УДК 517.982.274+517.983.22

О КОММУТАНТЕ СИСТЕМЫ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

П.А. ИВАНОВ, С.Н. МЕЛИХОВ

Аннотация. Описан коммутант системы операторов интегрирования в пространстве Фреше $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в полизвездной относительно точки 0 области Ω в $\mathbb{C}^N$. Такой областью является, в частности, произведение областей в $\mathbb{C}$, звездных относительно нуля, всякая полная область Рейнхарта с центром в точке 0. Как и в одномерном случае, операторы из коммутанта являются операторами Дюамеля. Показано, что $H(\Omega)$ с произведением Дюамеля $*$ является ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй. Она топологически изоморфна коммутанту с умножением — композицией операторов и с топологией ограниченной сходимости. Получено аналогичное одномерному представление произведения $f * g$ в виде суммы, содержащей одно слагаемое, кратное f, и слагаемые с интегралами хотя бы по одной переменной от функции, не зависящей от производных f. С помощью этого представления доказан критерий $*$–обратимости функции из $H(\Omega)$ и соответствующего ей оператора свертки. Установлено, что алгебра $(H(\Omega), *)$ является локальной. В случае, когда область Ω дополнительно выпуклая, в двойственной ситуации получен критерий обратимости оператора из коммутанта системы операторов частного обратного сдвига.

Ключевые слова: голоморфная функция, оператор интегрирования, коммутант, произведение Дюамеля.

Mathematics Subject Classification: 46E10, 47B91

1. Введение

В настоящей работе исследуются линейные непрерывные операторы в пространстве $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в полизвездной относительно точки 0 области Ω в $\mathbb{C}^N$, перестановочные с каждым оператором частного интегрирования, и задающее их произведение Дюамеля $*$. Произведение Дюамеля в пространствах голоморфных функций достаточно интенсивно исследуется, оно находит приложения в теории дифференциальных уравнений, спектральной теории в обобщенном смысле, в операторном исчислении, в задаче о спектральной кратности линейного непрерывного оператора (см. статью М.Т. Караева [3]). В пространстве $H(\Omega)$ при $N = 1$ оно было введено и изучено Н. Уигли [11]. Полученные для него результаты относятся большей частью к функциям одной переменной, случай многих переменных исследован значительно меньше.

Полизвездные области Ω рассмотрены ранее в [2], для них операторы интегрирования J_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, по отдельным переменным в $H(\Omega)$ корректно определены. Множество таких областей содержит все произведения областей в $\mathbb{C}$, звездных относительно нуля,

P.A. Ivanov, S.N. Melikhov, On commutant of system of integration operators in mutlidimensional domains.

Исследование выполнено в Южном федеральном университете за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00062, https://rscf.ru/project/25-21-00062/.

Поступила 22 января 2025 г.

все полные области Рейнхарта с центром в точке 0. Оно строго уже множества всех областей в $\mathbb{C}^N$, звездных относительно нуля. Основными результатами работы являются теорема 2.2 о представлении операторов из коммутанта $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ системы $\{J_k \,|\, 1 \leqslant k \leqslant N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$, теорема 3.1 о топологической изоморфности пространства $H(\Omega)$ и $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ с топологией ограниченной сходимости и об изоморфности алгебр $(H(\Omega), *)$ и $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ и теорема 4.1, содержащая критерий обратимости элемента в алгебре $(H(\Omega), *)$. При $N = 1$ теоремы 2.2 и 4.1 хорошо известны. И. Райчинов [6] описал коммутант оператора интегрирования в пространстве $H(\Omega)$ и установил условие обратимости оператора из коммутанта для области Ω в $\mathbb{C}$, звездной относительно точки 0. Впоследствии Ю.А. Кирютенко [4] получил подобные результаты для односвязной звездообразной области в $\mathbb{C}$, содержащей 0. Н. Уигли [11] изучил произведение Дюамеля в $H(\Omega)$ (предполагая звездность Ω относительно точки 0) и установил критерий обратимости элемента в алгебре $(H(\Omega), *)$. В данной статье для доказательства $*$–обратимости функции из $H(\Omega)$, как и в [11], привлекается ряд Неймана. Его использование оказалось возможным вследствие установленного в лемме 2.1 представления произведения $f * g$ в виде суммы, содержащей одно внеинтегральное слагаемое, кратное f, и слагаемые с интегралами хотя бы по одной переменной от функции, не зависящей от производных f. Это позволило и в многомерной ситуации получить оценки, обычно применяемые при доказательстве квазинильпотентности оператора Вольтерра в банаховых пространствах. Доказанный критерий обратимости показывает, что алгебра $(H(\Omega), *)$, как и в одномерном случае, является локальной, а единственным максимальным идеалом в ней является множество всех ее $*$–необратимых элементов.

Если область Ω дополнительно выпуклая, то с помощью преобразования Лапласа сопряженные к J_k операторы реализуются как операторы $D_{k,0}$ частного обратного сдвига в некотором пространстве $P(\Omega)$ целых функций экспоненциального типа. Это дало возможность для двойственной ситуации получить критерий обратимости в $P(\Omega)$ оператора из коммутанта системы $\{D_{k,0} \,|\, 1 \leqslant k \leqslant N\}$.

2. Описание операторов, перестановочных с системой операторов интегрирования

Далее рассматривается область Ω в $\mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{N}$, являющаяся полизвездной относительно точки 0. При этом [2, § 4.3] множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ называется полизвездным относительно точки 0, если для любого $z \in Q$ параллелепипед

$$\Pi(z) := [0, z_1] \times \cdots \times [0, z_N]$$

содержится в Q. Пусть $P_N := \{1, \ldots, N\}$. Множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ полизвездно относительно точки 0 тогда и только тогда, когда для любых $z \in Q$, $k \in P_N$, $\xi \in [0, z_k]$ точка $(z_1, \ldots, z_{k-1}, \xi, z_{k+1}, \ldots, z_N)$ принадлежит Q.

Если $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, — области в $\mathbb{C}$, то Ω полизвездная относительно точки 0 в том и только в том случае, когда каждая область Ω_k звездная относительно нуля. Любая полная область Рейнхарта с центром в 0 полизвездна относительно 0. При $N \geqslant 2$ не всякая выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, содержащая 0, обладает этим свойством.

Символом $H(\Omega)$ обозначим пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах Ω. Для $k \in P_N$ введем операторы частного интегрирования

$$J_k(f)(z) := \int_0^{z_k} f(z_1, \ldots, z_{k-1}, \xi, z_{k+1}, \ldots, z_N) d\xi, \quad z \in \Omega, \quad f \in H(\Omega)$$

(интеграл берется по отрезку $[0, z_k]$). Все они линейны и непрерывны в $H(\Omega)$ и попарно перестановочны.

Произведение Дюамеля в $H(\Omega)$ определяется следующим образом [11], [10], [2]:

$$(f * g)(z) := \frac{\partial^N}{\partial z_1 \cdots \partial z_N} \int\limits_{\Pi(z)} f(t)g(z-t)dt, \quad g \in H(\Omega), \quad z \in \Omega.$$

При этом для $u \in H(\Omega)$ последний интеграл понимается как повторный:

$$\int\limits_{\Pi(z)} u(t)dt := \int\limits_0^{z_N} \cdots \int\limits_0^{z_1} u(t)dt_1 \cdots dt_N, \quad z \in \Omega;$$

он не зависит от порядка интегрирования.

При $N = 1$ выполняется равенство

$$(f * g)(z) = g(0)f(z) + \int\limits_0^z g'(z-t)f(t)dt, \quad z \in \Omega. \tag{2.1}$$

Докажем его аналог для $N \geqslant 1$. Для непустого множества $\tau \subset P_N$ и $z \in \mathbb{C}^N$ символ $z(\tau)$ обозначает точку в $\mathbb{C}^{\operatorname{card}\tau}$, полученную из z отбрасыванием координат z_j, $j \in P_N \setminus \tau$, с сохранением порядка остальных. Если $\tau = P_N$, то $z(\tau) = z$. Для мультииндекса $1 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}_0^N$, $\tau \subset P_N$, $\tau \neq \emptyset$, через $1[\tau]$ обозначаем мультииндекс из $\mathbb{N}_0^N$ такой, что

$$1[\tau]_k = 1 \quad \text{при} \quad k \in \tau,$$

и

$$1[\tau]_k = 0 \quad \text{при} \quad k \in P_N \setminus \tau;$$

$z' := (z_1, \dots, z_{N-1})$; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Далее

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_N^{\alpha_N}}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N; \qquad \partial_k f := \frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad k \in P_N$$

(здесь $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$). Для $t, z \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$ точка $t_{\sigma,z} \in \mathbb{C}^N$ определяется так:

$$(t_{\sigma,z})_k := \begin{cases} z_k, & k \in \sigma, \\ t_k, & k \in P_N \setminus \sigma. \end{cases}$$

Для $\varepsilon > 0$

$$D_N(\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z_k| < \varepsilon,\, k \in P_N\}, \qquad \overline{D}_N(\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z_k| \leqslant \varepsilon,\, k \in P_N\}.$$

Лемма 2.1. *Для любой области Ω в $\mathbb{C}^N$, полизвездной относительно точки 0, всех $f, g \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$ выполняется равенство*

$$(f * g)(z) = g(0)f(z) + \sum_{\sigma \subsetneqq P_N} \int\limits_{\Pi(z(P_N \setminus \sigma))} \partial^{1[P_N \setminus \sigma]} g(z - t_{\sigma,z}) f(t_{\sigma,z}) dt(P_N \setminus \sigma). \tag{2.2}$$

Доказательство. Предположим вначале, что Ω является полидиском $D_N(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Докажем равенство (2.2) для этого случая индукцией по N. При $N = 1$ оно выполняется (см. (2.1)). Пусть оно верно для $N - 1$ при $N \geqslant 2$. Дифференцируя под знаком интеграла (это возможно, например, по [5, гл. 4, § 1, 1.2]), получим:

$$(f * g)(z) = \frac{\partial}{\partial z_N} \int\limits_0^{z_N} \left(\frac{\partial^{N-1}}{\partial z_1 \cdots \partial z_{N-1}} \int\limits_{\Pi(z')} g(z' - t', z_N - t_N) f(t', t_N) dt' \right) dt_N, \quad z \in D_N(\varepsilon).$$

Зафиксируем $z_N \in \mathbb{C}$, для которого $|z_N| < \varepsilon$ и $t_N \in [0, z_N]$. По индукционному предположению, примененному к функциям $f(\cdot, t_N)$ и $g(\cdot, z_N - t_N)$, выполняется равенство

$$\frac{\partial^{N-1}}{\partial z_1 \cdots \partial z_{N-1}} \int\limits_{\Pi(z')} g(z' - t', z_N - t_N) f(t', t_N) dt' = g(0', z_N - t_N) f(z', t_N)$$

$$+ \sum_{\nu \subsetneqq P_{N-1}} \int\limits_{\Pi(z'(P_{N-1} \setminus \nu))} \partial^{1'[P_{N-1} \setminus \nu]} g(z' - t'_{\nu,z'}, z_N - t_N) f(t'_{\nu,z'}, t_N) dt'(P_{N-1} \setminus \nu), \quad z' \in D_{N-1}(\varepsilon).$$

Учитывая одномерное равенство (2.1), получим для $z \in D_N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}(f * g)(z) =& g(0) f(z) + \int\limits_0^{z_N} \partial_N g(0', z_N - t_N) f(z', t_N) dt_N \\ &+ \sum_{\nu \subsetneqq P_{N-1}} \int\limits_{\Pi(z'(P_{N-1} \setminus \nu))} \left(\frac{\partial}{\partial z_N} \int\limits_0^{z_N} \partial^{1'[P_{N-1} \setminus \nu]} g(z' - t'_{\nu,z'}, z_N - t_N) \right. \\ &\left. \cdot f(t'_{\nu,z'}, t_N) dt_N \right) dt'(P_{N-1} \setminus \nu) \\ =& g(0) f(z) + \int\limits_0^{z_N} \partial_N g(0', z_N - t_N) f(z', t_N) dt_N \\ &+ \sum_{\nu \subsetneqq P_{N-1}} \int\limits_{\Pi(z'(P_{N-1} \setminus \nu))} \left(\partial^{1'[P_{N-1} \setminus \nu]} g(z' - t'_{\nu,z'}, 0) f(t'_{\nu,z'}, z_N) \right. \\ &\left. + \int\limits_0^{z_N} \partial_N (\partial^{1'[P_{N-1} \setminus \nu]} g)(z' - t'_{\nu,z'}, z_N - t_N) f(t'_{\nu,z'}, t_N) dt_N \right) dt'(P_{N-1} \setminus \nu) \\ =& g(0) f(z) + \sum_{\sigma \subsetneqq P_N} \int\limits_{\Pi(z(P_N \setminus \sigma))} \partial^{1[P_N \setminus \sigma]} g(z - t_{\sigma,z}) f(t_{\sigma,z}) dt(P_N \setminus \sigma).\end{aligned}$$

Пусть теперь Ω — произвольная область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $D_N(\varepsilon) \subset \Omega$. По доказанному выше равенство (2.2) выполняется для любого $z \in D_N(\varepsilon)$. Поскольку функция $f * g$ и каждое слагаемое в правой части (2.2) голоморфны в Ω, по теореме единственности оно справедливо для всех $z \in \Omega$. □

Для компакта $Q \subset \Omega$ полагаем

$$p_Q(f) := \sup_{z \in Q} |f(z)|, \qquad f \in H(\Omega).$$

Лемма 2.1 влечет такой результат о характере непрерывности произведения $*$.

Лемма 2.2. *Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Для любого полизвездного относительно точки 0 компакта Q в Ω, любого $\varepsilon > 0$, для которого*

$$Q(\varepsilon) := Q + \overline{D}_N(\varepsilon) \subset \Omega,$$

существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых функций $f, g \in H(\Omega)$

$$p_Q(f * g) \leqslant C p_Q(f) p_{Q(\varepsilon)}(g).$$

Для функций с разделяющимися переменными их произведение Дюамеля сводится к одномерным в следующем смысле. Определим для функций u и v переменные z_k, $k \in P_N$, одномерные произведения по z_k:

$$(u *_k v)(z_k) := \frac{\partial}{\partial z_k} \int\limits_0^{z_k} u(z_k - t_k) v(t_k) dt_k.$$

Очевидно, что справедлива

Лемма 2.3. *Пусть*

$$f(z) = f_1(z_1) \cdots f_N(z_N), \qquad g(z) = g_1(z_1) \cdots g_N(z_N),$$

где функции f_k и g_k голоморфны в звездной относительно точки 0 области $G_k \subset \mathbb{C}$, $k \in P_N$. Тогда для любого $z \in G_1 \times \cdots \times G_N$

$$(f * g)(z) = (f_1 *_1 g_1)(z_1) \cdots (f_N *_N g_N)(z_N).$$

Положим

$$f_\alpha(z) := \frac{1}{\alpha!} z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}, \qquad J^\alpha := J_1^{\alpha_1} \cdots J_N^{\alpha_N}, \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Ниже $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1, $\mathbb{C}[z]$ — множество всех многочленов от переменных $z_1, \ldots, z_N$ над $\mathbb{C}$.

При $N = 1$ равенства в следующем утверждении известны (см., например, [3], [11]).

Лемма 2.4. *Верные следующие утверждения.*

(i) *Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ выполняется равенство $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.*

(ii) *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $f, g \in H(\Omega)$ в Ω выполняются равенства*

$$J^\alpha(f * g) = J^\alpha(f) * g = f * J^\alpha(g), \quad J^\alpha(f) = f * f_\alpha.$$

Доказательство. Справедливость (i) влекут такие равенства для $N = 1$ и лемма 2.3.

В силу (i) первые соотношения в (ii) справедливы, если функции f и g являются мономами, а значит, в силу леммы 2.2 и плотности $\mathbb{C}[z]$ в $H(\Omega)$ и для произвольных функций $f, g \in H(\Omega)$. Второе равенство в (ii) — частный случай первого для $g = \mathbf{1}$. □

Теорема 2.1. *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0.*

(i) *С умножением $*$ пространство $H(\Omega)$ является ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй.*

(ii) *Алгебра $(H(\Omega), *)$ не имеет делителей нуля.*

Доказательство. (i): Отображение $(f, g) \mapsto f * g$ из $H(\Omega) \times H(\Omega)$ в $H(\Omega)$ билинейно. Лемма 2.2 влечет его непрерывность. Ясно, что умножение $*$ коммутативно. Ассоциативность умножения $*$ следует из леммы 2.4, его непрерывности и плотности $\mathbb{C}[z]$ в $H(\Omega)$.

(ii): Выберем $r > 0$, для которого $D_N(r) \subset \Omega$. Пусть

$$f, g \in H(\Omega), \qquad f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} b_\alpha f_\alpha, g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha f_\alpha \quad \text{в} \quad D_N(r).$$

По лемме 2.4 имеем

$$f * g = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} a_\gamma f_\gamma, \quad \text{где} \quad a_\gamma = \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma} b_\alpha c_{\gamma - \alpha}, \quad \gamma \in \mathbb{N}_0^N,$$

причем ряд для $f * g$ сходится в $H(D_N(r))$. Если $f * g = 0$ в $H(\Omega)$, то все коэффициенты a_γ равны 0. Это влечет, что одна из мультипоследовательностей b и c нулевая. □

Для функции $g \in H(\Omega)$ введем оператор

$$S_g(f) := f * g, \qquad f \in H(\Omega).$$

Он линеен и, вследствие леммы 2.2, непрерывен в $H(\Omega)$.

Следствие 2.1. *Для любой ненулевой функции $g \in H(\Omega)$ оператор $S_g : H(\Omega) \to H(\Omega)$ инъективен.*

Символом $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ обозначим коммутант множества $\mathcal{J} = \{J_k \,|\, k \in P_N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$ с умножением — композицией операторов; $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ является ее подалгеброй.

Теорема 2.2. *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0.*

(i) *Если $A \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$, то существует единственная функция $g \in H(\Omega)$, для которой $A = S_g$.*

(ii) *$S_g \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$ для любой функции $g \in H(\Omega)$.*

Доказательство. Вторая часть теоремы следует из лемм 2.2 и 2.4.

(i): Пусть $A \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$. Положим $g := A(\mathbf{1})$. Достаточно показать, что $A(f_\alpha) = f_\alpha * g$ для каждого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Так как $f_\alpha = J^\alpha(\mathbf{1})$, выполнены равенства

$$A(f_\alpha) = A(J^\alpha(\mathbf{1})) = J^\alpha(A(\mathbf{1})) = J^\alpha(\mathbf{1} * g) = f_\alpha * g.$$

Единственность функции g вытекает из того, что $\mathbf{1} * h = h$ для всех $h \in H(\Omega)$. □

Замечание 2.1. *Всякая область $G = G_1 \times \cdots \times G_N$, где G_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, является областью Рунге* [7, гл. 1, § 3]. *Областями Рунге являются любая полная область Рейнхарта и всякая выпуклая область в $\mathbb{C}^N$* [1, гл. IV, § 24, п.п. 8, 9].

3. Изоморфность пространства $H(\Omega)$ и коммутанта

Пусть $Co(\Omega)$ — множество всех компактных подмножеств Ω, $\mathcal{B}(H(\Omega))$ — множество всех ограниченных подмножеств $H(\Omega)$. Через $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$ обозначим пространство $\mathcal{K}(\mathcal{J})$, наделенное топологией ограниченной сходимости. Она задается семейством преднорм

$$p_{Q,B}(A) := \sup_{f \in B} \sup_{z \in Q} |A(f)(z)|, \quad A \in \mathcal{K}(\mathcal{J}), \quad Q \in Co(\Omega), \quad B \in \mathcal{B}(H(\Omega)).$$

Теорема 3.1. *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Отображение $\chi(g) := S_g$ является топологическим изоморфизмом пространства $H(\Omega)$ на $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$ и изоморфизмом алгебры $(H(\Omega), *)$ на алгебру $\mathcal{K}(\mathcal{J})$.*

Доказательство. По теореме 2.2 $\chi : H(\Omega) \to \mathcal{K}(\mathcal{J})$ биективно. Ясно, что χ линейно. Для $Q \in Co(\Omega)$ выберем $\varepsilon > 0$, для которого $Q(\varepsilon) = Q + \overline{D}_N(\varepsilon) \subset \Omega$, и $C > 0$ по лемме 2.2. Для $B \in \mathcal{B}(H(\Omega))$, $g \in H(\Omega)$

$$p_{Q,B}(S_g) = \sup_{f \in B} \sup_{z \in Q} |(f * g)(z)| \leqslant C \sup_{f \in B} (p_Q(f) p_{Q(\varepsilon)}(g)) = C_1 p_{Q(\varepsilon)}(g),$$

где $C_1 := C \sup_{f \in B} p_Q(f) < +\infty$. Значит, (линейное) отображение χ непрерывно из $H(\Omega)$ в $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$.

Поскольку для любого компакта Q в Ω, для всех $g \in H(\Omega)$

$$p_Q(g) = \sup_{z \in Q} |g(z)| = \sup_{z \in Q} |(\mathbf{1} * g)(z)| = p_{Q,B}(S_g),$$

где $B = \{\mathbf{1}\} \in \mathcal{B}(H(\Omega))$, отображение χ^{-1} непрерывно из $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$ в $H(\Omega)$.

Так как $\chi(f_\alpha) = J^\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, для всех многочленов g, h выполняется равенство $\chi(g * h) = S_g S_h$. Вследствие непрерывности умножения $*$ из $H(\Omega) \times H(\Omega)$ в $H(\Omega)$, непрерывности χ и χ^{-1} и плотности $\mathbb{C}[z]$ в $H(\Omega)$ равенство $\chi(g * h) = S_g S_h$ справедливо и для любых функций $g, h \in H(\Omega)$. □

Пусть $\mathbb{C}[\mathcal{J}]$ — множество всех многочленов от операторов J_k, $k \in P_N$, т.е. операторов вида

$$\sum_{|\alpha| \leqslant n} b_\alpha J^\alpha, \quad b_\alpha \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Следствие 3.1. *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Множество $\mathbb{C}[\mathcal{J}]$ плотно в $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$.*

В терминологии статьи [9] следствие 3.1 означает, что коммутант $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ является минимальным.

4. Критерий обратимости элемента в алгебре $(H(\Omega), *)$ и оператора Дюамеля

Для $z \in \mathbb{C}^N$, $\tau \subset P_N$, $\tau \neq \emptyset$, и $z \in \mathbb{C}^N$ через $|z|(\tau)$ обозначим точку в $[0, +\infty)^{\operatorname{card}\tau}$, полученную из $(|z_1|, \ldots, |z_N|)$ отбрасыванием координат $|z_j|$, $j \in P_N \setminus \tau$, с сохранением порядка остальных.

Следующий результат является многомерным аналогом [11, §1, теорема].

Лемма 4.1. *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Если $h \in H(\Omega)$, $h(0) = 0$, то функция $\mathbf{1} - h$ обратима в алгебре $(H(\Omega), *)$.*

Доказательство. Положим

$$h^{[0]} := \mathbf{1}, \quad h^{[n]} := h^{[n-1]} * h, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем полизвездный относительно точки 0 компакт $Q \subset \Omega$. Пусть

$$M := \max\left\{ \sup_{z \in Q} |\partial^\alpha h(z)| \,\middle|\, 0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1,\, k \in P_N,\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N \right\}.$$

По лемме 2.1 для $z \in Q$

$$|h^{[2]}(z)| \leqslant M^2 \sum_{\sigma \subsetneqq P_N} \prod_{k \in P_N \setminus \sigma} |z_k| \leqslant M^2 (2^N - 1) \prod_{k \in P_N} (1 + |z_k|).$$

Покажем, что для всех $n \geqslant 2$, $z \in Q$ выполняется неравенство

$$|h^{[n]}(z)| \leqslant \frac{M^n (2^N - 1)^{n-1}}{(n-1)!} \prod_{k \in P_N} (1 + |z_k|)^{n-1}. \tag{4.1}$$

Для $n = 2$ эта оценка выполняется. Пусть она имеет место для некоторого $n \geqslant 2$. Тогда вследствие леммы 2.1

$$|h^{[n+1]}(z)| \leqslant \sum_{\sigma \subsetneqq P_N} \left| \int\limits_{\Pi(z(P_N \setminus \sigma))} \partial^{1(P_N\setminus\sigma)} h(z - t_{\sigma,z}) h^{[n]}(t_{\sigma,z}) dt(P_N \setminus \sigma) \right|$$
$$\leqslant \frac{M^{n+1}(2^N - 1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\sigma \subsetneqq P_N} \int\limits_{\Pi(|z|(P_N\setminus\sigma))} \prod_{k \in P_N} (1 + r_k)^{n-1} dr(P_N \setminus \sigma)$$
$$\leqslant \frac{M^{n+1}(2^N - 1)^n}{n!} \prod_{k \in P_N} (1 + |z_k|)^n.$$

Положим $d := \sup \left\{ |z_k| \,\middle|\, z \in Q,\ k \in P_N \right\}$. Из оценок (4.1) следует, что для любого $n \geqslant 2$

$$\sup_{z \in Q} |h^{[n]}(z)| \leqslant \frac{M^n (2^N - 1)^{n-1} (1 + d)^{Nn}}{(n-1)!}.$$

По [2, лемма 3] семейство всех полизвездных относительно точки 0 компактов в Ω образует фундаментальное семейство компактных подмножеств Ω. Значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^{[n]}$ (абсолютно) сходится в $H(\Omega)$ к некоторой функции $v \in H(\Omega)$. При этом $(\mathbf{1} - h) * v = \mathbf{1}$. □

Теорема 4.1. *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0, $g \in H(\Omega)$. Следущие утверждения равносильны:*

(i) *Оператор $S_g : H(\Omega) \to H(\Omega)$ обратим.*
(ii) *Элемент g обратим в алгебре $(H(\Omega), *)$.*
(iii) $g(0) \neq 0$.

Доказательство. Импликация (iii)⇒(ii) верна по лемме 4.1.

(ii)⇒(i): Пусть $g * h = h * g = \mathbf{1}$, $h \in H(\Omega)$. По теореме 3.1

$$S_{\mathbf{1}} = SgS_h = S_h S_g.$$

Поскольку $S_{\mathbf{1}}$ — тождественный оператор, S_h — оператор, обратный к S_g.

(i)⇒(iii): Предположим, что $g(0) = 0$. Вследствие леммы 2.1

$$S_g(f)(0) = 0$$

для любой функции $f \in H(\Omega)$. Значит, $S_g : H(\Omega) \to H(\Omega)$ не является сюръективным, а тем более обратимым. □

Следствие 4.1. *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Алгебра $(H(\Omega), *)$ локальна. Ее единственным максимальным идеалом является множество всех $*$–необратимых элементов в ней.*

Подобный результат для пространства Харди в полидиске получен другим методом в статье [10, следствие 3]. В [10] он доказан с помощью рассмотрения соответствующего пространства функций со значениями в таком же банаховом пространстве с числом переменных, меньшем на единицу, и последующего сведения к одномерной ситуации.

5. Следствия для двойственной ситуации

Рассмотрим двойственную ситуацию в случае, когда область Ω дополнительно является выпуклой. Зафиксируем последовательность выпуклых компактов Q_n, $n \in \mathbb{N}$, в Ω таких, что $Q_n \subset \operatorname{int} Q_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ ($\operatorname{int} M$ обозначает внутренность множества $M \subset \mathbb{C}^N$ в $\mathbb{C}^N$). Пусть

$$H_n(z) := \sup_{t\in Q_n} \operatorname{Re}\langle z, t\rangle, \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

— (комплексная) опорная функция Q_n, $n \in \mathbb{N}$ (при этом $\langle z, t\rangle := \sum_{k=1}^{N} z_k t_k$). Весовое пространство $P(\Omega)$ целых в $\mathbb{C}^N$ функций определяется следующим образом:

$$P(\Omega) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P(Q_n),$$

где

$$P(Q_n) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) \,\middle|\, \|f\|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(H_n(z))} < +\infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оно наделяется топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств $(P(Q_n), \|\cdot\|_n)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $P(\Omega)$. Пространство $P(\Omega)$ содержит $\mathbb{C}[z]$.

Преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\nu)(z) := \nu_t(e^{\langle z,t\rangle}), \quad \nu \in H(\Omega)', \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к $H(\Omega)$ на $P(\Omega)$ [8, теорема 4.5.3]. Билинейная форма

$$(h, f) \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(h), \quad h \in H(\Omega), \quad f \in P(\Omega),$$

устанавливает двойственность между $H(\Omega)$ и $P(\Omega)$. Согласно [2] операторы (частного) обратного сдвига

$$D_{k,0}(f)(z) := \frac{f(z) - f(z_1, \ldots, z_{k-1}, 0, z_{k+1}, \ldots, z_N)}{z_k}, \quad f \in P(\Omega), \quad k \in P_N,$$

линейно и непрерывно отображают $P(\Omega)$ в $P(\Omega)$. Для функционала $\varphi \in P(\Omega)'$ положим

$$B_\varphi(f)(z) := \varphi(T_z(f)), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad f \in P(\Omega).$$

Оператор B_φ линеен и непрерывен в $P(\Omega)$, множество $\{B_\varphi \,|\, \varphi \in P(\Omega)'\}$ является коммутантом системы $\{D_{k,0} \,|k \in P_N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $P(\Omega)$ [2] (в данной ситуации последнее следует и из теоремы 2.2). Пусть $\mathcal{F}' : P(\Omega)' \to H(\Omega)$ — отображение, сопряженное к $\mathcal{F} : H(\Omega)' \to P(\Omega)$ относительно дуальных пар $(H(\Omega)', H(\Omega))$ и $(P(\Omega), P(\Omega)')$. Отметим, что $\varphi(\mathbf{1}) = \mathcal{F}'(\varphi)(0)$ для любого функционала $\varphi \in P(\Omega)'$.

Лемма 5.1. *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0.*

(i) *Для $g \in H(\Omega)$ сопряженным к оператору S_g относительно дуальной пары $(H(\Omega), P(\Omega))$ является оператор B_φ для $\varphi = (\mathcal{F}')^{-1}(g)$.*

(ii) *Для $k \in P_N$ сопряженным к оператору*

$$J_k : H(\Omega) \to H(\Omega)$$

относительно дуальной пары $(H(\Omega), P(\Omega))$ является оператор

$$D_{k,0} : P(\Omega) \to P(\Omega).$$

Доказательство. Утверждение (i) доказано в [2, следствие 4], а (ii) — частный случай (i) для $g(t) = t_k$ (тогда $(\mathcal{F}')^{-1}(g)(f) = \frac{\partial f}{\partial z_k}(0)$). □

Из теоремы 4.1 и леммы 5.1 вытекает

Теорема 5.1. *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0, $\varphi \in P(\Omega)'$. Оператор B_φ обратим в $P(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbf{1}) \neq 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.С. Владимиров. *Методы теории функций многих комплексных переменных.* М.: Наука. 1964.
2. П.А. Иванов, С.Н. Мелихов. *Многомерное произведение Дюамеля в пространстве голоморфных функций и операторы обратного сдвига* // Мат. заметки. **113**:5, 677–692 (2023).
3. М.Т. Караев. *Алгебры Дюамеля и их приложения* // Функц. анал. прилож. **52**:1, 3–12 (2018).
4. Ю.А. Кирютенко. *Обратимость оператора Вольтерра в пространстве аналитических функций* // Мат. заметки. **35**:6, 795—802 (1984).
5. А.И. Маркушевич. *Теория аналитических функций.* Т. 1. М.: Наука. 1967.
6. И. Райчинов. *О линейных операторах, перестановочных с операцией интегрирования* // В: Математический анализ и его приложения. Т. 2. Ростов-на-Дону: изд-во РГУ. 63–72, 1970.
7. Б.А. Фукс. *Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных.* М.: Физматгиз. 1963.
8. Л. Хермандер. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Наука. 1968.
9. M. Lacruz, F. Léon–Saavedra, S. Petrović. *Composition operators with a minimal commutant* // Adv. Math. **328**, 890–927 (2018).
10. K.G. Merryfield, S. Watson. *A local algebra structure for H^p of the polydisc* // Colloq. Math. **62**:1, 73–79 (1991).
11. N. Wigley. *The Duhamel product of analytic functions* // Duke Math. J. **41**:1, 211–217 (1974).

Павел Александрович Иванов,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики
и компьютерных наук им. И.И. Воровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: piv@sfedu.ru

Сергей Николаевич Мелихов,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики
и компьютерных наук им. И.И. Воровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Ватутина, 53,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru