УДК 517.958

АТТРАКТОРЫ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА — ФОЙГТА С УЧЕТОМ ПАМЯТИ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

М.В. ТУРБИН, А.С. УСТЮЖАНИНОВА

Аннотация. В работе доказывается существование траекторных и глобальных аттракторов для модифицированной модели Кельвина — Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения жидкости. Доказательство основано на аппроксимационно–топологическом подходе к исследованию задач гидродинамики. А именно, на первом этапе приводятся необходимые функциональные пространства и даётся операторная трактовка рассматриваемой задачи. Затем вводится аппроксимационная задача и доказывается её разрешимость на конечном отрезке и на полуоси. Также при некоторых условиях на коэффициенты задачи устанавливаются экспоненциальные оценки решений, не зависящие от параметра аппроксимации. После чего на основе предельного перехода устанавливается существование слабого решения исходной задачи на полуоси. Затем определяется пространство траекторий рассматриваемой задачи, устанавливается корректность этого определения и доказывается теорема существования минимального траекторного и глобального аттракторов.

Ключевые слова: траекторный аттрактор, глобальный аттрактор, модифицированная модель Кельвина — Фойгта, регулярный Лагранжев поток, априорная оценка, теорема существования.

Mathematics Subject Classification: 35B41, 35Q35, 76A10

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — выпуклая ограниченная область с гладкой границей. Система уравнений, которая соответствует модифицированной модели Кельвина — Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения жидкости, имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \Delta v}{\partial x_i}$$
$$- \sum_{i=1}^{L} \int_0^t \beta_i e^{-\alpha_i (t-s)} \Delta v(s, z(s,t,x))\, ds + \nabla p = f, \quad (t,x) \in Q_T = [0,T] \times \Omega; \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \tag{1.2}$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x)) ds, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

M.V. Turbin, A.S. Ustiuzhaninova, Attractors of modified Kelvin — Voigt model with memory along fluid trajectories.

Работа выполнена за счёт Российского научного фонда (грант № 23-21-00091).

Поступила 4 апреля 2024 г.

Здесь v — вектор скорости частицы жидкости, p — давление жидкости, f — вектор плотности внешних сил, $\nu > 0$, $\varkappa > 0$ — вязкость жидкости и время запаздывания, соответственно, β_i, α_i, $i = \overline{1, L}$, — некоторые константы. Исходя из физического смысла предполагается, что константы α_i, $i = \overline{1, L}$, различны, вещественны и положительны. Функция $z(\tau; t, x)$ — траектория движения частиц жидкости, соответствующая полю скоростей v.

Для системы (1.1)–(1.3) рассмотрим начально–краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v(0, x) = a(x), \quad x \in \Omega, \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{1.4}$$

Модель движения жидкости Кельвина — Фойгта описывает движение различных растворов и расплавов полимеров [1] и была подтверждена экспериментальным путём [2], [3]. Она является одной из моделей линейных вязкоупругих жидкостей с конечным числом дискретно распределённых времен релаксации и ретардации. Общая теория таких жидкостей, включающая в себя и модель Кельвина — Фойгта, была построена на основе принципа суперпозиции Больцмана, согласно которому все воздействия на среду независимы и аддитивны, а реакции среды на внешние воздействия линейны [4]. Подробнее о системе уравнений, соответствующей модели Кельвина — Фойгта, см. [5], [6]. Модифицированная модель Кельвина — Фойгта получается из модели Кельвина — Фойгта аналогичным работе [1] способом. А именно, в силу принципа малости относительных скоростей деформаций отбрасываются члены, содержащие произведения производных по пространственным переменным скорости движения жидкости.

Поскольку в (1.1) содержится интеграл, который берется вдоль траекторий движения жидкости, то данная модель является более физичной по сравнению со стандартными моделями, которые получаются из реологического соотношения с частной производной по времени. Такие модели более точно описывают поведение жидкости. Но это как раз и является основной проблемой при доказательстве существования слабых решений соответствующей начально–краевой задачи. Дело в том, что для нахождения траекторий движения частиц жидкости необходимо решать задачу Коши (1.3). Но гладкости слабого решения обычно недостаточно для классической разрешимости задачи Коши. Выходом из сложившейся ситуации является использование теории регулярных Лагранжевых потоков, созданной в работе [7]. В работе [8] эта теория была успешно применена к модели Олдройдовского типа. Также на основе этой теории в работе [9] для исходной модели Кельвина — Фойгта было доказано существование слабых решений.

Отдельный интерес при исследовании задач гидродинамики представляет исследование предельного поведения решений, а именно поведения решений при стремлении времени к бесконечности. В таких задачах решения могут стремиться к некоторому множеству в фазовом пространстве. Здесь под фазовым пространством понимается множество, элементы которого отождествляются с состояниями системы. То есть вне зависимости от начальных условий задачи её решения оказываются в этом множестве возможно через достаточное большое время. Подобные множества называют аттракторами, поскольку решения притягиваются к ним.

Поскольку в задачах гидродинамики не всегда удается установить единственность решений, то классический подход, основанный на теории полугрупп (см., например, [10], [11]) оказывается неприменим. Выходом из этой ситуации стала теория траекторных аттракторов созданная М.И. Вишиком и В.В. Чепыжовым [12], [13], а также независимо от них для трёхмерной системы Навье — Стокса подобная теория была создана Дж. Селлом и Й. Ю [14].

В теории траекторных аттракторов вместо полугруппы эволюционных операторов рассматривается некоторое множество функций, зависящих от времени и принимающих значения в фазовом пространстве. Это множество функций называется пространством траекторий, а отдельные принадлежащие ему функции называются траекториями. Каждая траектория представляет собой некий вариант развития системы. Пространство траекторий позволяет обойти требование единственности решения. В рассматриваемом случае из некоторой точки фазового пространства могут выходить несколько траекторий. Или, что то же самое, для одного и того же начального условия может существовать несколько решений.

В дальнейшем теория траекторных аттракторов получила развитие в работах В.Г. Звягина и Д.А. Воротникова [15], [16] и применена для ряда задач математической гидродинамики [17]–[22]. В частности, удалось отказаться от условия трансляционной инвариантности пространства траекторий. Это условие является излишне ограничительным и зачастую не выполняется в задачах гидродинамики. Дело в том, что пространства траекторий в рассматриваемой теории обычно строятся на основе энергетических оценок. Получить необходимую трансляционно инвариантную оценку получается не всегда. Но при этом зачастую удаётся установить экспоненциальную оценку, которой, благодаря результатам В.Г. Звягина и Д.А. Воротникова, оказывается вполне достаточно.

В данной работе на основе теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий доказывается существование минимального траекторного и глобального аттракторов для модифицированной модели Кельвина — Фойгта с учетом памяти вдоль траекторий движения жидкости. А именно, для изучаемой модели вводится понятие слабого решения на конечном отрезке и на полуоси. После чего, на основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию задач математической гидродинамики (см., например, [6], [23]–[26]) доказывается существование их решений. Затем на основе установленных экспоненциальных оценок решений вводится пространство траекторий, устанавливается корректность этого определения и доказывается существование минимального траекторного и глобального аттракторов исследуемой задачи.

2. Необходимые сведения из теории аттракторов

В работе используются следующие понятия и утверждения из теории аттракторов (более подробно см., например, монографию [15], а также статьи [16], [19]).

Пусть E, E_0 — два банаховых пространства, пространство E рефлексивно и вложение $E \subset E_0$ — непрерывно. Через $\mathbb{R}_+$ обозначается неотрицательная полуось числовой прямой $\mathbb{R}$.

Пространство $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ состоит из непрерывных функций, определённых на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в E_0. Так как полуось $\mathbb{R}_+$ некомпактна, в линейном пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ нельзя задать обычную норму пространства непрерывных функций. В пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ вводится семейство полунорм:

$$\|u\|_n = \|u\|_{C([0,n],E_0)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{u_m\}$ из $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ сходится к функции u при $m \to \infty$, если $\|u_m - u\|_n \to 0$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Таким образом пространство $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ является счётно–нормированным пространством. Топология локальной равномерной сходимости в пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ является метризуемой относительно метрики

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|u - v\|_n}{1 + \|u - v\|_n}.$$

Полученное метрическое пространство полно.

В работе используется уже устоявшееся в работах по аттракторам неинвариантных пространств траекторий обозначение $\|u - v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)}$ для метрики в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$. Это связано с использованием абстрактных понятий и утверждений из работ [15], [16], [19], в которых используется данное обозначение. При этом функционал $\|\cdot\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)}$ не является нормой, так как

$$\|\lambda v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} \neq |\lambda| \|v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)}$$

при $\lambda \neq \pm 1$.

Пусть Π_M ($M \geqslant 0$) — оператор сужения функций, заданных на $\mathbb{R}_+$, на отрезок $[0, M]$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.1. *Для того чтобы множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ было относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $M > 0$ множество $\Pi_M P$ было относительно компактно в $C([0, M], E_0)$.*

Обозначим через $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ пространство существенно ограниченных функций, определённых на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значение в пространстве E. Пространство $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ является банаховым со следующей нормой (см. [27]):

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;E)} = \operatorname{vrai} \max_{t\in\mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E.$$

Определение 2.1. *Пусть J — конечный или бесконечный интервал вещественной оси и $\overline{J}$ — его замыкание. Далее, пусть Y — банахово пространство. Функция $u : \overline{J} \to Y$ называется слабонепрерывной, если из $t_n \to t$, $t_n \in \overline{J}$ следует, что $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ слабо в Y. Множество слабонепрерывных функций $u : \overline{J} \to Y$ мы будем обозначать через $C_w(\overline{J}, Y)$.*

Также в работе используется следующая теорема (см., например, [28]).

Теорема 2.1. *Пусть E и E_0 — два банаховых пространства, таких что $E \subset E_0$, причем вложение непрерывно. Если функция v принадлежит $L_\infty(0, T; E)$ и непрерывна как функция со значениями в E_0, то v слабонепрерывна как функция со значениями в E, т.е. $v \in C_w([0, T], E)$.*

Следовательно, функция $v \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, слабонепрерывна как функция со значениями в E (и потому $v(t) \in E$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$), v ограничена как функция со значениями в E, и верно равенство

$$\|v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|v(t)\|_E.$$

Через $T(h)$ ($h \geqslant 0$) обозначены операторы сдвигов, каждый из которых функции f ставит в соответствие функцию $T(h)f$ такую, что $T(h)f(t) = f(t+h)$. Имеет место тождество $T(h_1)T(h_2) = T(h_1 + h_2)$.

Пусть $\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ — непустое семейство функций. Множество $\mathcal{H}^+$ называется пространством траекторий, элементы $\mathcal{H}^+$ — траекториями.

Определение 2.2. *Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется притягивающим множеством для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, выполняется условие*

$$\sup_{u\in B} \inf_{v\in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to \infty.$$

Определение 2.3. *Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется поглощающим множеством для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, существует $h \geqslant 0$, такое что при всех $t \geqslant h$ имеет место включение $T(t)B \subset P$.*

Каждое поглощающее множество является притягивающим.

Определение 2.4. *Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется траекторным полуаттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если*

(i) *множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;*
(ii) *имеет место включение $T(t)P \subset P$ для всех $t \geqslant 0$;*
(iii) *множество P является притягивающим.*

Определение 2.5. *Множество* $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ *называется траекторным аттрактором пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$, *если*

(i) *множество* P *компактно в* $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ *и ограничено в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;
(ii) *имеет место равенство* $T(t)P = P$ *для всех* $t \geqslant 0$;
(iii) *множество* P *является притягивающим.*

Определение 2.6. *Минимальным траекторным аттрактором пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$ *называется наименьший по включению траекторный аттрактор.*

Определение 2.7. *Множество* $\mathcal{A} \subset E$ *называется глобальным аттрактором (в* E_0*) пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$, *если оно удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *множество* $\mathcal{A}$ *компактно в* E_0 *и ограничено в* E;
(ii) *для всякого ограниченного в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ *множества* $B \subset \mathcal{H}^+$ *выполняется условие притягивания*

$$\sup_{u \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty;$$

(iii) *множество* $\mathcal{A}$ *является наименьшим по включению, удовлетворяющим условиям (i) и (ii).*

Если существует минимальный траекторный аттрактор или глобальный аттрактор, то он единственный.

Также в работе используется следующее утверждение [15].

Лемма 2.2. *Пусть* P *— относительно компактное в* $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ *и ограниченное в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ *поглощающее множество для пространства траекторий* $\mathcal{H}_+$. *Тогда его замыкание* $\overline{P}$ *в пространстве* $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ *является компактным в* $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ *и ограниченным в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ *поглощающим множеством для пространства траекторий* $\mathcal{H}_+$. *Если, кроме того, имеет место включение* $T(t)P \subset P$ *при всех* $t \geqslant 0$, *то* $\overline{P}$ *— полуаттрактор.*

Имеет место следующая теорема о существовании минимального траекторного и глобального аттракторов [15].

Теорема 2.2. *Пусть существует траекторный полуаттрактор* P *пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$. *Тогда существует минимальный траекторный аттрактор* $\mathcal{U}$ *и глобальный аттрактор* $\mathcal{A}$ *пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$, *а также справедливо соотношение* $\mathcal{A} = \mathcal{U}(t)$, $t \geqslant 0$.

3. Необходимые функциональные пространства

Для определения понятия слабого решения потребуются определения некоторых пространств. Как обычно $C_0^\infty(\Omega)^n$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω. Пусть

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\}.$$

Пространство V^0 — это пополнение $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)^n$, V^1 — пополнение $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)^n$, $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

В силу разложения Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)^n$ (см., например, [28], [29]):

$$L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega).$$

Здесь $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$.

Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ — проектор Лере. В пространстве $\mathcal{V}$ рассматривается оператор $A = -\pi\Delta$. Как хорошо известно (см. [30], [31]), оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0.

Пусть $0 < \zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \zeta_3 \leqslant \ldots \leqslant \zeta_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A, а E_∞ — множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j. Пространство V^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ определяется как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^\alpha |v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $v_k = (v, e_k)$ — коэффициенты Фурье функции v по системе собственных функций $\{e_k\}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в V^0.

При $\alpha = 0, 1, 2$ пространства V^α совпадают с введёнными ранее пространствами V^0, V^1 и V^2 соответственно. В [6] показано, что указанные нормы в пространствах V^α, $\alpha \in \mathbb{N}$ эквивалентны нормам

$$\|v\|_{V^\alpha} = \|A^{\alpha/2} v\|_{V^0}. \tag{3.1}$$

Всюду в дальнейшем пространства V^α рассматриваются с нормой (3.1).

Для определения слабого решения исходной и аппроксимационной задач на отрезке вводятся следующие пространства:

$$W_1[0,T] = \left\{u : u \in L_\infty(0,T;V^2), u' \in L_\infty(0,T;V^1)\right\};$$
$$W_2[0,T] = \left\{u : u \in C([0,T],V^5), u' \in L_\infty(0,T;V^5)\right\},$$

с соответствующими нормами

$$\|u\|_{W_1[0,T]} = \|u\|_{L_\infty(0,T;V^2)} + \|u'\|_{L_\infty(0,T;V^1)};$$
$$\|u\|_{W_2[0,T]} = \|u\|_{C([0,T],V^5)} + \|u'\|_{L_\infty(0,T;V^5)}.$$

Для определения слабого решения на полуоси $\mathbb{R}_+$ рассматривается пространство $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v, определенных почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^2, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_1[0,T]$. Также рассматривается пространство $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v класса $C(\mathbb{R}_+, V^5)$, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_2[0,T]$.

В работе также используется теорема Обена — Дубинского — Симона [32].

Теорема 3.1. *Пусть $X \subset E \subset Y$ — банаховы пространства, причем вложение $X \subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будем предполагать, что для любого $f \in F$ его обобщенная производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Далее, пусть*

1) *множество F ограничено в $L_p(0,T;X)$,*
2) *множество $\{f' : f \in F\}$ ограничено в $L_r(0,T;Y)$.*

Тогда при $p < \infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0,T;E)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ множество F относительно компактно в $C([0,T],E)$.

Также мы будем использовать следующую теорему Лере — Шаудера.

Теорема 3.2. *Пусть G — открытое ограниченное подмножество банахового пространства X, $0 \in G$ и пусть $\Xi(\tau,\cdot) : \overline{G} \to X$, $\tau \in [0,1]$ — однопараметрическое семейство отображений, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *Отображение $\Xi : [0,1] \times \overline{G} \to X$ компактно по совокупности переменных.*
2) *$\Xi(\tau,x) \neq x$ для всех $\tau \in [0,1]$ и $x \in \partial G$, т.е. отображение $\Xi(\tau,\cdot)$ не имеет неподвижных точек на границе G.*
3) *$\Xi(0,\cdot) \equiv 0$.*

Тогда отображение $\Xi(1,\cdot)$ имеет неподвижную точку $x_1 \in G$, т.е. $x_1 = \Xi(1,x_1)$.

Далее приводятся необходимые утверждения о разрешимости задачи

$$z(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad 0\leqslant t,\tau\leqslant T,\quad x\in\overline{\Omega}.\tag{3.2}$$

Будем предполагать, что $v\in L_1(0,T;W_1^1(\Omega)^n)$, $\operatorname{div}v=0$ и $v\cdot n=0$ на $\partial\Omega$, где n — вектор нормали.

Определение 3.1. *Функция $z(\tau;t,x):[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}\to\overline{\Omega}$ называется регулярным Лагранжевым потоком, соответствующим v, если выполнены следующие условия:*

1) *для почти всех x и любых $t\in[0,T]$ функция $\gamma(\tau)=z(\tau;t,x)$ — абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (3.2);*
2) *для любых $\tau,t\in[0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B\subset\overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо, что $m(z(\tau;t,B))=m(B)$;*
3) *для любых $t_1,t_2,t_3\in[0,T]$ и почти всех $x\in\overline{\Omega}$ справедливо равенство:*
$$z(t_3;t_1,x)=z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x)).\tag{3.3}$$

Здесь $z(\tau;t,B)$ — образ множества B, то есть

$$z(\tau;t,B)=\bigcup_{x\in B}z(\tau;t,x).$$

Подробнее о регулярных Лагранжевых потоках см., например, [7]. Здесь рассматривается частный случай ограниченной области Ω и соленоидальной функции v. При этом в случае гладкого векторного поля v регулярный Лагранжев поток совпадает с классическим решением задачи Коши (3.2).

Имеют место следующие теоремы [7].

Теорема 3.3. *Пусть*

$$v\in L_1(0,T;W_p^1(\Omega)^n),\quad 1\leqslant p\leqslant+\infty,\quad \operatorname{div}v=0,\quad v|_{\partial\Omega}=0.$$

Тогда существует единственный регулярный Лагранжевый поток z, соответствующий v. Более того,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}z(\tau;t,x)=v(\tau,z(\tau;t,x)),\quad t,\tau\in\Omega,\quad \textit{для почти всех}\quad x\in\Omega,$$
$$z(\tau;t,\overline{\Omega})=\overline{\Omega}\quad (\textit{с точностью до меры нуль}).$$

Теорема 3.4. *Пусть*

$$v,v^m\in L_1(0,T;W_1^p(\Omega)^n),\qquad m=1,2,\ldots$$

для некоторого $p>1$. Пусть

$$\operatorname{div}\,v^m=0,\quad v^m|_{\partial\Omega}=0,\quad \operatorname{div}\,v=0,\quad v|_{\partial\Omega}=0$$

и пусть выполняются неравенства:

$$\|\nabla v\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega)^{n^2})}+\|v\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega)^n)}\leqslant M;$$
$$\|\nabla v^m\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega)^{n^2})}+\|v^m\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega)^n)}\leqslant M.$$

Пусть v^m сходится к v в $L_1(Q_T)^n$ при $m\to\infty$. Пусть z^m и z это регулярные лагранжевы потоки, соответствующие v^m и v. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега $[0,T]\times\Omega$ по переменным (τ,x) равномерно по $t\in[0,T]$.

Константы на протяжении работы обозначаются буквой C с индексом внизу. Константы, имеющие существенное значение для доказательства, выписаны в явном виде и иногда обозначены буквой K с индексом внизу. Символ : обозначает покомпонентное произведение матриц.

4. Определение слабого решения

Пусть $a \in V^2, f \in V^0$.

Определение 4.1. *Слабым решением начально–краевой задачи* (1.1)–(1.4) *на отрезке* $[0,T]$ *назовем функцию* $v \in W_1[0,T]$, *удовлетворяющую для любой пробной функции* $\varphi \in V^1$ *при почти всех* $t \in (0,T)$ *тождеству*

$$\int_\Omega v'\varphi dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx + \nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx + \varkappa\int_\Omega \nabla v' : \nabla\varphi dx$$
$$+ \varkappa\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega v_i\Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx - \sum_{i=1}^{L}\int_0^t \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)}\int_\Omega \Delta v(s, z(s;t,x))\varphi dx ds = \int_\Omega f\varphi dx \tag{4.1}$$

и начальному условию

$$v(0) = a. \tag{4.2}$$

Здесь z это регулярный Лагранжев поток, порождённый v, который существует в силу теоремы 3.3.

Определение 4.2. *Слабым решением задачи* (1.1)–(1.4) *на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *называется функция* $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, *такая что при каждом* $T > 0$ *ограничение* v *на отрезок* $[0,T]$ *является слабым решением задачи* (1.1)–(1.4) *на отрезке* $[0,T]$.

5. Аппроксимационная задача

В силу определения норм в пространствах V^0, V^1 и V^2 имеют место неравенства

$$\|u\|_{V^0}^2 \leqslant K_1\|u\|_{V^1}^2, \quad \|u\|_{V^1}^2 \leqslant K_1\|u\|_{V^2}^2, \quad u \in V^2. \tag{5.1}$$

Здесь $K_1 = 1/\zeta_1$, где ζ_1 — наименьшее собственное значение оператора A.

Пусть K_2 — константа, определяемая следующим равенством

$$K_2 = \frac{\nu\varkappa}{K_1^2 + 2\varkappa K_1 + \varkappa}. \tag{5.2}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и γ константа, для которой имеет место неравенство:

$$0 < \gamma \leqslant \min\left(K_2, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_L\right). \tag{5.3}$$

Точный выбор γ описан в доказательстве теоремы 6.1. Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varepsilon e^{-\gamma t}\frac{\partial \Delta^3 v}{\partial t} - \varkappa\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial \Delta v}{\partial x_i}$$
$$- \sum_{i=1}^{L}\int_0^t \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)}\Delta v(s, z(s;t,x))\,ds + \nabla p = f; \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \tag{5.4}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))ds, \quad 0 \leqslant t,\tau \leqslant T, \quad x \in \Omega; \tag{5.5}$$

$$v(0,x) = b(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = \Delta v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = \Delta^2 v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{5.6}$$

Пусть $b \in V^5, f \in V^0$.

Определение 5.1. *Функция $v \in W_2[0,T]$ называется решением аппроксимационной задачи (5.4)–(5.6) если она удовлетворяет для любой функции $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ тождеству*

$$\int\limits_\Omega v'\varphi dx - \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\, dx + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla v' : \nabla \varphi dx$$
$$+ \varepsilon e^{-\gamma t} \int\limits_\Omega \nabla(\Delta^2 v') : \nabla \varphi dx + \varkappa \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \tag{5.7}$$
$$- \sum_{i=1}^L \int\limits_0^t \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \int\limits_\Omega \Delta v(s, z(s;t,x))\varphi dx ds = \int\limits_\Omega f\varphi dx$$

и начальному условию

$$v(0) = b. \tag{5.8}$$

Здесь z — это решение задачи (5.5). В силу непрерывного вложения $V^5 \subset C^1(\overline{\Omega})^n$, которое имеет место для $n = 2, 3$, задача (5.5) имеет единственное классическое решение.

Определение 5.2. *Решением аппроксимационной задачи (5.4)–(5.6) на полуоси $\mathbb{R}_+$ называется функция $v \in W_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$, такая что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является решением аппроксимационной задачи (5.4)–(5.6) на этом отрезке.*

Для того чтобы перейти к операторной трактовке задачи вводятся операторы при помощи следующих равенств:

$$A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Au, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla u : \nabla \varphi dx, \quad \forall u, \varphi \in V^1;$$

$$J : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Ju, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega u\varphi dx, \quad \forall u, \varphi \in V^1;$$

$$A^3 : V^5 \to V^{-1}, \quad \langle A^3 u, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta^2 u) : \nabla \varphi dx, \quad \forall u \in V^5, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}, \quad \langle B_1(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad \forall u \in L_4(\Omega)^n, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B_2 : V^2 \to V^{-1}, \quad \langle B_2(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad \forall u \in V^2, \quad \varphi \in V^1;$$

$$C : L_2(0,T;V^2) \to L_2(0,T;V^{-1}), \quad \forall u \in L_2(0,T;V^2), \quad \varphi \in V^1;$$

$$\langle C(u)(t), \varphi\rangle = \sum_{i=1}^L \int\limits_0^t \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \int\limits_\Omega \Delta u(s, z(s;t,x))\varphi dx ds.$$

На основе введённых операторов можно дать эквивалентное определение решения аппроксимационной задачи.

Определение 5.3. *Решением задачи (5.4)–(5.6) на отрезке $[0,T]$ называется функция $v \in W_2[0,T]$, удовлетворяющая операторному уравнению*

$$(J + \varepsilon e^{-\gamma t} A^3 + \varkappa A)v'(t) + \nu A v(t) - B_1(v)(t) + \varkappa B_2(v)(t) - C(v)(t) = f \tag{5.9}$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и начальному условию (5.8).

Имеет место следующая лемма о свойствах операторов [24]:

Лемма 5.1. 1. *Для функции* $g \in L_2(0,T;V^1)$ *значение* $Ag \in L_2(0,T;V^{-1})$, *оператор* $A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывен и при почти всех* $t \in (0,T)$ *имеет место оценка*

$$\|Ag(t)\|_{V^{-1}} \leqslant \|g(t)\|_{V^1}. \tag{5.10}$$

2. *Оператор* $(J + \varkappa A) : V^1 \to V^{-1}$ *непрерывен и обратим. Для любой функции* $g \in L_2(0,T;V^1)$ *значение* $(J+\varkappa A)g \in L_2(0,T;V^{-1})$, *оператор* $(J+\varkappa A) : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывен и при почти всех* $t \in (0,T)$ *имеет место следующая оценка*

$$\varkappa\|g(t)\|_{V^1} \leqslant \|(J+\varkappa A)g(t)\|_{V^{-1}}. \tag{5.11}$$

3. *Для* $g \in L_2(0,T;V^5)$ *значение* $(J + \varepsilon e^{-\gamma t}A^3 + \varkappa A)g \in L_2(0,T;V^{-1})$, *оператор* $(J + \varepsilon e^{-\gamma t}A^3 + \varkappa A) : L_2(0,T;V^5) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывен, обратим и при почти всех* $t \in (0,T)$ *имеет место оценка*

$$\varepsilon e^{-\gamma t}\|g(t)\|_{V^5} \leqslant \|(J + \varepsilon e^{-\gamma t}A^3 + \varkappa A)g(t)\|_{V^{-1}}. \tag{5.12}$$

4. *Для функции* $g \in L_2(0,T;V^1)$ *функция* $B_1(g) \in L_2(0,T;V^{-1})$, *отображение* $B_1 : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывно и при почти всех* $t \in (0,T)$ *для него имеет место оценка*

$$\|B_1(g)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_1\|g(t)\|^2_{V^1}. \tag{5.13}$$

Здесь константа C_1 *зависит от области* Ω *и не зависит от функции* g.

5. *Для функции* $g \in L_2(0,T;V^2)$ *функция* $B_2(g) \in L_2(0,T;V^{-1})$, *отображение* $B_2 : L_2(0,T;V^2) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывно и при почти всех* $t \in (0,T)$ *для него имеет место оценка*

$$\|B_2(g)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_2\|g(t)\|^2_{V^2}. \tag{5.14}$$

Здесь константа C_2 *зависит от области* Ω *и не зависит от функции* g.

Лемма 5.2. *Отображение*

$$C : L_2(0,T;V^2) \to L_2(0,T;V^{-1})$$

непрерывно и при п.в. $t \in (0,T)$ *для него имеет место неравенство*

$$\|C(g)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_3 \left(\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|g(s)\|^2_{V^2}dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.15}$$

Здесь константа C_3 *зависит от* K_1, γ, α_i, β_i, $i = \overline{1,L}$.

Доказательство. В силу определения оператора C для любой функции $g \in L_2(0,T;V^2)$ при почти всех $t \in (0,T)$ для любой $\varphi \in V^1$ в силу неравенства Гёльдера имеем

$$|\langle C(g)(t),\varphi\rangle| = \left|\int_0^t \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \int_\Omega \Delta g(s,z(s;t,x))\varphi dx ds\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^L |\beta_i| \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \left(\int_\Omega |\Delta g(s,z(s;t,x))|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

В первом из интегралов правой части сделаем замену переменных $y = z(s;t,x)$ (обратная замена $x = z(t;s,y)$). Так как $\mathrm{div} g = 0$, выполнено равенство $\det\frac{\partial z}{\partial x} = 1$. Поэтому

$$\int_\Omega |\Delta g(s,z(s;t,x))|^2 dx = \int_\Omega |\Delta g(s,y)|^2 dy = \|\Delta g(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}.$$

Таким образом в силу неравенства Пуанкаре (5.1) получаем следующее неравенство

$$|\langle C(g)(t),\varphi\rangle| \leqslant \sqrt{K_1}\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\|g(s)\|_{V^2}ds\|\varphi\|_{V^1}.$$

Откуда

$$\|C(g)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant \sqrt{K_1}\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\|g(s)\|_{V^2}ds. \tag{5.16}$$

Для каждого $i=\overline{1,L}$ в силу неравенства Гёльдера и (5.3) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\|g(s)\|_{V^2}ds &= \int\limits_0^t e^{-(\alpha_i-\frac{\gamma}{2})(t-s)}e^{-(t-s)\frac{\gamma}{2}}\|g(s)\|_{V^2}ds\\ &\leqslant \left(\int\limits_0^t e^{-2(\alpha_i-\frac{\gamma}{2})(t-s)}ds\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|g(s)\|^2_{V^2}ds\right)^{\frac12}\\ &= \left(\frac{1-e^{-2(\alpha_i-\frac{\gamma}{2})t}}{2\alpha_i-\gamma}\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|g(s)\|^2_{V^2}ds\right)^{\frac12}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\alpha_i-\gamma}}\left(\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|g(s)\|^2_{V^2}ds\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (5.16) и следует требуемое неравенство (5.15). □

6. Оценки

Теорема 6.1. *Пусть v — решение аппроксимационного уравнения (5.9), и пусть коэффициенты задачи (5.4)–(5.6) удовлетворяют условию:*

$$\varkappa K_2\alpha_i > 2L|\beta_i|, \quad i=\overline{1,L}, \tag{6.1}$$

тогда при всех $t\in[0,T]$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}\varkappa^2\|v(t)\|^2_{V^2} + K_2\lambda_1\varkappa^2\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|v(s)\|^2_{V^2}ds&\\ \leqslant C_5 + e^{-\gamma t}\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right).&\end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь λ_1, λ_2 — некоторые константы такие, что

$$\lambda_1>0,\quad \lambda_2>0,\quad 0<\lambda_1+\lambda_2<1,$$

константа K_2 определяется равенством (5.2),

$$C_4 = K_1^2+2\varkappa K_1+\varkappa^2,\quad C_5=\frac{\|f\|^2_{V^0}}{\gamma K_2(1-\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Доказательство. Пусть $v\in W_2[0,T]$ — решение уравнения (5.9). Тогда при всех $s\in[0,T]$ функция $v(s)\in V^5$. В силу непрерывности вложения $V^5\subset V^1$, непрерывности оператора

$A: V^5 \to V^3$, которая имеет место в силу построения шкалы пространств V^α, и непрерывности вложения $V^3 \subset V^1$ получаем, что $(v + \varkappa Av)(s) \in V^1$ при всех $s \in [0,T]$. Применим (5.9) к $(v+\varkappa Av)(s)$, $s \in [0,T]$. Получим

$$\langle (J + \varepsilon e^{-\gamma s} A^3 + \varkappa A)v' + \nu Av - B_1(v) + \varkappa B_2(v) - C(v), v + \varkappa Av\rangle = \langle f, v + \varkappa Av\rangle.$$

В силу определений операторов B_1 и B_2, а также в силу формулы Грина имеем

$$\begin{aligned}\langle -B_1(v) + \varkappa B_2(v), v+\varkappa Av\rangle &= -\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial (v - \varkappa\Delta v)_j}{\partial x_i} dx + \varkappa \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial (v-\varkappa\Delta v)_j}{\partial x_i} dx \\ &= -\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i (v - \varkappa \Delta v)_j \frac{\partial (v-\varkappa\Delta v)_j}{\partial x_i} dx \\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i \frac{\partial \left((v-\varkappa\Delta v)_j (v-\varkappa\Delta v)_j\right)}{\partial x_i} dx \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v - \varkappa \Delta v|^2 \mathrm{div} v dx = 0.\end{aligned}$$

В силу определения оператора $(J + \varepsilon e^{-\gamma s}A^3 + \varkappa A)$ и формулы Грина получаем

$$\begin{aligned}\langle \left(J + \varepsilon e^{-\gamma s} A^3 + \varkappa A\right) v', v + \varkappa Av\rangle = &\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^0} + \varkappa \frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^1} + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^2} \\ &+ e^{-\gamma s}\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^3} + e^{-\gamma s}\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^4}.\end{aligned}$$

Для следующего слагаемого имеем

$$\langle \nu Av, v + \varkappa Av\rangle = \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx + \nu\varkappa \int\limits_\Omega \Delta v \Delta v dx = \nu(\|v(s)\|^2_{V^1} ds + \varkappa \|v(s)\|^2_{V^2}).$$

Последнее слагаемое в левой части в силу неравенства Гёльдера оценим сверху

$$|\langle C(v), v + \varkappa Av\rangle| = \left| \int\limits_0^s \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-\alpha_i(s-\xi)} \int\limits_\Omega \Delta v(\xi, z(\xi; s, x))(v + \varkappa Av)(s) dx d\xi \right|$$

$$\leqslant \int\limits_0^s \sum_{i=1}^L |\beta_i| e^{-\alpha_i(s-\xi)} \left(\int\limits_\Omega |\Delta v(\xi, z(\xi; s,x))|^2 dx\right)^{\frac12} \left(\int\limits_\Omega |(v + \varkappa Av)(s)|^2 dx\right)^{\frac12} d\xi.$$

Сделаем замену $x = z(s; \xi, y)$ в первом сомножителе. Тогда аналогично доказательству леммы 5.2 имеем

$$\begin{aligned}|\langle C(v), v + \varkappa Av\rangle| &\leqslant \int\limits_0^s \sum_{i=1}^L |\beta_i| e^{-\alpha_i(s-\xi)} \left(\int\limits_\Omega |\Delta v(\xi, y))|^2 dy\right)^{\frac12} \|(v+\varkappa Av)(s)\|_{V^0} d\xi \\ &= \sum_{i=1}^L |\beta_i| \int\limits_0^s e^{-\alpha_i(s-\xi)} \|v(\xi)\|_{V^2} d\xi \|(v + \varkappa Av)(s)\|_{V^0}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^0} + 2\varkappa\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^1} + \varkappa^2 \frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^2} + e^{-\gamma s}\varepsilon \frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^3} \\ + e^{-\gamma s}\varepsilon\varkappa \frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^4} + 2\nu\left(\|v(s)\|^2_{V^1} + \varkappa\|v(s)\|^2_{V^2}\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int\limits_0^s e^{-\alpha_i(s-\xi)}\|v(\xi)\|_{V^2}d\xi\|(v+\varkappa Av)(s)\|_{V^0}+2\langle f,(v+\varkappa Av)(s)\rangle.$$

Рассмотрим на пространстве V^2 вспомогательную норму

$$\|u\|^2=\|u\|^2_{V^0}+2\varkappa\|u\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|u\|^2_{V^2},$$

эквивалентную норме $\|\cdot\|_{V^2}$: в самом деле, из (5.1) следуют оценки

$$\varkappa^2\|u\|^2_{V^2}\leqslant\|u\|^2\leqslant(K_1^2+2\varkappa K_1+\varkappa^2)\|u\|^2_{V^2}. \tag{6.3}$$

Тогда в силу (5.3) имеем

$$\begin{aligned}\nu(\|u(s)\|^2_{V^1}+\varkappa\|u(s)\|^2_{V^2})&\geqslant\nu\varkappa\|u(s)\|^2_{V^2}\\&\geqslant\frac{\nu\varkappa}{(K_1^2+2\varkappa K_1+\varkappa^2)}\|u(s)\|^2=K_2\|u(s)\|^2\geqslant\gamma\|u(s)\|^2.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2+e^{-\gamma s}\varepsilon\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^3}+e^{-\gamma s}\varepsilon\varkappa\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^4}+2K_2\|v(s)\|^2\\&\leqslant\frac{2}{\varkappa}\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int\limits_0^s e^{-\alpha_i(s-\xi)}\|v(\xi)\|d\xi\|v(s)\|+2\langle f,(v+\varkappa Av)(s)\rangle.\end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части

$$\langle f,(v+\varkappa Av)(s)\rangle\leqslant\|f\|_{V^0}\|(v+\varkappa Av)(s)\|_{V^0}\leqslant\frac{\|f\|^2_{V^0}}{2K_2(1-\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{K_2(1-\lambda_1-\lambda_2)}{2}\|v(s)\|^2,$$

где λ_1,λ_2 — некоторые константы: $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $0<\lambda_1+\lambda_2<1$.

Таким образом

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2+e^{-\gamma s}\varepsilon\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^3}+e^{-\gamma s}\varepsilon\varkappa\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^4}+K_2\|v(s)\|^2+K_2\lambda_1\|v(s)\|^2\\&+K_2\lambda_2\|v(s)\|^2-\frac{2}{\varkappa}\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int\limits_0^s e^{-\alpha_i(s-\xi)}\|v(\xi)\|d\xi\|v(s)\|\leqslant\frac{\|f\|^2_{V^0}}{K_2(1-\lambda_1-\lambda_2)}.\end{aligned}$$

Оценивая левую часть снизу с помощью (6.4) и обозначая

$$G(s)=K_2\lambda_2\|v(s)\|^2-\frac{2}{\varkappa}\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int\limits_0^s e^{-\alpha_i(s-\xi)}\|v(\xi)\|d\xi\|v(s)\|;$$

$$F=\frac{\|f\|^2_{V^0}}{K_2(1-\lambda_1-\lambda_2)},$$

получаем

$$\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2+\gamma\|v(s)\|^2+e^{-\gamma s}\varepsilon\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^3}+e^{-\gamma s}\varepsilon\varkappa\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^4}+K_2\lambda_1\|v(s)\|^2+G(s)\leqslant F.$$

В первом и втором слагаемом левой части неравенства выполним подстановку $v(s)=e^{-\frac{\gamma s}{2}}\bar v(s)$. Получаем

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\|e^{-\frac{\gamma s}{2}}\bar v(s)\|^2+\gamma e^{-\gamma s}\|\bar v(s)\|^2+e^{-\gamma s}\varepsilon\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^3}\\&+e^{-\gamma s}\varepsilon\varkappa\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^4}+K_2\lambda_1\|v(s)\|^2+G(s)\leqslant F.\end{aligned}$$

Откуда

$$-\gamma e^{-\gamma s}\|\bar v(s)\|^2 + e^{-\gamma s}\frac{d}{ds}\|\bar v(s)\|^2 + \gamma e^{-\gamma s}\|\bar v(s)\|^2 + e^{-\gamma s}\varepsilon\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^3}$$
$$+ e^{-\gamma s}\varepsilon\varkappa\frac{d}{dt}\|v(s)\|^2_{V^4} + K_2\lambda_1\|v(s)\|^2 + G(s) \leqslant F.$$

Умножим последнее неравенство на $e^{\gamma s}$

$$\frac{d}{ds}\|\bar v(s)\|^2 + \varepsilon\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2_{V^4} + e^{\gamma s}K_2\lambda_1\|v(s)\|^2 + e^{\gamma s}G(s) \leqslant e^{\gamma s}F.$$

Проинтегрируем это неравенство по s от 0 до t, $t \in [0, T]$ и оценим правую часть сверху

$$\|\bar v(t)\|^2 + \varepsilon\|v(t)\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|v(t)\|^2_{V^4} + K_2\lambda_1\int_0^t e^{\gamma\tau}\|v(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t e^{\gamma\tau}G(\tau)d\tau$$
$$\leqslant \int_0^t e^{\gamma\tau}F d\tau + \|\bar v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}$$
$$= \frac{F}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1) + \|\bar v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}$$
$$\leqslant e^{\gamma t}\frac{F}{\gamma} + \|\bar v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}.$$

Умножая на $e^{-\gamma t}$, имеем

$$e^{-\gamma t}\|\bar v(t)\|^2 + e^{-\gamma t}\varepsilon\|v(t)\|^2_{V^3} + e^{-\gamma t}\varepsilon\varkappa\|v(t)\|^2_{V^4} + K_2\lambda_1\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\|v(\tau)\|^2 d\tau$$
$$+ \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}G(\tau)d\tau \leqslant \frac{F}{\gamma} + e^{-\gamma t}\left(\|\bar v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right). \tag{6.5}$$

Установим неотрицательность последнего слагаемого в левой части. Вспоминая ранее использованные обозначения, имеем

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}G(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\left(K_2\lambda_2\|v(\tau)\|^2 - \frac{2}{\varkappa}\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^\tau e^{-\alpha_i(\tau-s)}\|v(s)\|ds\|v(\tau)\|\right)d\tau.$$

Введём вспомогательные функции

$$h(\tau) = \|v(\tau)\|; \quad g_i(\tau) = \int_0^\tau e^{-\alpha_i(\tau-s)}\|v(s)\|ds = \int_0^\tau e^{-\alpha_i(\tau-s)}h(s)ds, \quad i = \overline{1, L}.$$

Функция h непрерывна на отрезке $[0, T]$, а функции g_i, $i = \overline{1, L}$, непрерывно дифференцируемы на этом отрезке. Непосредственное вычисление даёт, что

$$g_i'(\tau) = h(\tau) - \alpha_i\int_0^\tau e^{-\alpha_i(\tau-s)}h(s)ds = h(\tau) - \alpha_i g_i(\tau), \quad i = \overline{1, L}.$$

Следовательно,

$$g_i'(\tau) + \alpha_i g_i(\tau) = h(\tau); \quad g_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, L}.$$

Тогда имеем, что

$$G(\tau) = K_2\lambda_2 h^2(\tau) - \frac{2}{\varkappa} h(\tau) \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| g_i(\tau)$$
$$= \sum_{i=1}^{L} \left(\frac{K_2\lambda_2}{L} \left(g_i'(\tau) + \alpha_i g_i(\tau)\right)^2 - \frac{2|\beta_i|}{\varkappa} \left(g_i'(\tau) + \alpha_i g_i(\tau)\right) g_i(\tau) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{L} \left(\frac{K_2\lambda_2}{L} (g_i'(\tau))^2 + \left(\frac{2\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{2|\beta_i|}{\varkappa} \right) g_i'(\tau) g_i(\tau) + \left(\frac{\alpha_i^2 K_2\lambda_2}{L} - \frac{2\alpha_i|\beta_i|}{\varkappa} \right) g_i^2(\tau) \right).$$

В силу формулы интегрирования по частям для любого $i = \overline{1, L}$ имеем, что

$$2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} g_i'(\tau) g_i(\tau) d\tau = e^{-\gamma t} \left(e^{\gamma\tau} g_i^2(\tau) \right) \Big|_0^t - \gamma e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma\tau} g_i^2(\tau) d\tau$$
$$= g_i^2(t) - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} g_i^2(\tau) d\tau.$$

Откуда получаем, что

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} G(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{L} \left(\frac{K_2\lambda_2}{L} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (g_i'(\tau))^2 d\tau + \left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{|\beta_i|}{\varkappa} \right) g_i^2(\tau) \right.$$
$$\left. + \left(\alpha_i \left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{2|\beta_i|}{\varkappa} \right) - \gamma \left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{|\beta_i|}{\varkappa} \right) \right) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} g_i^2(\tau) d\tau \right).$$

Покажем, что при каждом $i = \overline{1, L}$ при выполнении условий и подходящем выборе положительного числа μ_i выражение

$$\frac{K_2\lambda_2}{L} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (g_i'(\tau))^2 d\tau + \left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{|\beta_i|}{\varkappa} \right) g_i^2(\tau)$$
$$+ \left(\alpha_i \left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{2|\beta_i|}{\varkappa} \right) - \mu_i \left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{|\beta_i|}{\varkappa} \right) \right) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} g_i^2(\tau) d\tau \Big)$$

неотрицательно. Для первого слагаемого из правой части имеем:

$$\frac{K_2\lambda_2}{L} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (g_i'(\tau))^2 d\tau \geqslant 0.$$

В силу (6.1) имеем

$$\frac{K_2\alpha_i}{L} > \frac{2|\beta_i|}{\varkappa}, \qquad i = \overline{1, L},$$

поэтому можно выбрать λ_2, возможно достаточно близкое к 1, что

$$\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{2|\beta_i|}{\varkappa} > 0 \quad \text{при всех} \quad i = \overline{1, L}. \tag{6.6}$$

Поэтому

$$\left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L} - \frac{|\beta_i|}{\varkappa} \right) g_i^2(\tau) \geqslant 0.$$

Далее, поскольку
$$\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L}-\frac{2|\beta_i|}{\varkappa}>0, \qquad \frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L}-\frac{|\beta_i|}{\varkappa}>0,$$
всегда можно выбрать μ_i такое что $0<\mu_i\leqslant\gamma$, что
$$\left(\alpha_i\left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L}-\frac{2|\beta_i|}{\varkappa}\right)-\mu_i\left(\frac{\alpha_i K_2\lambda_2}{L}-\frac{|\beta_i|}{\varkappa}\right)\right)g_i^2(\tau)\geqslant 0.$$
Откуда получаем, что
$$\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}G(\tau)d\tau\geqslant 0.$$
Таким образом, пользуясь неотрицательностью слагаемых, из оценки (6.5), получаем
$$e^{-\gamma t}\|\bar v(t)\|^2+K_2\lambda_1\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|v(s)\|^2ds\leqslant\frac{F}{\gamma}+e^{-\gamma t}\left(\|\bar v(0)\|^2+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right).$$
Делая обратную замену $\bar v(t)=e^{\gamma t/2}v(t)$, и вспоминая определение вспомогательной нормы, получаем необходимую оценку (6.2). □

Теорема 6.2. *Пусть v — решение уравнения (5.9) на отрезке $[0,T]$, $T>0$, и коэффициенты $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i=\overline{1,L}$, удовлетворяют условиям (6.1). Тогда имеют место оценки*
$$\varepsilon e^{-\gamma t}\|v'(t)\|_{V^5}\leqslant C_8+C_9e^{-\gamma t}\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right); \tag{6.7}$$
$$\|v'(t)\|_{V^1}\leqslant C_{10}+C_{11}e^{-\gamma t}\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right); \tag{6.8}$$
$$e^{-\gamma t}\|v(t)\|_{V^5}\leqslant e^{-\gamma t}\|v(0)\|_{V^5}+\frac{1}{\varepsilon\gamma}\left(C_8+C_9\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right). \tag{6.9}$$
Константы C_8, C_9, C_{10} и C_{11} зависят от f, γ, $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i=\overline{1,L}$, и не зависят от ε.

Доказательство. Поскольку v — решение уравнения (5.9), для почти всех $t\in(0,T)$ имеет место следующее равенство
$$\|(J+\varepsilon e^{-\gamma t}A^3+\varkappa A)v'(t)\|_{V^{-1}}=\|-\nu Av(t)+B_1(v)(t)-\varkappa B_2(v)(t)+C(v)(t)+f\|_{V^{-1}}.$$
Откуда в силу оценок (5.10), (5.13), (5.14), (5.15), непрерывности вложений $V^2\subset V^1$, $V^0\subset V^{-1}$, элементарного неравенства $a\leqslant 1+a^2$ и полученной ранее оценки (6.2) имеем
$$\begin{aligned}\|(J+\varepsilon e^{-\gamma t}A^3+\varkappa A)v'\|_{V^{-1}}\leqslant&\nu\|v(t)\|_{V^1}+C_1\|v(t)\|^2_{V^1}+\varkappa C_2\|v(t)\|^2_{V^2}\\&+C_3\left(\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|g(s)\|^2_{V^2}dt\right)^{\frac12}+\|f\|_{V^{-1}}\\\leqslant&C_6\|v(t)\|^2_{V^2}+C_3\left(\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|g(s)\|^2_{V^2}dt\right)^{\frac12}+C_7\|f\|_{V^0}\\\leqslant&C_8+C_9e^{-\gamma t}\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right).\end{aligned}$$
Откуда, в силу неравенства (5.12), получаем требуемую оценку (6.7).

Оценка (6.8) получается схожим образом. А именно, поскольку v — решение уравнения (5.9), для почти всех $t\in(0,T)$, используя оценку (5.12), имеем
$$\begin{aligned}\|(J+\varkappa A)v'(t)\|_{V^{-1}}=&\|-\varepsilon e^{-\gamma t}A^3v'(t)-\nu Av(t)+B_1(v)(t)-\varkappa B_2(v)(t)+C(v)(t)+f\|_{V^{-1}}\\\leqslant&\|-\varepsilon e^{-\gamma t}A^3v'(t)\|_{V^{-1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\|-\nu Av(t)+B_1(v)(t)-\varkappa B_2(v)(t)+C(v)(t)+f\|_{V^{-1}}\\
\leqslant& 2\|-\nu Av(t)+B_1(v)(t)-\varkappa B_2(v)(t)+C(v)(t)+f\|_{V^{-1}}\\
\leqslant& 2C_8+2C_9e^{-\gamma t}\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right).
\end{aligned}
$$

Откуда, аналогично предыдущему, в силу оценок (6.7) и (5.11) получаем требуемую оценку (6.8).

Для того, чтобы получить оценку (6.9) заметим, что при всех $t\in[0,T]$ имеет место равенство

$$
v(t)=v(0)+\int\limits_0^t v'(s)ds.
$$

Умножим обе части равенства на $e^{-\gamma t}$. Тогда в силу (6.7) имеем

$$
\begin{aligned}
\|e^{-\gamma t}v(t)\|_{V^5}=&\left\|e^{-\gamma t}\left(v(0)+\int\limits_0^t e^{-\gamma s}e^{\gamma s}v'(s)ds\right)\right\|_{V^5}\\
\leqslant& e^{-\gamma t}\|v(0)\|_{V^5}+\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}e^{-\gamma s}\|v'(s)\|_{V^5}ds\\
\leqslant& e^{-\gamma t}\|v(0)\|_{V^5}\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\left(C_8+C_9e^{-\gamma s}\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right)ds\\
\leqslant& e^{-\gamma t}\|v(0)\|_{V^5}+\frac{C_8}{\varepsilon\gamma}(1-e^{-\gamma t})\\
&+\frac{C_9}{\varepsilon\gamma}(1-e^{-\gamma t})\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\\
\leqslant& e^{-\gamma t}\|v(0)\|_{V^5}\\
&+\frac{1}{\varepsilon\gamma}\left(C_8+C_9\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Откуда и получаем требуемую оценку (6.9). □

В качестве непосредственного следствия полученных неравенств получаем следующую лемму.

Лемма 6.1. *Пусть v — решение уравнения (5.9) на отрезке $[0,T]$, $T>0$, и коэффициенты $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i=\overline{1,L}$, удовлетворяют условиям (6.1). Тогда при почти всех $t\in(0,T)$ имеют место оценки*

$$
\|v(t)\|_{V^2}+\|v'(t)\|_{V^1}\leqslant C_{12}+C_{13}e^{-\gamma t}\left(C_4\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^4}\right); \tag{6.10}
$$

$$
e^{-\gamma t}(\|v(t)\|_{V^5}+\|v'(t)\|_{V^5})\leqslant C_{14}, \tag{6.11}
$$

где константа C_{14} зависит от ε, а константы C_{12} и C_{13} зависят от f, γ, $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i=\overline{1,L}$, и не зависят от ε.

7. Теоремы существования решений аппроксимационной задачи

Имеют место следующие теоремы о существовании решений аппроксимационной и исходной задачи на отрезке.

Теорема 7.1. *Пусть коэффициенты* $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i = \overline{1, L}$, *удовлетворяют условиям* (6.1). *Тогда на любом отрезке* $[0, T]$ *существует решение уравнения* (5.9), *удовлетворяющее начальному условию* (5.8), *и это решение удовлетворяет оценкам* (6.10), (6.11).

Доказательство. Доказательство этой теоремы проводится идейно аналогично доказательству теоремы 7 в [9], поэтому в связи с его большим объёмом мы приведём его схематично. Сначала для фиксированной функции u, принадлежащей пространству $C([0, T], V^3)$ и удовлетворяющей неравенству $\|u\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant M$ (здесь M — константа, точное значение которой указано ниже), доказывается существование единственного решения Z_u задачи Коши:

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s; t, x))ds.$$

Затем для Z_u и той же самой функции u доказывается существование функции $w \in W_2[0, T]$, удовлетворяющей для любой пробной функции $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0, T)$ интегральному тождеству

$$\int_\Omega w'\varphi dx - \xi \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i w_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \xi\nu \int_\Omega \nabla w : \nabla\varphi dx$$
$$+ \varkappa \int_\Omega \nabla w' : \nabla\varphi dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla(\Delta^2 w') : \nabla\varphi dx + \xi\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i \Delta w_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx$$
$$- \xi \int_0^t \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \int_\Omega \Delta w(s, Z_u(s; t, x))\varphi dx ds = \xi \int_\Omega f\varphi dx$$

и начальному условию

$$w(0) = \xi b, \quad \xi \in [0, 1].$$

Таким образом, получается семейство отображений Ψ, которое числу $\xi \in [0, 1]$ и функции $u \in C([0, T], V^3)$ ставит в соответствие функцию $w \in W_2[0, T]$. После чего непосредственно устанавливается непрерывность этого отображения $\Psi : [0, 1] \times \overline{B_M} \to W_2[0, T]$ по совокупности переменных. Здесь B_M — это шар радиуса M с центром в нуле в пространстве $C([0, T], V^3)$. После чего при помощи теоремы 3.1 доказывается компактность отображения $\Psi : [0, 1] \times \overline{B_M} \to C([0, T], V^3)$.

Из оценок (6.7) и (6.9) для неподвижных точек Ψ имеет место неравенство

$$\|v\|_{W_2[0,T]} = \|v\|_{C([0,T],V^5)} + \|v'\|_{L_\infty(0,T;V^5)} \leqslant M_1. \tag{7.1}$$

Далее, в силу непрерывности вложения $W_2[0, T] \subset C([0, T], V^3)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant M_2 \|v\|_{W_2[0,T]}.$$

Откуда непосредственно получаем, что неподвижные точки отображения Ψ удовлетворяют неравенству

$$\|v\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant M_1 M_2.$$

Полагая $M = M_1 M_2 + 1$, получаем, что у Ψ нет неподвижных точек на границе шара B_M с центром в нуле.

Поскольку $\Psi(0, \cdot) \equiv 0$ и $0 \in B_M$, выполнены все условия теоремы Лере — Шаудера (теорема 3.2). Следовательно, отображение $\Psi(1, \cdot)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку. Поэтому существует хотя бы одно решение аппроксимационной задачи (5.4)–(5.6). То есть существует решение $v \in W_2[0, T]$ операторного уравнения (5.9), удовлетворяющее начальному условию (5.8). При этом в силу (6.10) и (6.11) это решение удовлетворяет требуемым неравенствам. □

Отметим, что разрешимость аппроксимационной задачи на произвольном конечном отрезке возможно доказать без условий (6.1) на коэффициенты. Но в общем случае решение не обязано удовлетворять необходимому для использования теории аттракторов неравенству (6.10).

Далее потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 7.1. *Пусть последовательность $\{v_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^2)$, а последовательность $\{v'_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1) *Существует подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящаяся сильно к предельной функции v_* в пространстве $C([0,T];V^1)$, причем имеют место предельные соотношения*

$$Jv'_{m_k} \rightharpoonup Jv'_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-1}); \tag{7.2}$$

$$Av'_{m_k} \rightharpoonup Av'_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-1}); \tag{7.3}$$

$$Av_{m_k} \rightharpoonup Av_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-1}); \tag{7.4}$$

$$B_1(v_{m_k}) \to B_1(v_*) \text{ сильно в } L_\infty(0,T;V^{-1}); \tag{7.5}$$

$$B_2(v_{m_k}) \rightharpoonup B_2(v_*) \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-1}); \tag{7.6}$$

$$C(v_{m_k}) \rightharpoonup C(v_*) \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-1}). \tag{7.7}$$

2) *Если $\varepsilon_m \to 0$ — числовая последовательность, и последовательность $\{\varepsilon_m v'_m\}$ ограничена в пространстве $L_\infty(0,T,V^5)$, то без ограничения общности, $\varepsilon_{m_k} e^{-\gamma t} A^3 v'_{m_k} \rightharpoonup 0$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$.*
3) *Если последовательность $\{v_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^5)$, то без ограничения общности,*

$$(J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\gamma t} A^3)v'_{m_k} \rightharpoonup (J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\gamma t} A^3)v'_*$$

слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$.

Доказательство. 1) Вложение $V^2 \subset V^1$ компактно, поэтому выполнены условия теоремы 3.2 и вложение $W_1[0,T] \subset C([0,T],V^1)$ компактно. Поскольку $\{v_m\}$ ограничена в $W_1[0,T]$, она относительно компактна в $C([0,T],V^1)$ и существует подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящаяся сильно в $C([0,T],V^1)$ к некоторой функции v_*.

Перейдем от нерефлексивных пространств L_∞ к рефлексивным пространствам L_p, $1 < p < \infty$, чтобы воспользоваться слабой компактностью ограниченных множеств. Поскольку пространство L_∞ непрерывно вкладывается в L_p, последовательности $\{v_m\}$ и $\{v'_m\}$ ограничены в $L_2(0,T;V^2)$ и $L_2(0,T;V^1)$ соответственно. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что

$$v_{m_k} \rightharpoonup v_* \qquad \text{слабо в } L_2(0,T;V^2), \tag{7.8}$$

$$v'_{m_k} \rightharpoonup v'_* \qquad \text{слабо в } L_2(0,T;V^1). \tag{7.9}$$

Таким образом, из сходимости (7.9) непосредственно следует (7.2). В силу леммы 5.1 линейный оператор A непрерывен. Поэтому из (7.8) и (7.9), соответственно, следуют требуемые сходимости (7.4) и (7.3).

Так как $V^1 \subset L_4(\Omega)^n$, то $v_{m_k} \to v_*$ сильно в $C([0,T],L_4(\Omega)^n)$ и (7.5) следует из непрерывности оператора B_1.

По теореме 3.1 в силу компактности вложения $V^2 \subset C(\overline{\Omega})^n$ для $n = 2,3$ имеет место компактное вложение $W_1[0,T] \subset C([0,T],C(\overline{\Omega})^n)$. Откуда, без ограничения общности получаем сильную сходимость $v_{m_k} \to v_*$ в $C([0,T],C(\overline{\Omega})^n)$. Отсюда и из (7.8) следует, что $v_{m_k}\Delta v_{m_k} \rightharpoonup v_*\Delta v_*$ слабо в $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$. Поэтому (7.6) следует из определения оператора B_2.

Для доказательства слабой сходимости (7.7) покажем, что для каждого $i = \overline{1, L}$ в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega)^n)$ имеет место слабая сходимость

$$\int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x)) ds \rightharpoonup \int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_*(s, z_*(s; t, x)) ds. \tag{7.10}$$

Здесь z_{m_k} и z_* это регулярные Лагранжевы потоки, соответствующие v_{m_k} и v_* соответственно.

В силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned}
&\left\| \int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x)) ds \right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)} \\
&= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left| \int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x)) ds \right|^2 dx dt \\
&\leqslant \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^t |\Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x))| \, ds \right)^2 dx dt \\
&\leqslant \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left(\sqrt{t} \left(\int\limits_0^t |\Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x))|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx dt \\
&\leqslant T \int\limits_0^T \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x))|^2 \, dx ds dt.
\end{aligned}$$

Аналогично доказательству леммы 5.2, осуществляя в последнем интеграле замену переменного $x = z_{m_k}(t; s, y)$, получаем, что

$$\left\| \int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x)) ds \right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)} \leqslant T^2 \|v_{m_k}\|^2_{L_2(0,T;V^2)}.$$

Из ограниченности $\{v_{m_k}\}$ в пространстве $L_\infty(0, T; V^2)$ получаем ограниченность

$$\int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x)) ds$$

в $L_2(0, T; L_2(\Omega)^n)$.

Следовательно, без ограничения общности, существует $w \in L_2(0, T; L_2(\Omega)^n)$ такая, что

$$\int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s; t, x)) ds$$

сходится слабо к w в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega)^n)$ при $m_k \to \infty$. Но в смысле распределений эта последовательность сходится к

$$\int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_*(s, z_*(s; t, x)) ds.$$

На самом деле, для любой $\varphi \in \mathcal{V}$, $\chi \in C_0^\infty(0,T)$ сделав замену переменной $x = z_{m_k}(t;s,y)$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_{m_k}(s, z_{m_k}(s;t,x)) ds \varphi(x) dx \chi(t) dt$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_{m_k}(s,y) ds \varphi(z_{m_k}(t;s,y)) dy ds \chi(t) dt$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v_{m_k}(s,y) \int\limits_s^T e^{-\alpha_i(t-s)} \varphi(z_{m_k}(t;s,y)) \chi(t) dt dy ds$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v^m(s,y) H^m(s,y) dy ds,$$

где

$$H_{m_k}(s,y) = \int\limits_s^T e^{-\alpha_i(t-s)} \varphi(z_{m_k}(t;s,y)) \chi(t) dt.$$

По теореме 3.4 последовательность z_{m_k} сходится к z_* по мере Лебега $[0,T]\times\Omega$ равномерно по $t \in [0,T]$. В силу гладкости функция $\varphi(z_{m_k}(t;s,y))$ сходится к функции $\varphi(z_*(t;s,y))$ почти всюду на Q_T при $m_k \to \infty$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла равномерно ограниченная последовательность $H_{m_k}(s,y)$ сходится почти всюду на Q_T к ограниченной функции

$$H(s,y) = \int\limits_s^T e^{-\alpha_i(t-s)} \varphi(z_*(s;t,y)) \chi(t) dt.$$

Таким образом, получаем

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v_{m_k}(s,y) H_{m_k}(s,y) dy ds \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v_*(s,y) H(s,y) dy ds$$

при $m_k \to \infty$. Здесь первый сомножитель сходится слабо в $L_2(Q_T)^n$, а второй сомножитель сходится почти всюду на Q_T. В полученном интеграле меняем порядок интегрирования и делаем замену $y = z_*(s;t,x)$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v_*(s,y) H(s,y) dy ds = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v_*(s,y) \int\limits_s^T e^{-\alpha_i(t-s)} \varphi(z_*(t;s,y)) \chi(t) dt dy ds$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_*(s,y) ds \varphi(z_*(t;s,y)) ds dy \chi(t) dt$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^t e^{-\alpha_i(t-s)} \Delta v_*(z_*(s;t,x)) ds \varphi(t,x) dx \chi(t) dt.$$

В силу единственности предела,

$$w = \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\Delta v_*(z_*(s;t,x))ds$$

и имеет место слабая сходимость (7.10). Требуемая слабая сходимость (7.7) следует из (7.10) и определения оператора C.

2) Без ограничения общности, последовательность $\{\varepsilon_{m_k}e^{-\gamma t}v'_{m_k}\}$ сходится слабо к некоторой функции w в $L_2(0,T;V^5)$. Но в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-5} последовательность $\varepsilon_{m_k}e^{-\gamma t}A^3v'_{m_k}$ сходится к нулю.

На самом деле, для любых $\chi \in C_0^\infty(0,T)$, $\varphi \in V^5$, используя формулу Грина и слабую сходимость (7.9), мы получим

$$\lim_{m_k\to\infty}\left|\varepsilon_{m_k}\int_0^T\int_\Omega \nabla\left(\Delta^2 v'_{m_k}\right) : \nabla\varphi dx\chi(t)dt\right|$$

$$= \lim_{m_k\to\infty}\varepsilon_{m_k}\lim_{m_k\to\infty}\left|\int_0^T\int_\Omega \nabla v'_{m_k}(t) : \nabla\left(\Delta^2\varphi\right) dx\chi(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_0^T\int_\Omega \nabla v'_*(t) : \nabla\left(\Delta^2\varphi\right) dx\chi(t)dt\right|\lim_{m_k\to\infty}\varepsilon_{m_k} = 0.$$

В силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_{m_k}\int_\Omega \nabla\left(\Delta^2 v'_{m_k}\right) : \nabla\varphi dx \to 0$$

при $m_k \to +\infty$.

3) Без ограничения общности, $\{v'_{m_k}\}$ сходится к v'_* слабо в $L_2(0,T,V^5)$. Поэтому требуемая сходимость следует из непрерывности линейного оператора $J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\gamma t}A^3$. $\square$

Теорема 7.2. *Пусть коэффициенты $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i = \overline{1,L}$, удовлетворяют условиям (6.1). Тогда при любом $b \in V^5$ задача (5.9),(5.8) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее следующим неравенствам*

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leqslant C_{16} + C_{17}e^{-\gamma t}\left(C_4\|b\|^2_{V^2} + \varepsilon\|b\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|b\|^2_{V^4}\right); \tag{7.11}$$

$$\varepsilon e^{-\gamma t}\|v'(t)\|_{V^5} \leqslant C_8 + C_9e^{-\gamma t}\left(C_4\|b\|^2_{V^2} + \varepsilon\|b\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|b\|^2_{V^4}\right), \tag{7.12}$$

где константы C_{16} и C_{17} зависят от f, γ, $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i = \overline{1,L}$, и не зависят от ε.

Доказательство. Пусть v_m — решение задачи (5.9), (5.8) на отрезке $[0,m]$ ($m = 1,2,\ldots$), которое существует согласно теореме 7.1. Продолжим функции v_m на полуось $\mathbb{R}_+$ следующим образом

$$\hat{v}_m(t) = \begin{cases} v_m(t), & 0 \leqslant t \leqslant m, \\ v_m(m), & t \geqslant m. \end{cases}$$

Исходя из продолжения, функции $\hat{v}_m$ принадлежат пространству $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что последовательность $\{\hat{v}_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+,V^1)$. Согласно лемме 2.1 для этого достаточно установить, что для любого $T > 0$ последовательность ограничений $\{\Pi_T\hat{v}_m\}$ относительно компактна в пространстве $C([0,T],V^1)$.

Возьмем произвольное $T > 0$. Отбросив, возможно, несколько первых членов последовательности, можем считать, что функции $\{\Pi_T\hat{v}_m\}$ являются решениями задачи (5.9), (5.8) на отрезке $[0,T]$. Так как функции $\Pi_T\hat{v}_m$ имеют одно и то же значение при $t=0$, из леммы 6.1 следует, что они удовлетворяют при почти всех $t\in[0,T]$ следующей оценке

$$e^{-\gamma t}(\|\Pi_T\hat{v}_m(t)\|_{V^5}+\|\Pi_T\hat{v}'_m(t)\|_{V^5})\leqslant C_{14}.$$

Следовательно

$$\|\Pi_T\hat{v}_m(t)\|_{L_\infty(0,T;V^5)}+\|\Pi_T\hat{v}'_m(t)\|_{L_\infty(0,T;V^5)}\leqslant C_{15} \tag{7.13}$$

с постоянной C_{15}, которая зависит от T и $\frac{1}{\varepsilon}$ и не зависит от m.

Таким образом, последовательность $\{\Pi_T\hat{v}_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^5)$, а последовательность производных $\{\Pi_T\hat{v}'_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^5)$. В силу компактности вложения $V^5\subset V^1$ и теоремы 3.1 следует, что последовательность $\{\Pi_T\hat{v}_m\}$ относительно компактна в $C([0,T],V^1)$.

В силу произвольности выбора T последовательность $\{\hat{v}_m\}$ содержит подпоследовательность $\{\hat{v}_{m_k}\}$, сходящуюся в $C(\mathbb{R}_+,V^1)$ к некоторой функции v_*. Покажем, что эта предельная функция является искомым решением задачи (5.9),(5.8) на $\mathbb{R}_+$.

Убедимся, что функция v_* принадлежит пространству $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Из оценки (7.13) следует, что при каждом $T>0$ последовательности $\{\Pi_T\hat{v}_{m_k}\}$ и $\{\Pi_T\hat{v}'_{m_k}\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^5)$, поэтому без ограничения общности можно считать, что они сходятся $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^5)$ соответственно к v_* и некоторой функции $u\in L_\infty(0,T;V^5)$. Однако в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^5 производные $\{\Pi_T\hat{v}'_{m_k}\}$ сходятся к v'_*, поэтому $u=\Pi_Tv'_*$. Таким образом, функция Π_Tv_* принадлежит пространству $L_\infty(0,T;V^5)$ вместе со своей производной. Отсюда следует, что функция Π_Tv_* представима в виде интеграла с переменным верхним пределом и потому непрерывна как функция со значениями в V^5. Следовательно, Π_Tv_* принадлежит $W_2[0,T]$. Это верно для любого T, так что v_* принадлежит $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, что и требовалось.

Из сходимости в $C([0,T],V^1)$ следует поточечная сходимость. Так как все функции $\{\hat{v}_{m_k}\}$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию и последовательность $\{\Pi_T\hat{v}_{m_k}\}$ сходится поточечно, v_* тоже удовлетворяет начальному условию (5.8). Остаётся проверить, что эта функция является решением уравнения (5.9). Для этого нужно установить, что ограничение v_* на всякий отрезок $[0,T]$ $(T>0)$ является решением уравнения (5.9) на этом отрезке.

Из сходимости последовательности $\{\hat{v}_{m_k}\}$ к v_* в $C(\mathbb{R}_+,V^1)$ следует сходимость ограничений $\{\Pi_T\hat{v}_{m_k}\}$ к Π_Tv_* в $C([0,T],V^1)$. Начиная с некоторого номера, функции $\Pi_T\hat{v}_{m_k}$ являются решениями уравнения (5.9), то есть удовлетворяют равенству:

$$(J+\varepsilon e^{-\gamma t}A^3+\varkappa A)\Pi_T\hat{v}'_{m_k}+\nu A\Pi_T\hat{v}_{m_k}-B_1(\Pi_T\hat{v}_{m_k})+\varkappa B_2(\Pi_T\hat{v}_{m_k})-C(\Pi_T\hat{v}_{m_k})=f. \tag{7.14}$$

Из неравенства (7.13) следует, что последовательность $\{\Pi_T\hat{v}_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^5)$, а последовательность производных $\{\Pi_T\hat{v}'_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^5)$. Поэтому выполнены условия леммы 7.1 (первый и третий пункты). Согласно этой лемме, переходя в (7.14) к слабому пределу в $L_2(0,T;V^{-1})$, получаем, что предельная функция удовлетворяет следующему соотношению

$$(J+\varepsilon e^{-\gamma t}A^3+\varkappa A)\Pi_Tv'_*+\nu A\Pi_Tv_*-B_1(\Pi_Tv_*)+\varkappa B_2(\Pi_Tv_*)-C(\Pi_Tv_*)=f.$$

Это и означает, что Π_Tv_* является решением уравнения (5.9) на $[0,T]$. Откуда, в силу произвольности выбора T получаем, что v_* является решением уравнения (5.9) на полуоси.

Докажем оценку (7.11). В силу леммы 6.1 имеет место неравенство

$$\|v_{m_k}(t)\|_{V^2}+\|v'_{m_k}(t)\|_{V^1}\leqslant C_{12}+C_{13}e^{-\gamma t}\left(C_4\|b\|^2_{V^2}+\varepsilon\|b\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|b\|^2_{V^4}\right). \tag{7.15}$$

При каждом m_k это неравенство выполняется при всех $t\in\mathbb{R}_+\setminus Q_{m_k}$, где Q_{m_k} — некоторое множество меры нуль. Поэтому при всех $t\in\mathbb{R}_+\setminus Q$, где $Q=\cup_{m_k}Q_{m_k}$ — множество меры нуль, данное неравенство выполняется для каждого m_k.

Для любого t, принадлежащего множеству полной меры $\mathbb{R}_+\setminus Q$, в силу упомянутой выше сильной сходимости $v_{m_k}\to v_*$ в $C(\mathbb{R}_+,V^1)$ получаем, что $v_{m_k}(t)\to v_*(t)$ в V^1. В силу неравенства (7.15) последовательность $\{v_{m_k}\}$ ограничена в V^2, а $\{v'_{m_k}\}$ ограничена в V^1. Поэтому найдутся подпоследовательности $\tilde{v}_l(t)$ и $\tilde{v}'_l(t)$, которые слабо сходятся в V^2 к $v_*(t)$ и в V^1 к $v'_*(t)$ соответственно. Поэтому

$$\|v_*(t)\|_{V^2} \leqslant \varliminf_{l\to\infty} \|\tilde{v}_l(t)\|_{V^2} \leqslant C_{12} + C_{13}e^{-\gamma t}\left(C_4\|b\|^2_{V^2} + \varepsilon\|b\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|b\|^2_{V^4}\right);$$

$$\|v'_*(t)\|_{V^1} \leqslant \varliminf_{l\to\infty} \|\tilde{v}'_l(t)\|_{V^1} \leqslant C_{12} + C_{13}e^{-\gamma t}\left(C_4\|b\|^2_{V^2} + \varepsilon\|b\|^2_{V^3} + \varepsilon\varkappa\|b\|^2_{V^4}\right).$$

Складывая эти оценки, получаем требуемую оценку (7.11). Оценка (7.12) получается аналогичным образом. □

8. Разрешимость задачи (1.1)–(1.4) на полуоси

Понятие слабого решения начально–краевой задачи (1.1)–(1.4) на конечном отрезке и на полуоси можно переписать в следующем эквивалентном исходным определениям виде.

Определение 8.1. *Слабым решением задачи (1.1)–(1.4) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_1[0,T]$, удовлетворяющую операторному уравнению*

$$(J+\varkappa A)v'(t) + \nu Av(t) - B_1(v)(t) + \varkappa B_2(v)(t) - C(v)(t) = f \tag{8.1}$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и начальному условию (4.2).

Определение 8.2. *Слабым решением задачи (1.1)–(1.4) на полуоси $\mathbb{R}_+$ называется функция $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, такая что для любого $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является решением операторного уравнения (8.1) на этом отрезке и удовлетворяет начальному условию (4.2).*

Теорема 8.1. *Пусть коэффициенты $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i=\overline{1,L}$, удовлетворяют условиям (6.1). Тогда при любом $a \in V^2$ задача (8.1), (4.2) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leqslant C_{19}(1 + e^{-\gamma t}\|a\|^2_{V^2}) \tag{8.2}$$

при почти всех $t \geqslant 0$. Здесь константа C_{19} зависит от f, γ, $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i=\overline{1,L}$.

Доказательство. Поскольку V^5 плотно в V^2, для любого $a \in V^2$ найдется последовательность $\{b_m\} \subset V^5$, такая что $\|b_m - a\|_{V^2} \to 0$.

Положим

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m(1+\|b_m\|^2_{V^4})}.$$

В этом случае $\varepsilon_m \to 0$ и

$$\varepsilon_m\|b_m\|^2_{V^4} \leqslant 1. \tag{8.3}$$

По теореме 7.2 для каждого $b_m \in V^5$ на $\mathbb{R}_+$ существует решение v_m уравнения (5.9) с $\varepsilon = \varepsilon_m$, удовлетворяющее начальному условию

$$v_m(0) = b_m.$$

В силу теоремы 7.2 с учётом неравенства (8.3) и компактности вложения $V^4 \subset V^3$ имеют место оценки:

$$\|v_m(t)\|_{V^2} + \|v'_m(t)\|_{V^1} \leqslant C_{16} + C_{17}e^{-\gamma t}\left(C_4\|b_m\|^2_{V^2} + \varkappa + C_{18}\right); \tag{8.4}$$

$$\varepsilon_m e^{-\gamma t}\|v'_m(t)\|_{V^5} \leqslant C_8 + C_9 e^{-\gamma t}\left(C_4\|b_m\|^2_{V^2} + \varkappa + C_{18}\right). \tag{8.5}$$

При каждом m это неравенство выполняется при всех $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Q_m$, где Q_m — некоторое множество меры нуль. Поэтому при всех $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Q$, где $Q = \cup_m Q_m$ — множество меры нуль, данное неравенство выполняется для каждого m.

Покажем, что последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в пространстве $C(\mathbb{R}_+, V^1)$. Согласно лемме 2.1 для этого достаточно установить, что для любого $T > 0$

последовательность ограничений $\{\Pi_T v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T],V^1)$. Однако это следует из первого пункта леммы 7.1, так как из оценки (8.4) мы имеем, что последовательность $\{\Pi_T v_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^2)$, а последовательность производных $\{\Pi_T v'_m\}$ ограничена в пространстве $L_\infty(0,T;V^1)$.

Так как последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна, она содержит подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящуюся в $C(\mathbb{R}_+,V^1)$ к некоторой функции v_*. Покажем, что v_* является искомым решением.

Сначала заметим, что v_* принадлежит пространству $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. В самом деле, из оценки (8.4) следует, что при произвольном $T>0$ последовательности $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ и $\{\Pi_T v'_{m_k}\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^2)$ и $L_\infty(0,T;V^1)$ соответственно. Поэтому, без ограничения общности, в силу единственности предела можно считать, что последовательность $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ сходится $*$–слабо в $L_\infty(0,T;V^2)$ к v_*. Аналогично, без ограничения общности, можно считать, что последовательность $\{\Pi_T v'_{m_k}\}$ сходится $*$–слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$ к некоторой функции $u\in L_\infty(0,T;V^1)$. Однако, в смысле распределений последовательность $\{\Pi_T v'_{m_k}\}$ сходится к v'_*, поэтому $u=\Pi_T v'_*$. Таким образом, функция $\Pi_T v_*$ принадлежит пространству $L_\infty(0,T;V^2)$, а ее производная — пространству $L_\infty(0,T;V^1)$, то есть $\Pi_T v_*\in W_1[0,T]$. Поскольку это верно для любого T, v_* принадлежит $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, что и требовалось.

Проверим, что функция v_* является решением уравнения (8.1) на $\mathbb{R}_+$. Для этого нужно установить, что ограничение $\Pi_T v_*$ на всякий отрезок $[0,T]$ $(T>0)$ является решением уравнения (8.1) на этом отрезке.

Из сильной сходимости $\{\hat v_{m_k}\}$ к v_* в $C(\mathbb{R}_+,V^1)$ следует сходимость ограничений $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ к $\Pi_T v_*$ в $C([0,T],V^1)$. Функции $\Pi_T v_{m_k}$ являются решениями уравнения (5.9), то есть

$$(J+\varepsilon_{m_k}e^{-\gamma t}A^3+\varkappa A)\Pi_T v'_{m_k}+\nu A\Pi_T v_{m_k}-B_1(\Pi_T v_{m_k})+\varkappa B_2(\Pi_T v_{m_k})-C(\Pi_T v_{m_k})=f. \quad (8.6)$$

Из неравенства (8.4) следует, что последовательность $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^2)$, а последовательность производных $\{\Pi_T v'_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$. Из оценки (8.5) следует, что последовательность $\varepsilon_{m_k}v'_{m_k}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^5)$ и в силу нашего выбора $\varepsilon_{m_k}\to 0$. Поэтому по лемме 7.1 без ограничения общности можно считать, что левая часть (8.6) сходится к

$$(J+\varkappa A)\Pi_T v'_*+\nu A\Pi_T v_*-B_1(\Pi_T v_*)+\varkappa B_2(\Pi_T v_*)-C(\Pi_T v_*),$$

например, слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$.

Откуда, в силу произвольности выбора T получаем, что v_* удовлетворяет следующему равенству

$$(J+\varkappa A)v'_*+\nu A v_*-B_1(v_*)+\varkappa B_2(v_*)-C(v_*)=f. \quad (8.7)$$

Откуда и получаем, что функция v_* является решением задачи (8.1), (4.2).

Покажем, что для v_* выполняется начальное условие (4.2). Из сходимости в $C(\mathbb{R}_+,V^1)$ следует поточечная сходимость, поэтому

$$b_{m_k}=v_{m_k}(0)\to v_*(0) \quad \text{в} \quad V^1.$$

Однако, в силу нашего выбора последовательности $\{b_m\}$ мы имеем, что $b_{m_k}\to a$ в V^2. В силу единственности предела $v_*(0)=a$, то есть начальное условие выполнено.

Остаётся доказать неравенство (8.2). Неравенство (8.4) выполняется для каждого k при всех t, принадлежащих некоторому (не зависящему от k) подмножеству $\mathbb{R}_+$ полной меры. Возьмем некоторое такое t. Из неравенства (8.4) следует, что последовательности $\{v_{m_k}(t)\}$ и $\{v'_{m_k}(t)\}$ ограничены в V^2 и V^1 соответственно. Следовательно, каждая из них содержит подпоследовательности $\tilde v_l(t)$ и $\tilde v'_l(t)$, которые слабо сходятся в V^2 к $v_*(t)$ и в V^1 к $v'_*(t)$. Поэтому

$$\|v_*(t)\|_{V^2}\leqslant \varliminf_{l\to\infty}\|\tilde v_l(t)\|_{V^2}\leqslant C_{16}+C_{17}e^{-\gamma t}\left(C_4\|a\|^2_{V^2}+\varkappa+C_{18}\right);$$

$$\|v'_*(t)\|_{V^1}\leqslant \varliminf_{l\to\infty}\|\tilde v'_l(t)\|_{V^1}\leqslant C_{16}+C_{17}e^{-\gamma t}\left(C_4\|a\|^2_{V^2}+\varkappa+C_{18}\right).$$

Складывая эти оценки, получаем оценку, которая может быть записана в виде (8.2). □

9. Пространство траекторий и аттракторы

В данном случае $E = V^2$ и $E_0 = V^1$. Пространство траекторий $\mathcal{H}^+$ уравнения (8.1) определяется как множество решений этого уравнения, определенных на $\mathbb{R}_+$, существенно ограниченных как функции со значениями в V^2 и удовлетворяющих оценке

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leqslant C_{19}(1 + e^{-\gamma t}\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+,V^2)}) \tag{9.1}$$

при почти всех $t \geqslant 0$.

Необходимо показать, что имеет место включение

$$\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2).$$

Включение $\mathcal{H}^+ \subset L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$ непосредственно следует из определения пространства траекторий. Из неравенства (9.1) следует, что если v — некоторая траектория, то на произвольном отрезке $[0, T]$ функция $\Pi_T v' \in L_\infty(0, T; V^1)$. Поэтому $\Pi_T v$ принадлежит пространству $C([0, T], V^1)$ как интеграл с переменным верхним пределом. Это верно при любом T, так что $v \in C(\mathbb{R}_+; V^1)$.

Непустота пространства $\mathcal{H}^+$ следует из следующей теоремы.

Теорема 9.1. *Пусть коэффициенты $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i = \overline{1, L}$, удовлетворяют условиям* (6.1). *Тогда для каждого $a \in V^2$ существует траектория $v \in \mathcal{H}^+$, такая что $v(0) = a$.*

Доказательство. Теорема 8.1 утверждает, что на $\mathbb{R}_+$ существует решение $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ задачи (8.1), (4.2). Покажем, что эта функция является искомой траекторией. Для этого нужно только проверить выполнение оценки (9.1). Поскольку v удовлетворяет (8.2), достаточно получить неравенство

$$\|v(0)\|_{V^2} \leqslant \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)}. \tag{9.2}$$

Из оценки (8.2) следует, что функция v принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$, а ее производная $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$. Отсюда получаем, что $v \in C(\mathbb{R}_+; V^1)$ (повторяя рассуждения, проведенные в теореме 8.1). Таким образом, $v \in C(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$, и по теореме 2.1 функция v принадлежит пространству $C_w(\mathbb{R}_+; V^2)$. Поэтому для любого $t \in \mathbb{R}_+$ определено значение $v(t) \in V^2$. Откуда и из определения нормы в $L_\infty(\mathbb{R}_+, V^2)$ следует требуемое неравенство (9.2). □

Основным результатом работы является следующая теорема о существовании минимального траекторного и глобального аттракторов.

Теорема 9.2. *Пусть коэффициенты $\varkappa$, ν, α_i, β_i, $i = \overline{1, L}$, удовлетворяют условиям* (6.1). *Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ и глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2 для доказательства достаточно установить существование траекторного полуаттрактора.

Рассмотрим множество

$$P = \{v \in C(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2) \colon v' \in L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1),$$
$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leqslant 2C_{19} \text{ при п. в. } t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Из определения P непосредственно следует, что это множество ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^2)$ и трансляционно инвариантно, то есть $T(h)P \subset P$, $h \geqslant 0$.

Покажем теперь, что множество P относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^1)$. Для этого в силу леммы 2.1 достаточно показать, что для любого $T > 0$ множество $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0, T], V^1)$. Действительно, из определения P имеем, что при любом $T > 0$ множество $\Pi_T P$ ограничено в $L_\infty(0, T; V^2)$, а множество $\{v' \colon v \in \Pi_T P\}$ ограничено в $L_\infty(0,T;V^1)$. По теореме 3.1 как и выше отсюда следует, что множество $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0,T],V^1)$. В силу произвольности T получаем относительную компактность множества P в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$.

Покажем, что множество P является поглощающим для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Рассмотрим произвольное множество $B\subset\mathcal{H}^+$, ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$. Пусть для определённости

$$\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)}\leqslant R$$

для всех $v\in B$.

Выберем такое $h_0\geqslant 0$, что $R^2e^{-\gamma h_0}\leqslant 1$. Пусть v — произвольная функция из B. Так как v удовлетворяет неравенству (9.1), при $h\geqslant h_0$ имеем

$$\begin{aligned}\|T(h)v(t)\|_{V^2}+\|T(h)v'(t)\|_{V^1}&=\|v(t+h)\|_{V^2}+\|v'(t+h)\|_{V^1}\\&\leqslant C_{19}(1+e^{-\gamma(t+h)}R^2)\leqslant C_{19}(1+e^{-\gamma t})\leqslant 2C_{19}.\end{aligned}$$

Таким образом, $T(h)v\in P$.

В силу произвольности v получаем, что $T(h)B\subset P$ при всех $h\geqslant h_0$. Следовательно, P — поглощающее множество.

Откуда по лемме 2.2 получаем, что $\overline{P}$ является траекторным полуаттрактором. Тогда по теореме 2.2 существует траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ и глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.А. Павловский. *К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров* // ДАН СССР **200**:4, 809–812 (1971).
2. В.Б. Амфилохиев, В.А. Павловский. *Экспериментальные данные о ламинарно–турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах* // Тр. Ленингр. кораблестр. ин–та **104**, 3–5 (1976).
3. В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева, Я.С. Ходорковский. *Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений* // Тр. Ленингр. кораблестр. ин–та **96**, 3–9 (1975).
4. Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин. *Реология полимеров.* М.: Химия. 1977.
5. А.П. Осколков. *Начально–краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта* // Тр. МИАН СССР **179**, 126–164 (1988).
6. В.Г. Звягин, М.В. Турбин. *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред.* М.: КРАСАНД. 2012.
7. R.J. DiPerna, P.-L. Lions. *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces* // Invent. Math. **98**:3, 511–547 (1989).
8. V.G. Zvyagin, V.P. Orlov. *Solvability of one non–Newtonian fluid dynamics model with memory* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods. **172**, 73–98 (2018).
9. M. Turbin, A. Ustiuzhaninova. *Existence of weak solution to initial–boundary value problem for finite order Kelvin — Voigt fluid motion model* // Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser. **29**:2, 54 (2023).
10. О.А. Ладыженская. *О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье — Стокса и других уравнений с частными производными* // Усп. Мат. Наук **42**:6, 25–60 (1987).
11. Г.А. Серегин. *О динамической системе, порожденной двумерными уравнениями движения среды Бингама* // Зап. научн. семин. Ленингр. отд. мат. инст. Стеклова **188**, 128–142 (1991).
12. V.V. Chepyzhov, M.I. Vishik. *Evolution equations and their trajectory attractors* // J. Math. Pures Appl., IX. Sér. **76**:10, 913–964 (1997).
13. V.V. Chepyzhov, M.I. Vishik. *Attractors for equations of mathematical physics.* Providence, R.I.: American Mathematical Society. 2002.
14. G.R. Sell, Y. You. *Dynamics of evolutionary equations.* New York: Springer. 2002.

15. V. Zvyagin, D. Vorotnikov. *Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics.* Berlin: de Gruyter. 2008.
16. D.A. Vorotnikov, V.G. Zvyagin. *Trajectory and global attractors of the boundary value problem for autonomous motion equations of viscoelastic medium* // J. Math. Fluid Mech. **10**:1, 19–44 (2008).
17. А.С. Устюжанинова, М.В. Турбин. *Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина — Фойгта* // Сиб. ж. инд. мат. **24**:1, 126–138 (2021).
18. А.С. Устюжанинова. *Равномерные аттракторы для модифицированной модели Кельвина — Фойгта* // Диффер. уравн. **57**:9, 1191–1202 (2021).
19. В.Г. Звягин, С.К. Кондратьев, *Аттракторы уравнений неньютоновской гидродинамики* // Усп. мат. наук, сер. мат. **69**:5, 81–156 (2014).
20. М.В. Турбин, А.С. Устюжанинова. *Сходимость аттракторов аппроксимации к аттракторам модифицированной модели Кельвина — Фойгта* // Ж. вычисл. матем. матем. физ. **62**:2, 330–341 (2022).
21. В.Г. Звягин, М.В. Турбин. *О существовании аттракторов для аппроксимаций модели Бингама и их сходимости к аттракторам исходной модели* // Сиб. матем. журн. **63**:4. 842–859 (2022).
22. В.Г. Звягин, А.С. Устюжанинова. *Обратные аттракторы модели Бингама* // Диффер. уравн. **59**:3, 374–379 (2023).
23. V.G. Zvyagin. *Topological Approximation Approach to Study of Mathematical Problems of Hydrodynamics* // J. Math. Sci. **201**:6, 830–858 (2014).
24. М.В. Турбин, А.С. Устюжанинова. *Теорема существования слабого решения начально–краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров* // Изв. вузов. Матем. **8**, 62–78 (2019).
25. M.V. Turbin. *Research of a mathematical model of low–concentrated aqueous polymer solutions* // Abstr. Appl. Anal. **2006**, 12497 (2006).
26. M. Turbin, A. Ustiuzhaninova. *Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin — Voigt model* // Evol. Equ. Control Theory **11**:6, 2055–2072 (2022).
27. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1978.
28. Р. Темам. *Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ.* М.: Мир. 1981.
29. О.А. Ладыженская. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука. 1970.
30. В.А. Солонников. *Оценки тензоров Грина для некоторых граничных задач* // Докл. акад. наук СССР **130**:5, 988–991 (1960).
31. И.И. Ворович, В.И. Юдович. *Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости* // Матем. сб. **53**:4, 393–428 (1961).
32. J. Simon. *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$* // Ann. Mat. Pura Appl. **146**, 65–96 (1987).

Михаил Вячеславович Турбин,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1,
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: `mrmike@mail.ru`

Анастасия Сергеевна Устюжанинова,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1,
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: `nastyzhka@gmail.com`