

УДК 517.958

ЗАДАЧА КОШИ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГЕРАСИМОВА С РЕГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

В.Е. ФЕДОРОВ, А.В. НАГУМАНОВА, А.О. САГИМБАЕВА

Аннотация. Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи Коши для линейного регулярного интегро–дифференциального уравнения типа Герасимова в банаховом пространстве. Это позволило получить критерий корректности для соответствующей линейной обратной задачи с постоянным неизвестным коэффициентом в правой части. Абстрактные результаты использованы при рассмотрении прямой и обратной начально–краевых задач для класса уравнений с интегро–дифференциальным оператором типа Герасимова по времени и полиномами от оператора Лапласа по пространственным переменным, а также при изучении однозначной разрешимости задачи Коши и линейной обратной задачи для системы обыкновенных интегро–дифференциальных уравнений. Регулярное ядро интегрального оператора в рассмотренной системе является существенно операторнозначным и задает в уравнениях системы линейные комбинации различных интегро–дифференциальных операторов.

Ключевые слова: интегро–дифференциальное уравнение типа Герасимова, регулярное интегральное ядро, задача Коши, обратная коэффициентная задача, начально–краевая задача.

Mathematics Subject Classification: 34K30, 35R09, 35R30, 47G20, 47J05

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия устойчивый интерес исследователей вызывают задачи для уравнений с различными дробными производными, которые используются при моделировании явлений и процессов в физике, химии, биологии, в технических и социально–гуманитарных науках (см. монографии [4]–[7], [18], [22] и библиографию в них). Большинство дробных производных представляют собой интегро–дифференциальные операторы, в которых сначала на функцию действует интегральный оператор свертки, а затем — оператор обычного дифференцирования, как в дробной производной Римана — Лиувилля, или наоборот, как в дробной производной Герасимова — Капуто. При этом ядро в интегральном операторе является сингулярным. Работы различных авторов посвящены исследованию как прямых, так и обратных коэффициентных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка (см., например, [1], [2], [10], [15], [20]).

Начальные задачи для линейных уравнений в банаховых пространствах, разрешенных относительно интегро–дифференциального оператора (типа Римана — Лиувилля или типа Герасимова в зависимости от порядка действия в них оператора свертки и оператора дифференцирования) с абстрактным сингулярным интегральным ядром, в случае ограниченного оператора при искомой функции исследованы в [14]. В работах [8], [13] исследованы

V.E. FEDOROV, A.V. NAGUMANOVA, A.O. SAGIMBAEVA, CAUCHY PROBLEM AND INVERSE PROBLEM FOR INTEGRO–DIFFERENTIAL EQUATIONS OF GERASIMOV TYPE WITH REGULAR KERNEL.

© Федоров В.Е., Нагуманова А.В., Сагимбаева А.О. 2025.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-20015, <https://rscf.ru/project/24-21-20015/> и поддержано Правительством Челябинской области.

Поступила 5 марта 2025 г.

вопросы однозначной разрешимости начальных задач для интегро-дифференциальных уравнений типа Герасимова и типа Римана — Лиувилля соответственно с неограниченным линейным оператором, порождающим аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов соответствующего линейного однородного уравнения. Линейные обратные задачи для таких уравнений типа Римана — Лиувилля изучены в [9].

В последнее время объектом исследования стали интегро-дифференциальные операторы с регулярным интегральным ядром, в частности, так называемые производные Капуто — Фабрицио [11]. См. также дискуссию по поводу обоснованности отнесения таких интегро-дифференциальных операторов к классу дробных производных [12], [17], [21], [23]. (Отметим, что настоящая работа остается в стороне от этой дискуссии и не использует в отношении таких интегро-дифференциальных операторов термин «дробная производная».) В работе [3] исследуются вопросы однозначной разрешимости прямых и обратных коэффициентных задач для эволюционных уравнений в банаховых пространствах с производной Капуто — Фабрицио типа Герасимова, а в [16] — для уравнений с абстрактным регулярным интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля и ограниченным оператором при искомой функции. Настоящая работа продолжает исследования работ [3], [16] и посвящена изучению прямых и обратных задач для уравнений в банаховых пространствах с абстрактным регулярным интегро-дифференциальным оператором типа Герасимова.

Пусть $\mathcal{Z}, \mathcal{U}$ — банаховы пространства, через $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{Z}$. При $\mathcal{U} = \mathcal{Z}$ это обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0 \quad (1.1)$$

для эволюционного уравнения

$$\int_0^t K(t-s) D^1 z(s) ds = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

где D^1 — оператор первой производной, A — линейный замкнутый оператор, $K \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, $u \in \mathcal{U}$, $g : [0, T] \rightarrow \mathcal{Z}$. Получены условия однозначной разрешимости задачи Коши (1.1) для уравнения (1.2) с известной правой частью. Это позволило изучить обратную коэффициентную задачу для такого уравнения. Условие переопределения в ней имеет вид

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T \quad (1.3)$$

в случае независящего от времени неизвестного коэффициента u , здесь μ — заданная функция ограниченной вариации, $z_T \in \mathcal{Z}$.

Во втором параграфе настоящей работы получены условия однозначной разрешимости задачи Коши для линейного однородного интегро-дифференциального уравнения. Третий параграф содержит аналогичный результат для линейного неоднородного уравнения. В §4 получен критерий корректности линейной обратной задачи (1.1)–(1.3). Полученные общие результаты применяются для исследования прямых и обратных начально-краевых задач для класса уравнений в частных производных с интегро-дифференциальным оператором типа Герасимова и полиномами от оператора Лапласа. Для системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений также изучена задача Коши и обратная задача с постоянным неизвестным элементом. Ядро интегрального оператора в рассмотренной системе является существенно операторнозначным и задает в уравнениях системы линейные комбинации различных интегро-дифференциальных операторов.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$, область определения D_A оператора $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ снабжена нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A \cdot\|_{\mathcal{Z}}$,

$$\rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$$

— резольвентное множество оператора A , а $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — его спектр, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $K(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ при $t > 0$. Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int_0^t K(t-s)z(s)ds := (K * z)(t), \quad t > 0,$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова

$$(D^{K,1}z)(t) := (J^K D^1 z)(t) := \int_0^t K(t-s)D^1 z(s)ds, \quad t > 0,$$

где D^1 — оператор обычной производной первого порядка.

При $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $K \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $z_0 \in D_A$ рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0 \tag{2.1}$$

для уравнения

$$(D^{K,1}z)(t) = Az(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

Решением задачи Коши (2.1), (2.2) назовём функцию $z \in C([0, T]; D_A) \cap W_1^1(0, T; \mathcal{Z})$, удовлетворяющую условию (2.1) и равенству (2.2).

Лемма 2.1. Пусть $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $K \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. Тогда если решение задачи (2.1), (2.2) существует, то $z_0 \in \ker A$.

Доказательство. Для $z \in W_1^1(0, T; \mathcal{Z})$

$$\left\| \int_0^t K(t-s)D^1 z(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \max_{s \in [0, T]} \|K(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \int_0^t \|D^1 z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

По определению решения z имеем

$$Az_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} Az(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} (D^{K,1}z)(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t K(t-s)D^1 z(s)ds = 0.$$

□

Теорема 2.1. Пусть

$$A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z}), \quad K \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z})), \quad (K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}), \quad z_0 \in \ker A.$$

Тогда функция $z(t) \equiv z_0$ является единственным решением задачи Коши (2.1), (2.2).

Доказательство. Легко проверить, что $z(t) \equiv z_0$ является решением задачи (2.1), (2.2). Докажем единственность. Предположим, что z_1 и z_2 — решения задачи (2.1), (2.2), тогда функция $y = z_1 - z_2$ является решением задачи Коши $y(0) = 0$ для уравнения

$$(D^{K,1}y)(t) = K(0)y(t) - K(t)y(0) - (J^{K'}y)(t) = Ay(t).$$

Отсюда $y(t) = (K(0) - A)^{-1}(J^{K'}y)(t)$.

Рассмотрим оператор

$$By(t) = (K(0) - A)^{-1}(J^{K'}y)(t)$$

в пространстве $L_1(0, T_1; \mathcal{Z})$ при некотором $T_1 \in (0, T]$. Если $K' \equiv 0$, то

$$y(t) = (K(0) - A)^{-1}0 \equiv 0.$$

Если $\|K'\|_{C([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))} \neq 0$, для $q \in (0, 1)$ возьмем

$$T_1 = q\|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{-1}\|K'\|_{C([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))}^{-1}$$

и получим

$$\begin{aligned} \|By\|_{L_1(0, T_1; \mathcal{Z})} &\leq \|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \int_0^{T_1} \left\| \int_0^t K'(t-s)y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} dt \\ &\leq T_1 \|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|K'\|_{C([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))} \|y\|_{L_1(0, T_1; \mathcal{Z})} = q\|y\|_{L_1(0, T_1; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор B является сжимающим в пространстве $L_1(0, T_1; \mathcal{Z})$, поэтому единственным решением уравнения $y = By$ в этом пространстве является функция $y = 0$ п. в. на $(0, T_1)$.

Если $T_1 < T$, рассмотрим пространство

$$L_1^{T_1}(0, 2T_1; \mathcal{Z}) := \{y \in L_1(0, 2T_1; \mathcal{Z}) : y(t) = 0 \text{ п. в. на } (0, T_1)\}.$$

Тогда

$$\|B\|_{\mathcal{L}(L_1^{T_1}(0, 2T_1; \mathcal{Z}))} \leq (2T_1 - T_1)\|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|K'\|_{C([0, 2T_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))} = q < 1,$$

отсюда следует единственность тривиального решения уравнения $y = By$ на $(0, 2T_1)$. Если $2T_1 < T$, возьмём пространство

$$L_1^{2T_1}(0, 3T_1; \mathcal{Z}) := \{y \in L_1(0, 3T_1; \mathcal{Z}) : y(t) = 0 \text{ п. в. на } (0, 2T_1)\}$$

и докажем единственность тривиального решения уравнения $y = By$ на отрезке $[0, 3T_1]$. Повторяя рассуждения, за конечное число шагов полностью покроем отрезок $[0, T]$. Значит решение задачи (2.1), (2.2) единственно на $[0, T]$. $\square$

3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $K \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, $z_0 \in D_A$. Рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0 \tag{3.1}$$

для линейного неоднородного уравнения

$$(D^{K,1}z)(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Решением задачи Коши (3.1), (3.2) назовём функцию $z \in C([0, T]; D_A) \cap W_1^1(0, T; \mathcal{Z})$, удовлетворяющую условию (3.1) и равенству (3.2).

Аналогично лемме 2.1 получаем

Лемма 3.1. *Если решение задачи (3.1), (3.2) существует, то $Az_0 + f(0) = 0$.*

Для функции $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$ обозначим её преобразование Лапласа через $\widehat{h}$.

Далее будем предполагать выполнение следующего условия.

($\widehat{K}$) Для функции $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ существует преобразование Лапласа $\widehat{K}(\lambda)$, продолжаемое до однозначной аналитической функцией на множестве

$$\Omega_{a_K} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > a_K\}.$$

Лемма 3.2. Пусть $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $(K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, выполняется условие $(\widehat{K})$. Тогда при некотором $r > a_K$ определена и аналитична оператор-функция

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

Доказательство. По теореме о начальном значении оригинала [19] $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \widehat{K}(\lambda) = K(0)$ в $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Поскольку $(K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, с учетом условия $(\widehat{K})$ это означает, что существуют операторы

$$\begin{aligned} (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} &= (K(0) - A + \lambda \widehat{K}(\lambda) - K(0))^{-1} \\ &= (I + (K(0) - A)^{-1}(\lambda \widehat{K}(\lambda) - K(0)))^{-1} (K(0) - A)^{-1} \end{aligned}$$

для достаточно больших $|\lambda| > r_0 \geq a_K$, для которых

$$\|(\lambda \widehat{K}(\lambda) - K(0))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < \|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{-1}.$$

При этом существует такое $C > 0$, что при всех $|\lambda| > r_0 \geq a_K$

$$\|(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C.$$

Также заметим, что

$$\begin{aligned} (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} &= I + (\lambda \widehat{K}(\lambda) - \mu \widehat{K}(\mu))(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1}, \\ (\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} &= (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}(\lambda \widehat{K}(\lambda) - \mu \widehat{K}(\mu))(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1}, \\ \|(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \\ &\leq C \|\lambda \widehat{K}(\lambda) - \mu \widehat{K}(\mu)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \mu. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{d}{d\mu}(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} = -(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} \left[\frac{d}{d\mu}[\mu \widehat{K}(\mu)] \right] (\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1}.$$

Следовательно, подынтегральное выражение в (3.3) аналитично в Ω_{r_0} , и поскольку контур $\{|\lambda| = r > r_0\}$ ограничен, функция $Z(t)$ аналитична по $t \in \mathbb{C}$. $\square$

Теорема 3.1. Пусть

$$A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z}), \quad K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z})), \quad (K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}),$$

выполняется условие $(\widehat{K})$,

$$f \in W_1^1(0, T; \mathcal{Z}), \quad Az_0 + f(0) = 0.$$

Тогда функция

$$z(t) = z_0 + (K(0) - A)^{-1}(f(t) - f(0)) - \int_0^t Z(s)f(0)ds + \int_0^t Z(t-s)f(s)ds, \quad (3.4)$$

является единственным решением задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Очевидно, что выполняется начальное условие $z(0) = z_0$, при этом

$$\begin{aligned} D^1 z(t) &= (K(0) - A)^{-1} D^1 f(t) - Z(t)f(0) + Z(0)f(t) + \int_0^t D^1 Z(t-s)f(s)ds \in L_1(0, T; \mathcal{Z}), \\ D^{K,1} z(t) &= (K(0) - A)^{-1} D^{K,1} f(t) - J^K[Z(t)f(0)] + J^K[Z(0)f(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + J^K \int_0^t D^1 Z(t-s) f(s) ds \in C([0, T]; \mathcal{Z}), \\
& A(K(0) - A)^{-1} = K(0)(K(0) - A)^{-1} - I \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}), \\
& AZ(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} A(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda \widehat{K}(\lambda) (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z})), \\
& Az(t) = Az_0 + A(K(0) - A)^{-1} (f(t) - f(0)) - \int_0^t AZ(s) f(0) ds \\
& + \int_0^t AZ(t-s) f(s) ds \in C([0, T]; \mathcal{Z}).
\end{aligned}$$

Для $\operatorname{Re} \mu > r$ по интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned}
\widehat{Z}(\mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\mu - \lambda} (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\frac{1}{r}} \frac{1}{\mu - \frac{1}{\eta}} \left(\frac{1}{\eta} \widehat{K} \left(\frac{1}{\eta} \right) - A \right)^{-1} \frac{d\eta}{\eta^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\frac{1}{r}} \frac{1}{\mu \eta \left(\eta - \frac{1}{\mu} \right)} \left(\frac{1}{\eta} \widehat{K} \left(\frac{1}{\eta} \right) - A \right)^{-1} d\eta = (\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (K(0) - A)^{-1}.
\end{aligned}$$

Доопределим функцию f непрерывным ограниченным образом при $t > T$ и обозначим $z_f := Z * f$, тогда

$$\widehat{z}_f(\mu) = \widehat{Z}(\mu) \widehat{f}(\mu) = [(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (K(0) - A)^{-1}] \widehat{f}(\mu).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\widehat{z}(\mu) &= \frac{z_0}{\mu} + (K(0) - A)^{-1} \left(\widehat{f}(\mu) - \frac{1}{\mu} f(0) \right) - \frac{1}{\mu} [(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (K(0) - A)^{-1}] f(0) + \\
&+ [(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (K(0) - A)^{-1}] \widehat{f}(\mu), \\
\widehat{D^{K,1} z}(\mu) - \widehat{A z}(\mu) &= (\mu \widehat{K}(\mu) - A) \widehat{z}(\mu) - \widehat{K}(\mu) z_0 = -A \frac{z_0}{\mu} - \frac{1}{\mu} f(0) + \widehat{f}(\mu) = \widehat{f}(\mu).
\end{aligned}$$

Применив обратное преобразование Лапласа, получаем (3.2).

Единственность решения доказывается, как при доказательстве теоремы 2.1. $\square$

4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Пусть $\mathcal{Z}, \mathcal{U}$ — банаховы пространства. Рассмотрим обратную задачу для эволюционного уравнения

$$(D^{K,1} z)(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in [0, T], \quad (4.1)$$

где $D^{K,1}$ — интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова,

$$K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z})), \quad A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z}), \quad B \in W_1^1(0, T; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})), \quad g \in W_1^1(0, T; \mathcal{Z}),$$

с начальным условием

$$z(0) = z_0 \quad (4.2)$$

и условием переопределения

$$\int_0^T z(t) d\nu(t) = z_T \in D_A, \quad (4.3)$$

где функция $\nu : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, коротко $\nu \in BV((0, T]; \mathbb{R})$. Здесь учитывается тот факт, что $Az \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, поэтому

$$A \int_0^T z(t) d\nu(t) = \int_0^T Az(t) d\nu(t) \quad \text{и} \quad \int_0^T z(t) d\nu(t) \in D_A.$$

При этом дополнительный неизвестный элемент u в уравнении (4.1) требуется найти с использованием дополнительного условия (4.3).

Назовем элемент $u \in \mathcal{U}$ решением задачи (4.1)–(4.3), если при этом u существует решение z задачи Коши (4.1), (4.2), которое удовлетворяет условию (4.3). Задачу (4.1)–(4.3) назовем корректной, если для любых $z_0, z_T \in D_A, g \in W_1^1(0, T; \mathcal{Z})$ существует единственное решение $u \in \mathcal{U}$ задачи, при этом оно удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C (\|z_0\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})}), \quad (4.4)$$

где $C > 0$ не зависит от z_0, z_T, g .

В силу представления решения (3.4) в случае существования решения задачи Коши (4.1), (4.2) элемент u является решением задачи (4.1)–(4.3) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнению

$$\Psi u = \psi, \quad (4.5)$$

где Ψ и ψ определены формулами

$$\begin{aligned} \Psi &:= \int_0^T (K(0) - A)^{-1} (B(t) - B(0)) d\nu(t) - \int_0^T \int_0^t Z(s) B(0) ds d\nu(t) \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t Z(t-s) B(s) ds d\nu(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}) \\ \psi &:= z_T - \int_0^T d\nu(t) z_0 - \int_0^T (K(0) - A)^{-1} (g(t) - g(0)) d\nu(t) + \int_0^T \int_0^t Z(s) g(0) ds d\nu(t) \\ &\quad - \int_0^T \int_0^t Z(t-s) g(s) ds d\nu(t) \in \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Теорема 4.1. Пусть

$$A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z}), \quad K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z})), \quad (K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}),$$

выполняется условие $(\widehat{K})$,

$$\begin{aligned} B &\in W_1^1(0, T; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})), & B(0) &= 0, & g &\in W_1^1(0, T; \mathcal{Z}), \\ z_0, z_T &\in D_A, & Az_0 + g(0) &= 0, & \nu &\in BV((0, T]; \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Тогда обратная задача (4.1)–(4.3) корректна в том и только в том случае, когда существует обратный оператор $\Psi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$. При этом решение задачи имеет вид $u = \Psi^{-1}\psi$.

Доказательство. По теореме 3.1, существует решение задачи Коши (4.1), (4.2) при известном элементе $u \in \mathcal{U}$ и это решение имеет вид

$$z(t) = z_0 + (K(0) - A)^{-1}(B(t)u + g(t) - B(0)u - g(0)) - \int_0^t Z(s)(B(0)u + g(0))ds \\ + \int_0^t Z(t-s)(B(s)u + g(s))ds.$$

Подставляя это решение в условие переопределения (4.3), получаем равенство (4.5), из которого следует требуемое. При этом в силу равенства $B(0) = 0$ имеем

$$\Psi := \int_0^T (K(0) - A)^{-1}B(t)d\nu(t) + \int_0^T \int_0^t Z(t-s)B(s)dsd\nu(t), \\ \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \|\Psi^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z};\mathcal{U})}\|\psi\|_{\mathcal{Z}} \leq \|\Psi^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z};\mathcal{U})}(\|z_T\|_{\mathcal{Z}} + V_0^T(\nu)\|z_0\|_{\mathcal{Z}} \\ + 2TV_0^T(\nu)\|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|g\|_{C([0,T];\mathcal{Z})} + 2T^2V_0^T(\nu)\|Z\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}\|g\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}) \\ \leq C(\|z_0\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C([0,T];\mathcal{Z})})$$

при

$$C = \max\{1, V_0^T(\nu), (2TV_0^T(\nu)\|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + 2T^2V_0^T(\nu)\|Z\|_{C([0,T];\mathcal{Z})})\} > 0.$$

Здесь $V_0^T(\nu)$ — вариация функции ν на полуинтервале $(0, T]$. $\square$

5. ОДИН КЛАСС НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Пусть

$$P_n(\lambda) = \sum_{j=0}^n c_j \lambda^j, \quad Q_n(\lambda) = \sum_{j=0}^n d_j \lambda^j,$$

$c_j, d_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{N} \cup \{0\}$, $d_n \neq 0$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ является ограниченной областью с гладкой границей $\partial\Omega$, в ней задан оператор Лапласа

$$\Delta w(\xi) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_j^2}(\xi)$$

с областью определения $D_\Delta = H_0^2(\Omega) := \{w \in H^2(\Omega) : w(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega\}$. Как известно, спектр $\sigma(\Delta)$ оператора Δ является отрицательным, дискретным, конечнократным и сгущается только на $-\infty$. Пусть $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Δ , занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учётом их кратности.

Рассмотрим обратную задачу с независимым от времени элементом u

$$v(\xi, s) = v_0(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{5.1}$$

$$\Delta^k v(\xi, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \tag{5.2}$$

$$P_n(\Delta) \int_0^t a E_{\alpha,1}^\beta(b(t-s)^\alpha) \frac{\partial v}{\partial s}(\xi, s) ds \tag{5.3}$$

$$= Q_n(\Delta)v(\xi, t) + c(t)u(\xi) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times [0, T],$$

$$v(\xi, T) = v_T(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{5.4}$$

где функции $v_0, v_T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ заданы.

В уравнении (5.3) ядром интегро-дифференциального оператора является обобщенная функция Миттаг-Леффлера [18]

$$K_{\alpha, \beta}(t) := aE_{\alpha, 1}^{\beta}(bt^{\alpha})I = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k b^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} I, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N},$$

где $(\beta)_k$ — символ Похгаммера [18]. Ее образ Лапласа

$$\widehat{K}_{\alpha, \beta}(\lambda) = \frac{a\lambda^{\alpha\beta-1}}{(\lambda^{\alpha} - b)^{\beta}} I$$

является однозначной аналитической функцией на множестве

$$\Omega_{|b|^{\frac{1}{\alpha}}} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > |b|^{\frac{1}{\alpha}}\},$$

поэтому для нее выполняется условие $(\widehat{K})$ при $a_K = |b|^{\frac{1}{\alpha}}$. Заметим, что при $\alpha = \beta = 1$, $K_{1,1}(t) = ae^{bt}$ и интегро-дифференциальный оператор $D^{K,1}$ представляет собой производную Капуто — Фабрицио [11], а при $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\beta = 1$, $K_{\alpha,1}(t) = aE_{\alpha}(bt^{\alpha})$ — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера [18] и $D^{K,1}$ — так называемая производная Атанганы — Балеану.

Положим

$$n_0 := \max\{j \in \{0, 1, \dots, n\} : c_j \neq 0\},$$

$$\mathcal{Z} = \{w \in H^{2rn_0}(\Omega) : \Delta^k w(\xi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad \xi \in \partial\Omega\}.$$

Оператор $P_n(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; L_2(\Omega))$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $P_n(\lambda_k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В этом случае определим на банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ линейный оператор $A = P_n(\Delta)^{-1}Q_n(\Delta)$, который ограничен в $\mathcal{Z}$, если $n_0 = n$, т. е. $c_n \neq 0$. Если же $c_n = 0$ и $n_0 < n$, имеем $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ с областью определения

$$D_A = \{w \in H^{2rn}(\Omega) : \Delta^k w(\xi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad \xi \in \partial\Omega\}.$$

Задача (5.1)–(5.3) редуцирована к задаче (4.1), (4.2).

Обозначим

$$\zeta_k(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\frac{a\lambda^{\alpha\beta}}{(\lambda^{\alpha}-b)^{\beta}} - \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}, \quad t \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 5.1. Пусть

$$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad P_n(\lambda_k) \neq 0, \quad Q_n(\lambda_k)/P_n(\lambda_k) \neq a \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N},$$

$$v_0 \in D_A, \quad u \in L_2(\Omega), \quad c \in W_1^1(0, T; \mathbb{R}), \quad h \in W_1^1(0, T; L_2(\Omega)),$$

$$Q_n(\Delta)v_0(\xi) + c(0)u(\xi) + h(\xi, 0) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Тогда задача (5.1)–(5.3) имеет единственное решение

$$v(\xi, t) = v_0(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle (c(t) - c(0))u(\cdot) + h(\cdot, t) - h(\cdot, 0), \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)}$$

$$- \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k(s) \langle c(0)u(\cdot) + h(\cdot, 0), \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{P_n(\lambda_k)} ds$$

$$+ \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k(t-s) \langle c(s)u(\cdot) + h(\cdot, s), \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{P_n(\lambda_k)} ds.$$

Доказательство. Спектр оператора $A = P_n(\Delta)^{-1}Q_n(\Delta)$ есть множество

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}, \quad k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Следовательно, неравенство

$$\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} \neq a \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}$$

означает существование обратного оператора $(K(0) - A)^{-1} = (aI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Имеем при достаточно большом $r > 0$

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi) e^{\lambda t} d\lambda}{\frac{a\lambda^{\alpha\beta}}{(\lambda^{\alpha}-b)^{\beta}} - \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k(t) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Возьмём в теореме 3.1 $f(t) = P_n(\Delta)^{-1}(c(t)u(\cdot) + h(\cdot, t))$ и получим требуемое утверждение. $\square$

Для обратной задачи (5.1)–(5.4) при неизвестном элементе u в случае $c(0) = 0$ получаем оператор и вектор соответственно

$$\begin{aligned} \Psi &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(T) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} + \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k(t-s)c(s) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{P_n(\lambda_k)} ds, \\ \psi &:= v_T - v_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h(\cdot, T) - h(\cdot, 0)) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} + \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k(s)h(\cdot, 0) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{P_n(\lambda_k)} ds \\ &\quad - \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k(t-s)h(\cdot, s) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{P_n(\lambda_k)} ds. \end{aligned}$$

Теорема 5.2. Пусть

$$\begin{aligned} a, b &\in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad P_n(\lambda_k) \neq 0, \quad Q_n(\lambda_k)/P_n(\lambda_k) \neq a \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}, \\ c &\in W_1^1(0, T; \mathbb{R}), \quad c(0) = 0, \quad v_0, v_T \in D_A, \quad h \in W_1^1(0, T; L_2(\Omega)), \\ Q_n(\Delta)v_0(\xi) + h(\xi, 0) &\equiv 0 \quad \text{в } \Omega. \end{aligned}$$

Тогда обратная задача (5.1)–(5.4) корректна если и только если существует такое $d > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{c(T)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} + \int_0^T \frac{\zeta_k(t-s)c(s)}{P_n(\lambda_k)} ds \right| \geq d.$$

При этом $u = \Psi^{-1}\psi$.

Доказательство. Здесь ν — функция единичного скачка в точке $t = T$. Возьмём пространство $\mathcal{U} = L_2(\Omega)$ и оператор-функцию

$$B(t) = c(t)P_n(\Delta)^{-1} \in W_1^1(0, T; \mathcal{L}(L_2(\Omega); \mathcal{Z})).$$

Таким образом, задача (5.1)–(5.4) редуцирована к обратной задаче (4.1)–(4.3). Из условий данной теоремы следует, что

$$\|\Psi^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z}; L_2(\Omega))} \leq d^{-1}.$$

$\square$

6. СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши

$$z_j(0) = z_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.1)$$

для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^n D^{k_{ij},1} z_j(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t) u_k + h_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, T], \quad (6.2)$$

где

$$a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad b_{ik} : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}, \quad u_k \in \mathbb{C}, \quad h_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}, \quad k_{ij}(t) := a_{ij} E_{\alpha_{ij},1}^{\beta_{ij}}(b_{ij} t^\alpha), \\ a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{N}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Возьмем

$$\mathcal{Z} = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{U} = \mathbb{R}^m, \quad z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T : [0, T] \rightarrow \mathcal{Z}, \\ g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))^T : [0, T] \rightarrow \mathcal{Z}, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \mathcal{U}.$$

Действия операторов $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $K(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ при $t \geq 0$ и $B(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$ при $t \in [0, T]$ задаются одноименными матрицами размера $n \times n$, $n \times n$ и $n \times m$ соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad K(t) = \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & \dots & k_{1n}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & \dots & k_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1}(t) & k_{n2}(t) & \dots & k_{nn}(t) \end{pmatrix}, \\ B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \dots & b_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\hat{K}(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}\lambda^{\alpha_{11}\beta_{11}-1}}{(\lambda^{\alpha_{11}}-b_{11})^{\beta_{11}}} & \frac{a_{12}\lambda^{\alpha_{12}\beta_{12}-1}}{(\lambda^{\alpha_{12}}-b_{12})^{\beta_{12}}} & \dots & \frac{a_{1n}\lambda^{\alpha_{1n}\beta_{1n}-1}}{(\lambda^{\alpha_{1n}}-b_{1n})^{\beta_{1n}}} \\ \frac{a_{21}\lambda^{\alpha_{21}\beta_{21}-1}}{(\lambda^{\alpha_{21}}-b_{21})^{\beta_{21}}} & \frac{a_{22}\lambda^{\alpha_{22}\beta_{22}-1}}{(\lambda^{\alpha_{22}}-b_{22})^{\beta_{22}}} & \dots & \frac{a_{2n}\lambda^{\alpha_{2n}\beta_{2n}-1}}{(\lambda^{\alpha_{2n}}-b_{2n})^{\beta_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}\lambda^{\alpha_{n1}\beta_{n1}-1}}{(\lambda^{\alpha_{n1}}-b_{n1})^{\beta_{n1}}} & \frac{a_{n2}\lambda^{\alpha_{n2}\beta_{n2}-1}}{(\lambda^{\alpha_{n2}}-b_{n2})^{\beta_{n2}}} & \dots & \frac{a_{nn}\lambda^{\alpha_{nn}\beta_{nn}-1}}{(\lambda^{\alpha_{nn}}-b_{nn})^{\beta_{nn}}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получена прямая задача (4.1), (4.2).

Теорема 6.1. Пусть

$$\det(K(0) - A) \neq 0, \quad \det \hat{K} \neq 0, \quad b_{ik} \in W_1^1(0, T; \mathbb{C}), \quad u_k \in \mathbb{C}, \\ h_i \in W_1^1(0, T; \mathbb{C}), \quad z_{0i} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} z_{0j} + \sum_{k=1}^m b_{ik}(0) u_k + h_i(0) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда существует единственное решение задачи (6.1), (6.2).

Доказательство. Заметим, что функция $\det \hat{K}$ является отношением двух многочленов и поэтому имеет конечное количество полюсов, а значит, выполняется условие $(\hat{K})$. По теореме 3.1 получим требуемое. $\square$

Заметим, что решение задачи (6.1), (6.2) имеет вид (3.4) при $f(t) = B(t)u + h(t)$ (в векторной записи).

В предположении, что u_k , $k = 1, 2, \dots, m$, неизвестны, рассмотрим условия переопределения

$$z_j(T) = z_{Tj}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

Теорема 6.2. Пусть

$$\begin{aligned} \det(K(0) - A) &\neq 0, & \det \widehat{K} &\neq 0, & b_{ik} &\in W_1^1(0, T; \mathbb{C}), & b_{ik}(0) &= 0, \\ h_i &\in W_1^1(0, T; \mathbb{C}), & z_{0i}, z_{Ti} &\in \mathbb{C}, & \sum_{j=1}^n a_{ij} z_{0j} + h_i(0) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, n, & k &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Тогда обратная задача (6.1)–(6.3) корректна в том и только в том случае, когда

$$\det \left((K(0) - A)^{-1} B(T) + \int_0^T Z(T-s) B(s) ds \right) \neq 0.$$

При этом решение задачи имеет вид (в векторной записи)

$$\begin{aligned} u &= \left((K(0) - A)^{-1} B(T) + \int_0^T Z(T-s) B(s) ds \right)^{-1} \\ &\cdot \left(z_T - z_0 - (K(0) - A)^{-1} (g(T) - g(0)) + \int_0^T Z(s) g(0) ds - \int_0^T Z(T-s) g(s) ds \right), \end{aligned}$$

где матрицы $Z(t)$ имеют вид (3.3).

Доказательство. По теореме 4.1 получаем требуемое. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р.Р. Ашуров, Ю.Э. Файзиев. Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении // Мат. заметки **110**:6, 824–836 (2021).
2. А.В. Глушак. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. заметки **87**:5, 684–693 (2010).
3. А.В. Нагуманова, В.Е. Федоров. Прямые и обратные задачи для линейных уравнений с производной Капуто — Фабрицио и ограниченным оператором // Челяб. физ.-матем. журн. **9**:3, 389–406 (2024).
4. А.М. Нахушев. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003.
5. А.В. Псху. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005.
6. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987.
7. В.В. Учайкин. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок. 2008.
8. В.Е. Федоров, А.Д. Годова. интегро-дифференциальные уравнения типа Герасимова с секториальными операторами // Тр. Инст. Мат. Мех. (Екатеринбург) **30**:2, 243–258 (2024).
9. В.Е. Федоров, А.Д. Годова. Линейные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с ограниченным оператором // Соврем. Мат., Фундам. Направл. **70**:4, 679–690 (2024).
10. В.Е. Федоров, М. Костич. Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова — Капуто // Диффер. уравн. **57**:1, 100–113 (2020).
11. M. Caputo, M. Fabrizio. A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progress in Fractional Differentiation and Applications **1**:2, 1–13 (2015).

12. K. Diethelm, R. Garrappa, A. Giusti, M. Stynes. *Why fractional derivatives with nonsingular kernels should not be used* // Fract. Calc. Appl. Anal. **23**:3, 610–634 (2020).
13. V.E. Fedorov, A.D. Godova. *Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving family of operators* // J. Math. Sci. **283**:2, 317–334 (2024).
14. V.E. Fedorov, A.D. Godova, B.T. Kien. *Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces* // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. 2(106), 93–107 (2022).
15. V.E. Fedorov, N.D. Ivanova. *Identification problem for a degenerate evolution equation with overdetermination on the solution semigroup kernel* // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S **9**:3, 687–696 (2016).
16. V.E. Fedorov, A.V. Nagumanova. *Direct and inverse problems for evolution equations with regular integrodifferential operators* // J. Math. Sci. **286**:2, 278–289 (2024).
17. A. Giusti. *A comment on some new definitions of fractional derivative* // Nonlinear Dyn. **93**:3, 1757–1763 (2018).
18. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier Science Publ., Amsterdam (2006).
19. W.R. LePage. *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. Dover Publ., New York (1961).
20. D.G. Orlovsky. *Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann – Liouville fractional derivative in a Hilbert space* // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика **8**:1, 55–63 (2015).
21. M. Stynes. *Fractional-order derivatives defined by continuous kernels are too restrictive* // Appl. Math. Lett. **85**, 22–26 (2018).
22. V.E. Tarasov. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. Springer, New York (2011).
23. V.E. Tarasov. *No nonlocality. No fractional derivative* // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **62**, 157–163 (2018).

Владимир Евгеньевич Федоров,
 Челябинский государственный университет,
 ул. Братьев Кашириных, 129,
 454001, г. Челябинск, Россия
 E-mail: kar@csu.ru

Анна Викторовна Нагуманова,
 Челябинский государственный университет,
 ул. Братьев Кашириных, 129,
 454001, г. Челябинск, Россия
 E-mail: urazaeva_anna@mail.ru

Ангелина Олеговна Сагимбаева,
 Челябинский государственный университет,
 ул. Братьев Кашириных, 129,
 454001, г. Челябинск, Россия
 E-mail: angsag@mail.ru