.87161351081953$, см. подр. пример 3.2).

Пример 5.2. Рассмотрим задачу о построении конформного отображения кольца на внешность двух прямоугольников

$$\Pi_1 = [-b - 2, -b] \times [b, b + 1]$$

и

$$\Pi_2 = [b, b + 4] \times [-b - 2, -b]$$

(рис. 6). Решение задачи будет состоять из трёх этапов. На каждом этапе будет решаться задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом решения (акцессорные параметры), полученные на каждом из этапов, кроме последнего, будут определять начальные условия для системы, решаемой на последующем этапе. На каждом этапе мы будем рассматривать значения параметра t на отрезке $[0, 1]$.

Этап 1. В качестве начального конформного отображения возьмём отображение кольца на двусвязную область, являющуюся внешностью отрезков $[-2 - b + ib, -b + ib]$ и $[-2 - b - ib, -b - ib]$. Далее будем рассматривать семейство конформных отображений колец на внешность двух отрезков $[-2 - b + ib, -b + ib]$ и $[-2 - b + (2 + 2b)t - ib, -b + (4 + 2b)t - ib]$ (рис. 7). Здесь мы применяем результаты п. 4 и находим значения параметров при $t = 1$, считая, что начальные значения (при $t = 0$) нам известны; мы возьмём их из таблицы 2 при $k = 1/2$.

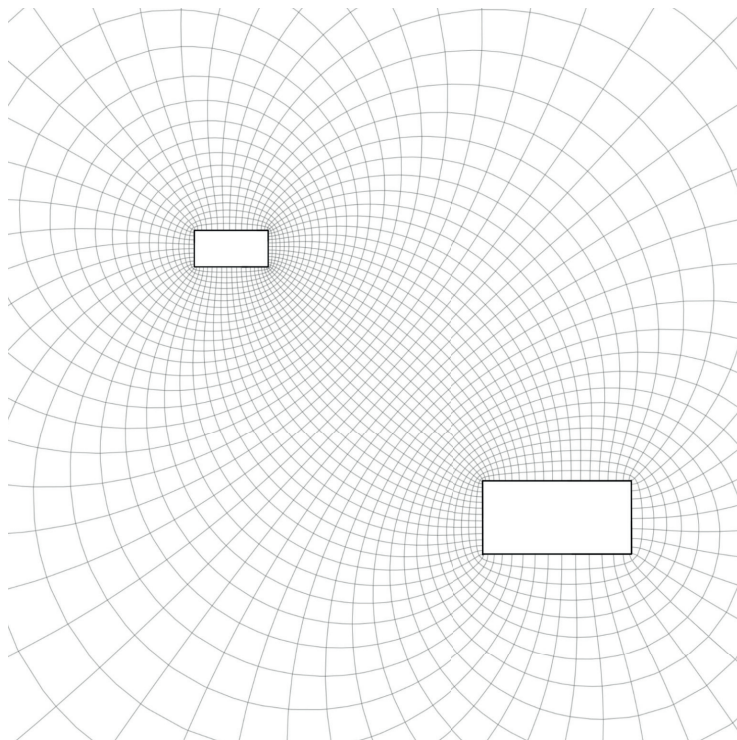


Рис. 6. Образ полярной сетки при конформном отображении кольца на внешность двух прямоугольников.

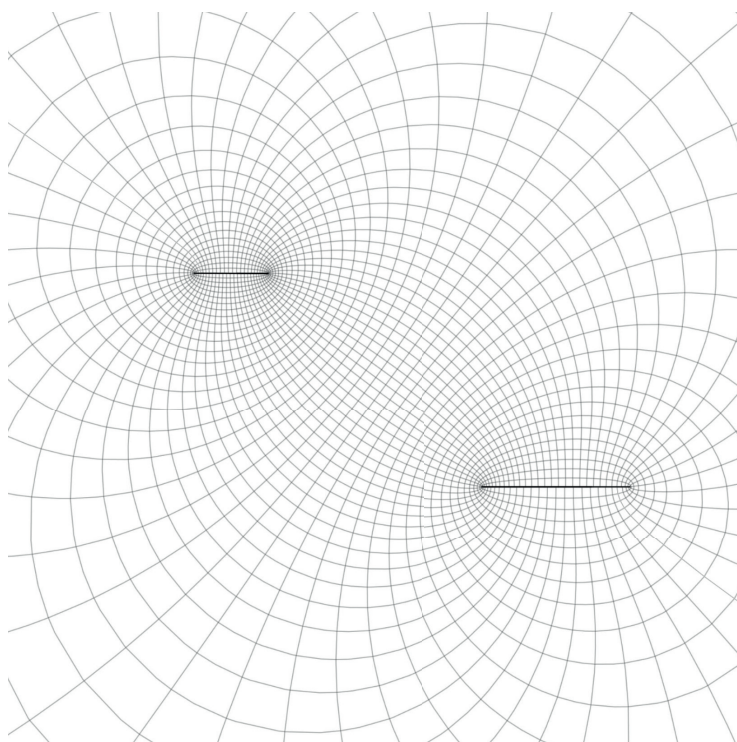


Рис. 7. Образ полярной сетки при конформном отображении кольца на внешность отрезков $[-2 - b + ib, -b + ib]$ и $[b - ib, 4 + b - ib]$.

Этап 2. Теперь будем рассматривать семейство отображений колец на внешность двух ломаных. Первая ломаная состоит из отрезков $[-2 - b + i(b+t), -2 - b + ib]$, $[-2 - b + ib, -b + ib]$ и $[-b + i(b+t), -b + ib]$, а вторая из отрезков $[b - i(b-2t), b - ib]$, $[b - ib, 4 + b - ib]$ и

$[4 + b - i(b - 2t), 4 + b - ib]$ (рис. 8). При $t = 1$ получаем область, разрезанную вдоль ломаных, которые обозначим через L_1 и L_2 .

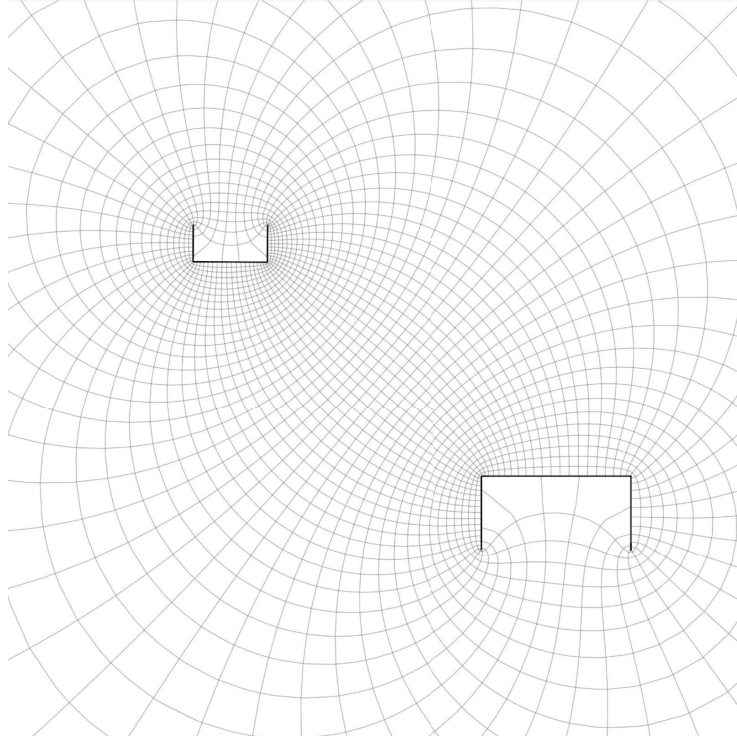


РИС. 8. Образ полярной сетки при конформном отображении кольца на неограниченную область, получающуюся удалением двух ломаных, составленных из шести отрезков.

Этап 3. На этом этапе мы выпускаем разрезы из концов каждой ломаной L_k , $k = 1, 2$, параллельно действительной оси на встречу друг другу. При $t \rightarrow 1$ контуры полученных ломаных стремятся к границам прямоугольников и по теореме Каратеодори предельная функция отображает кольцо на внешность прямоугольников Π_1 и Π_2 (рис. 6). Полученные акцессорные параметры и конформный модуль приведены в таблице 4. Отметим, что точность вычислений вершин составила до 10^{-5} .

ТАБЛИЦА 4. Некоторые значения акцессорных параметров и конформного модуля внешности двух прямоугольников.

$m(1)$	$q(1)$	$\omega_2(1)$	$z_0(1)$
0.69999254112105	0.01229966995971	8.79636569901417	1.86214282687967
$z_{1,1}(1)$	$z_{1,2}(1)$	$z_{1,3}(1)$	$z_{1,4}(1)$
3.04060273697885	5.24065213689680	6.23001742679993	1.49868623715722
$x_{2,1}(1)$	$x_{2,2}(1)$	$x_{2,3}(1)$	$x_{2,4}(1)$
1.18569206112100	3.23502905829918	4.63591023096649	0.06254300387664

Пример 5.3. Способами, приведёнными в предыдущих примерах мы подсчитали акцессорные параметры для внешности квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ и равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом равным единице (рис. 9). В таблице 5 мы приводим значения акцессорных параметров. Также мы получили конформный модуль $m = 0.37364295922581$. Отметим, что точность вычислений вершин составила до 10^{-5} .

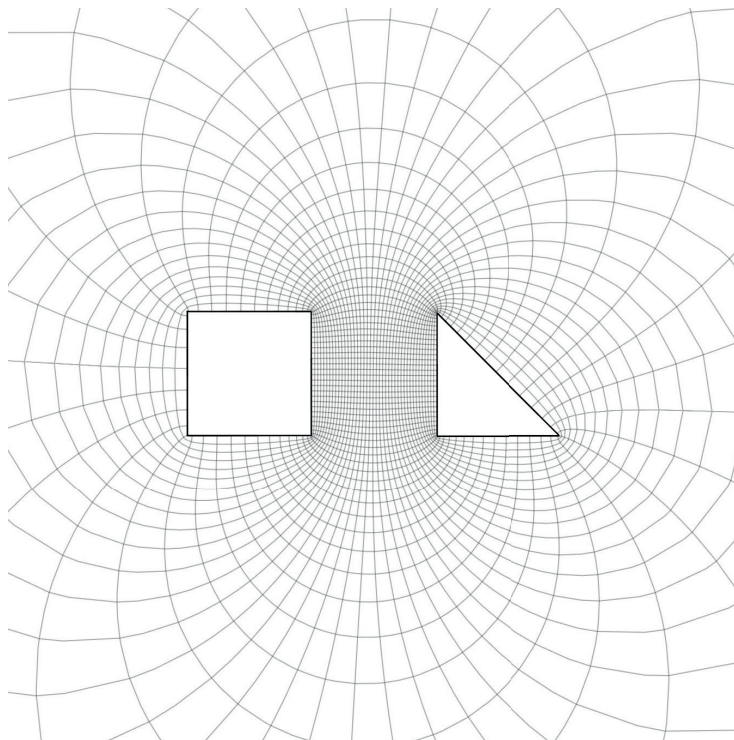


Рис. 9. Образ полярной сетки при конформном отображении кольца на внешность квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника.

ТАБЛИЦА 5. Некоторые значения аксессуарных параметров внешности квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника.

q	ω_2
0.09559182725546	4.69533590307750
z_0	$z_{1,1}, \alpha_{1,1} = \frac{3}{2}$
1.26225237317382	1.79476751461141
$z_{1,2}, \alpha_{1,2} = \frac{7}{4}$	$z_{1,3}, \alpha_{1,3} = \frac{7}{4}$
0.21796489082999	4.76059961486419
$z_{2,1}, \alpha_{2,1} = \frac{3}{2}$	$z_{2,2}, \alpha_{2,2} = \frac{3}{2}$
5.90482621712606	4.57710889452420
$z_{2,3}, \alpha_{2,3} = \frac{3}{2}$	$z_{2,4}, \alpha_{2,4} = \frac{3}{2}$
1.81377196659970	0.43366143113865

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.А. Александров. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций*. М.: Наука. 1976.
2. Н.И. Ахиезер. *Элементы теории эллиптических функций*. М.: Наука. 1970.
3. Г. Голузин, Л. Канторович, В. Крылов, П. Мелентьев, М. Муратов, Н. Стенин. *Конформное отображение односвязных и многосвязных областей*. М.: ОНТИ. 1937.
4. Г.М. Голузин. *О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце* // Мат. сб. **71**:2, 469–476 (1951).
5. В.В. Голубев. *Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке*. М.: Изд. отд. ЦАГИ. 1927.
6. В. Коппенфельс, Ф. Штальман. *Практика конформных отображений*. М.: ИИЛ. 1963.

7. Н.Н. Накипов, С.Р. Насыров. *Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца* // Уч. зап. Казан. унив. Сер. физ.-мат. науки. **158**:2, 202–220 (2016).
8. С.Р. Насыров. *Униформизация однопараметрических семейств комплексных торов* // Изв. вузов. Матем. **8**, 42–52 (2017).
9. A. Betz. *Konforme Abbildung*. Springer-Verlag, Berlin (1948).
10. L. Bieberbach. *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln* // S.-B. Preuss. Akad. Wiss, 940–955 (1916).
11. F. Bracci, M.D. Contreras, S. Diaz-Madrigal, A. Vasilev. *Classical and stochastic Löwner–Kufarev equations* // in “Harmonic and complex analysis and its applications”, A. Vasil’ev ed., Birkhäuser/Springer, Cham, 39–134 (2014).
12. L. de Branges. *A proof of the Bieberbach conjecture* // Acta Math. **154**:1–2, 137–151 (1985).
13. P.F. Byrd. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, Berlin (1971).
14. D. Dautova, S. Nasyrov, M. Vuorinen. *Conformal module of the exterior of two rectilinear slits* // Comput. Methods Funct. Theory. **21**:1, 109–130 (2021).
15. T.A. Driscoll, L.N. Trefethen. *Schwarz — Christoffel Mapping*. Cambridge University Press, Cambridge (2002).
16. A. Dyutin, S. Nasyrov. *One parameter families of conformal mappings of bounded doubly connected polygonal domains* // Lobachevskii J. Math. **45**:1, 390–411 (2024).
17. G.M. Goluzin. *Geometric theory of functions of a complex variable*. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1969).
18. P. Henrici. *Applied and computational complex analysis. Vol. 3*. John Wiley & Sons, New York (1986).
19. V.Y. Komatu. *Darstellungenn der in einem Kreisringe analytischen Funktionen nebst den Anwendungen auf kanforme Abbildung über Polygonalringgebiete* // Jpn. J. Math. **19**:2, 203–215 (1945). (in German).
20. V.Y. Komatu. *Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten* // Proc. Phys.–Math. Soc. Japan (3) **25**, 1–42 (1943). (in German).
21. S. Lang. *Elliptic Functions*. Springer, New York (1987).
22. S.R. Nasyrov. *Uniformization of simply-connected ramified coverings of the sphere by rational functions* // Lobachevskii J. Math. **39**:2, 252–258 (2018).
23. A. Posadskii, S. Nasyrov. *One-parameter families of conformal mappings of the half-plane onto polygonal domains with several slits* // Lobachevskii J. Math. **44**:4, 1448–1463 (2023).

Андрей Юрьевич Дютин,
 Казанский (Приволжский) федеральный университет,
 ул. Кремлевская, 35,
 450008, г. Казань, Россия
 E-mail: dyutin.andrei2016@yandex.ru

Семен Рафаилович Насыров,
 Казанский (Приволжский) федеральный университет,
 ул. Кремлевская, 35,
 450008, г. Казань, Россия
 E-mail: semen.nasyrov@yandex.ru