УДК 519.217.4

BI–НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ ДИНАМИКИ

А.В. УТКИН

Аннотация. Статья посвящена аспектам вывода уравнения динамики квантовой системы в процессе стохастической динамики. Изучаются условия, при которых последовательность случайных изменений волновой функции может аппроксимировать случайный диффузионный процесс в гильбертовом пространстве. Случайное изменение $|\psi_0\rangle \mapsto G_{t_N}\dots G_{t_1}|\psi_0\rangle = |\psi_{t_N}\rangle$ ассоциируется с преобразованием распределения вектора $|\psi\rangle$, а также с изменением его характеристического функционала $\varphi(v) = \mathbb{E}\exp(i\,\mathrm{Re}\langle v|\psi\rangle)$. Для непрерывного случайного блуждания исследуются вопросы аппроксимации марковской полугруппы марковскими операторами дискретного случайного блуждания. Уделено особое внимание таким случаям, когда производная случайного оператора $F'(0)$ представляет собой неограниченный оператор. Однако рассмотрение ограничено случаем, когда марковские операторы случайных блужданий с операторами G_t коммутируют между собой.

Характеристический функционал преобразуется марковским оператором сопряженного процесса, и в отличие от динамики волновой функции, имеет детерминированный характер, что позволяет опереться на развитую теорию полугрупп в банаховых пространствах. Самые показательные примеры — процесс непрерывного измерения, то есть измерения траекторий некоторой наблюдаемой, и случайное управление.

Ключевые слова: bi–непрерывная полугруппа, случайная операторнозначная функция, марковский оператор.

Mathematics Subject Classification: 81P20, 60J60, 47D99

1. Введение

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, на котором действует семейство случайных операторов $\{G_t\}$. При каждом $t \in [0,T]$, $\omega \mapsto G_t(\omega)$ представляет собой измеримое отображение из вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ в пространство ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ на $\mathcal{H}$. Будем считать, что в некотором смысле, который будет разъяснен далее, при $t \to 0$ операторы G_t стремятся к тождественному оператору I. Построим модель непрерывного процесса случайного блуждания на гильбертовом пространстве, используя идею второго замечательного предела. Разобъем отрезок времени $[0,t]$ на N равных участков, и на каждом из них определим случайное изменение векторов $|\psi\rangle \mapsto G_{\frac{t}{N}}|\psi\rangle$. Скажем, что общее изменение на отрезке $[0,t]$ будет результатом композиции независимых преобразований на каждом отрезке в хронологическом порядке, то есть вектор $|\psi\rangle$ преобразуется по закону

$$|\psi\rangle \mapsto G_N \dots G_1|\psi\rangle, \tag{1.1}$$

A.V. Utkin, Bi–continuous semigroups of stochastic quantum dynamics.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00145, https://rscf.ru/project/24-11-00145/.

Поступила 9 мая 2024 г.

где случайные операторы $G_N, \ldots, G_1$ независимы и одинаково распределены в соответствии с распределением $G_{\frac{t}{N}}$. Спрашивается, можно ли в пределе $N \to \infty$ аппроксимировать непрерывную во времени стохастическую динамику. Решение ведется в соответствии с подходом марковских полугрупп. Описанный выше дискретный стохастический процесс является марковским и для каждого $t \in [0, T]$ ему сопоставлена система марковских операторов $\{\mathbf{F}[G_t]^k, 1 \leqslant k \leqslant N\}$. Оператор $\mathbf{F}[G_t]$ действует на пространстве ограниченных борелевских функций $B_B(\mathcal{H})$ на гильбертовом пространстве, и изучается вопрос, при каких условиях для всех $t \geqslant 0$ некоторая марковская полугруппа $\{\mathbf{T}_t\}$ приближается операторами $\{\mathbf{F}\left[G_{\frac{t}{N}}\right]^N\}$ при $N \to \infty$. Все полученные ниже результаты справедливы при предположении, что выполнены условия коммутации $\Big[\mathbf{F}[G_t], \mathbf{F}[G_s]\Big] = 0$ для любых $0 \leqslant s,\ t \leqslant T$. Следует отметить, что хоть условие является достаточно жестким, из этого не следует, что соответствующие случайные операторы $G_t(\omega)$ и $G_s(\omega)$ почти наверно коммутируют (см. пример 3.1).

Основными результатами являются теорема 5.1, устанавливающая условия приближения $\mathbf{T}_t$ итерациями Чернова $\mathbf{F}\left[G_{\frac{t}{N}}\right]^N$ на некотором замкнутом подпространстве $F_G \subset B_B(\mathcal{H})$, и теорема 5.2, позволяющая продолжить предельную полугруппу на $B_B(\mathcal{H})$ до марковской полугруппы.

Работа ведется со следующими функциональными пространствами: $B_B(\mathcal{H})$ — пространство борелевских (относительно топологии нормы или слабой топологии — это одно и то же) ограниченных функций на гильбертовом пространстве с sup–нормой: $\|f\| = \sup\limits_{v \in \mathcal{H}} |f(v)|$, $C_B(\mathcal{H})$ — пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathcal{H}$ с sup–нормой и дополнительной топологией τ равномерной сходимости на ограниченных множествах, $C_{BWS}(\mathcal{H})$ — пространство ограниченных слабо секвенциально непрерывных функций. Далее, для данного семейства операторов $\mathbf{F}[G_t]$, для которого $\Big[\mathbf{F}[G_t], \mathbf{F}[G_s]\Big] = 0$, определяется подпространство $\mathcal{L}_G \subset C_B(\mathcal{H})$ тех функций f, для которых имеет место равномерно ограниченная по норме и равномерная на шарах в $\mathcal{H}$ сходимость дифференциальных отношений $\dfrac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t}$. Пространство F_G определяется как множество тех функций, которые равномерно на шарах приближаются равномерно ограниченной последовательностью функций из $\mathcal{L}_G$. Тогда при условии, что для всех $r > 0$, $\varepsilon > 0$ существует $R > 0$, для которого

$$\sup\Big\{\mathbb{P}\Big(\|G_t^{\amalg m} v\| > R\Big), \quad \|v\| \leqslant r,\ t \in [0, T],\ m \in \mathbb{N}\Big\} < \varepsilon, \tag{1.2}$$

теорема 5.1 утверждает, что $\forall f \in F_G$ выполнено $\tau \lim\limits_{N \to \infty} \mathbf{F}\left[G_{\frac{t}{N}}\right]^N f = \mathbf{T}_t f$ для некоторой полугруппы $\mathbf{T}_t$ равномерно по t на отрезках луча $[0, +\infty)$. Символом $G_t^{\amalg m}$ обозначается произведение независимых одинаково распределенных случайных операторов G_t в количестве m штук.

Оказывается, что при предположении, что $C_{BWS}(\mathcal{H}) \subset F_G$, полугруппу $\mathbf{T}_t$ можно расширить с F_G до марковской полугруппы $\mathbf{Q}_t$ на $B_B(\mathcal{H})$ (теорема 5.2), и $\forall f \in C_B(\mathcal{H})$, $v \in \mathcal{H}$, $t \geqslant 0$ будет иметь место $\lim\limits_{N \to \infty} \mathbf{F}\left[G_{\frac{t}{N}}\right]^N f(v) = \mathbf{Q}_t f(v)$. Тем не менее, проверить включение $C_{BWS}(\mathcal{H}) \subset F_G$ бывает не тривиально. Интересно, что если $\mathbf{F}[G_t]$ уже является полугруппой на $C_{BWS}(\mathcal{H})$, то условий

$$\forall \varepsilon > 0, r > 0 \quad \exists R > 0, \text{ для которого } \sup_{t \in [0,T]} \sup_{\|v\| \leqslant r} \mathbb{P}\Big(\|G_t v\| > R\Big) < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, w \in \mathcal{H} \quad \lim_{t \to 0} \mathbb{P}\Big(\|(G_t^* - G_{t_0}^*)w\| > \varepsilon\Big) = 0$$

достаточно, чтобы $\mathbf{F}[G_t]$ была bi–непрерывной полугруппой (теорема 4.1).

Существуют полугруппы, представимые в явном виде (предложение 4.3). Основное внимание уделено случаю диффузионных процессов, генератор которых — дифференциальный оператор второго порядка. Если гомоморфизм $\Upsilon : \mathcal{E} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ определен на подалгебре $\mathcal{E} \subset C_B(\mathbb{R})$, содержащей функции вида $\{g[a,b] := e^{-ax^2+bx}\}$, то семейство $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ для $G_t(y) = \Upsilon(g[at,\ yb\sqrt{t}])$ для некоторых $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$ относительно меры $d\mathbb{P}(y) = \dfrac{e^{-y^2}dy}{\sqrt{\pi}}$ образует полугруппу на $B_B(\mathcal{H})$. Например, для самосопряженного оператора C семейство $\{\exp(yb\sqrt{t}C - atC^2)\}$ определяет полугруппу. На самом деле при достаточно естественных предположениях эта полугруппа является марковской полугруппой, ограничение которой на $C_{BWS}(\mathcal{H})$ является bi–непрерывным. Генератором этой полугруппы выступает оператор

$$f(v) \mapsto -\left(a - \frac{b^2}{4}\right)\ df(v)[Cv] + \frac{b^2}{4}d^2f(v)[Cv, Cv], \tag{1.3}$$

область определения которого имеет bi–плотное замыкание, содержащее пространство $C_{BWS}(\mathcal{H})$.

Предложенный метод позволяет строить более сложные полугруппы, не выписывая выражения для операторов в явном виде. Например, возникает вопрос, удовлетворяет ли условиям черновской аппроксимации операторнозначная функция, получающаяся усреднением предложенных выше полугрупп $\{\mathbf{F}[G_t]\}$, $G_t(y,\alpha) = \exp(yb\sqrt{t}C_\alpha - atC_\alpha^2)$ со случайным самосопряженным оператором $C = \{C_\alpha\}$. Более точно, пусть $d\nu(\alpha)$ — вероятностная мера, и

$$(\mathbf{F}_t f)(v) = \int d\nu(\alpha) \int \frac{dy}{\sqrt{\pi/\gamma}} e^{-\gamma y^2}\ f\left(e^{yb_\alpha\sqrt{t}C_\alpha - a_\alpha t^2 C_\alpha^2}v\right). \tag{1.4}$$

Однако, в общем случае ответить на этот вопрос непросто. Введем операторы

$$A_1 : \mathscr{D}(A_1) \to \mathcal{H},\ \ A_2 : \mathscr{D}(A_2) \to \mathcal{H}^{\otimes 2},$$

возникающие в пределах

$$\lim_{t\to 0} \int d\nu(\alpha) \int \frac{dy}{\sqrt{\pi/\gamma}} e^{-\gamma y^2}\ \frac{G_t(y,\alpha)w - w}{t} = A_1 w, \qquad w \in \mathscr{D}(A_1),$$

$$\lim_{t\to 0} \int d\nu(\alpha) \int \frac{dy}{\sqrt{\pi/\gamma}} e^{-\gamma y^2}\ \frac{(G_t(y,\alpha)w - w)^{\otimes 2}}{2t} = A_2 w^{\otimes 2}, \quad w^{\otimes 2} \in \mathscr{D}(A_2).$$

Мы приводим утвердительный ответ, если выполнено условие коммутации марковских операторов, A_1 и A_2 ограниченны, или имеют согласованный в некотором смысле точечный спектр. Подробнее данный пример описан в разделе 5.1. Там же приведен схожий пример случайного управления, характеризующийся тем, что вместо самосопряженных C_α стоят антиэрмитовы iH_α. Причина сложности в данном подходе в том, что для неограниченных операторов A_1, A_2 нетривиально построить функции $f \in C_B(\mathcal{H})$, которые под действием $\dfrac{d}{dt}F_t\Big|_{t=0}$ остаются в $C_B(\mathcal{H})$.

Примеры диффузионных и пуассоновских процессов известны давно и используются в физических приложениях. Методы теории белого шума и стохостических процессов успешно применяются для анализа бозонных, фермионных, нелинейных и открытых квантовых систем ([1]–[4]). В частности, поведение системы под воздействием непрерывного измерения изучается в работах ([5]–[7]) теоретически и экспериментально.

Статья разделена на 4 раздела. Разделы 2 и 3 освещают некоторые вопросы квантовой теории, марковских процессов и теории сильно непрерывных и bi–непрерывных полугрупп и их аппроксимации. За основу исследований выбран показательный пример непрерывного процесса неточного измерения координаты ([8]–[10]), приводящего к стохастическому дифференциальному уравнению Шредингера — Белавкина. Его особенность заключается в коммутативности операторов, осуществляющих случайное блуждание, что в итоге позволяет разложить динамику на независимые процессы по компонентам $\psi(x)$ волновой функции $|\psi\rangle$. Этот пример обобщается на произвольные процессы в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве (раздел 4). Раздел 5 содержит формулировки основных теорем 5.1, 5.2 и обоснование примеров процессов в схеме непрерывных измерений и случайных унитарных управлений.

2. Предварительные сведения

2.1. Процесс квантового измерения. Фундаментальной особенностью квантовой механики является то, что процесс измерения имеет вероятностный характер. Кроме того, оно производит разрушающее воздействие на систему, часто называемое коллапсом волновой функции, или уменьшением волнового пакета, определяемого проекционным постулатом Людерса — фон Неймана ([3], [11]). Самое общее (для наших целей) определение квантового измерения формулируется в терминах вполне положительного инструмента, введенного в работе [12]. Измерение подразумевает получения распределения результата измерения в измеримом пространстве $(\mathcal{Y},\Sigma)$ для данного состояния $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, и закона изменения статистического ансамбля (состояния) при измерении, если имеется информация о полученном исходе измерения. Например, результатом измерения может быть элемент измеримого пространства $(\mathfrak{X},\mathscr{B})$, тогда в случае повторных измерений результат уже будет лежать в измеримом пространстве $(\mathcal{Y},\Sigma)=(\mathfrak{X}^J,\mathscr{B}^{\otimes J})$ функций $J\to\mathfrak{X}$ (например, $J\subset\mathbb{R}$ счетно для дискретного процесса измерений и $J=[0,T]$ для непрерывного во времени процесса измерений на отрезке $t\in[0,T]$).

Дадим определение вполне положительного инструмента ([13]–[15]). Множество ядерных положительных операторов на $\mathcal{H}$ следа 1 обозначается $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и называется множеством квантовых состояний. Пространство ядерных операторов на $\mathcal{H}$ обозначается $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Определение 2.1. *Отображение* $\mathbf{M}[B](\rho):\Sigma\times\mathfrak{T}(\mathcal{H})\to\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ *называется вполне положительным инструментом, если выполняются условия:*

1. *для любого* $B\in\Sigma$ *отображение* $\rho\mapsto\mathbf{M}[B](\rho)$ *аффинное (продолжается до линейного на* $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$*);*
2. $\mathbf{M}[B]$ *— вполне положительное отображение* $\forall B\in\Sigma$*;*
3. $\mathbf{M}[B](\rho)$ σ*–аддитивно в смысле слабой топологии на* $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ *для каждого* $\rho\in\mathfrak{T}(\mathcal{H})$*;*
4. $\mathbf{M}[\mathcal{Y}]$ *сохраняет след:* $\operatorname{Tr}\mathbf{M}[\mathcal{Y}](\rho)=1\quad\forall\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Далее будем иногда называть вполне положительный инструмент просто инструментом.

В концепции инструментов полагается, что при измерении с помощью инструмента $\mathbf{M}$ вероятность того, что результат попадет в измеримое множество B для исходного состояния $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (которое называется по–другому априорным), равно

$$\mu_\rho(B)=\operatorname{Tr}\mathbf{M}[B](\rho),\tag{2.1}$$

а доля статистического ансамбля для таких исходов описывается состоянием

$$\rho'=\frac{\mathbf{M}[B](\rho)}{\operatorname{Tr}\mathbf{M}[B](\rho)}.\tag{2.2}$$

Согласно приведенным выше определениям, при последовательном измерении с помощью инструментов $\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_n$ в моменты $t_1<\ldots<t_n$ с пространством исходов $(\mathfrak{X},\mathscr{B})$ статистика задается распределением вероятности на $(\mathfrak{X}^n,\mathscr{B}^{\otimes n})$, связанным с инструментом

$$\mathbf{M}_{t_1,\ldots,t_n}[B_1\times\ldots\times B_n](\rho)=\mathbf{M}_{t_n}[B_n](\ldots\mathbf{M}_{t_1}[B_1](\rho)\ldots),\quad B_i\in\mathscr{B}.\tag{2.3}$$

2.2. Случайные процессы, соответствующие квантовому инструменту. Для наглядности, рассмотрим пример инструмента с дискретным множеством исходов. А именно, пусть $\mathfrak{X} = \{x_k\}$, $\Sigma = 2^{\mathfrak{X}}$ — σ–алгебра, содержащая все подмножества, а инструмент задается в виде $\mathbf{M}[B](\rho) = \sum\limits_{x_k \in B} \mathbf{M}_k(\rho)$, где $\mathbf{M}_k$ — вполне положительные отображения вида

$$\mathbf{M}_k(\rho) = \sum_m G_{km} \rho G_{km}^*.$$

Требуется $\sum\limits_{m,k} G_{km}^* G_{km} = I$.

Имеется закон преобразования состояния для каждого конкретного полученного исхода x_k:

$$(\rho, k) \mapsto \frac{\mathbf{M}_k(\rho)}{\mathrm{Tr}\ \mathbf{M}_k(\rho)}. \tag{2.4}$$

Будем исходить из интерпретации, что ансамбль, в котором чистое состояние с единичным вектором $|\psi_k\rangle$ встречается с вероятностью p_k, может быть описан квантовым состоянием вида $\rho = \sum\limits_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$. Стало быть, действие инструмента $\mathbf{M}$ можно записать в терминах случайного блуждания на $\mathcal{H}$:

$$(|\psi\rangle, \omega) \mapsto \frac{G_{k(\omega)m(\omega)}|\psi\rangle}{\|G_{k(\omega)m(\omega)}|\psi\rangle\|}, \tag{2.5}$$

где k и m — случайные индексы, и только $k(\omega)$ является наблюдаемым, фиксируемым на измерительном приборе. Волновая функция в правой части нормирована, и вероятность $p_{k_0m_0}(\psi) = \mathbb{P}(k(\omega) = k_0, m(\omega) = m_0)$ определена формулой

$$p_{k_0m_0}(\psi) = \|G_{k_0m_0}|\psi\rangle\|^2, \qquad \forall k_0, m_0,$$

что дает, в соответствии с аксиомами квантовой механики, правильное выражение для состояния

$$\mathbf{M}[\mathbb{R}](|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{k,m} p_{km}(\psi) \frac{G_{km}|\psi\rangle}{\|G_{km}|\psi\rangle\|} \frac{\langle\psi|G_{km}^*}{\|G_{km}|\psi\rangle\|}. \tag{2.6}$$

Вероятности перехода p_{km} зависят от $|\psi\rangle$, и этот факт был обусловлен ограничением на нормированность волновых функций. Попытка устранить зависимости вероятностей от начального состояния приводит к случайному блужданию на гильбертовом пространстве, которое можно охарактеризовать как линейное.

Рассмотрим следующее преобразование. Пусть $\{\pi_{km}\}_{k,m}$ — распределение вероятностей. Тогда отображение

$$(|\psi\rangle, \omega) \mapsto \frac{G_{k(\omega)m(\omega)}|\psi\rangle}{\sqrt{\pi_{k(\omega)m(\omega)}}}, \tag{2.7}$$

где $\pi_{k_0m_0} = \mathbb{P}\Big(k(\omega) = k_0, m(\omega) = m_0\Big)$, задает действие инструмента $\mathbf{M}$ в том смысле, что

$$\mathbf{M}[\mathbb{R}](|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{k,m} \pi_{km} \frac{G_{km}|\psi\rangle}{\sqrt{\pi_{km}}} \frac{\langle\psi|G_{km}^*}{\sqrt{\pi_{km}}} \tag{2.8}$$

Распределения случайных величин k, m не зависят от $|\psi\rangle$, поэтому можно выбрать вероятностное пространство вместе со случайными элементами $|\psi\rangle, k, m$, независимыми в совокупности, чтобы формулы (2.7) и (2.8) удовлетворялись.

Мы лишь описали случай однократного действия инструмента. Если несколько измерений проводится последовательно, исходы образуют случайную последовательность

$(k_1(\omega), k_2(\omega), \ldots)$. При этом, каждому исходу соответствует случайный процесс на множестве квантовых состояний, так называемая квантовая траектория $\{\rho_n, k_n\}$ (см., например, [5]), описывающаяся рекурсивно:

$$(\rho_n, k_n) \mapsto (\rho_{n+1}, k_{n+1}), \qquad \rho_{n+1}(\omega) = \frac{\sum\limits_m G_{k_{n+1}m}\rho_n G^*_{k_{n+1}m}}{\operatorname{Tr} \sum\limits_m G_{k_{n+1}m}\rho_n G^*_{k_{n+1}m}}. \tag{2.9}$$

В общем случае под линейным случайным блужданием на гильбертовом пространстве мы будем понимать следующий случайный процесс.

Определение 2.2. *Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Линейным случайным блужданием на $\mathcal{H}$ мы называем набор $\{G_{(t|s)}(\omega)\}_{0 \leqslant s \leqslant t,\ t,s \in J} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, если*

1. *$\omega \mapsto G_{(t|s)}(\omega)$ измеримо в паре $(\mathscr{F}, \mathscr{B}_{WOT})$, где $\mathscr{B}_{WOT}$ — борелевская σ–алгебра слабой операторной топологии;*
2. *$G_{(r|t)}G_{(t|s)} = G_{(r|s)}$ п.н. при всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant r$, и $G_{(t|t)} = I$ п.н.*

Дополнительное требование

$$\mathbb{E}\Big[G^*_{(t|s)}G_{(t|s)}\Big] = I$$

в смысле интеграла Петтиса позволяет связать с данным линейным случайным блужданием систему квантовых каналов

$$\Phi_{(t|s)}(\rho) = \mathbb{E}\Big[G_{(t|s)}\rho G^*_{(t|s)}\Big], \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Описанный выше пример дискретного процесса измерений является частным случаем линейных случайных блужданий, когда $J = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\} \subset \mathbb{R}_+$ дискретно,

$$G_{(t_\ell|t_{\ell+1})}(\omega) = \frac{G_{k(\omega)m(\omega)}}{\sqrt{\pi_{k(\omega)m(\omega)}}},$$

причем

$$\mathbb{P}\Big(k(\omega) = k, m(\omega) = m\Big) = \pi_{km}.$$

Переход к пределу при стремящемуся к бесконечности количеству измерений при уменьшающейся степени воздействия является основным предметом исследования ([5], [10], [16]). При этом получаются стохастические дифференциальные уравнения на оператор плотности или волновую функцию. Такой подход в зарубежной литературе называется unravelling («распутывание»). Подробнее см. [3, гл. III], [4].

2.3. Марковские процессы и полугруппы. Следует дать некоторое представление о марковских процессах, с которыми мы будем иметь дело ([17]–[19]).

Определение 2.3. *Пусть $(\mathcal{Y}, \Sigma)$ — измеримое пространство. Случайный процесс $\{X_t : \Omega \to \mathcal{Y},\ t \geqslant 0\}$ называется марковским, если выполнено $\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s) = \mathbb{E}(X_t|\sigma(X_s))$ для любых $0 \leqslant s \leqslant t$. Здесь $\mathscr{F}_s = \sigma\left(X_{s'},\ 0 \leqslant s' \leqslant s\right)$ — естественная фильтрация процесса X_t.*

С марковскими процессами связывается переходная вероятность, полностью характеризующая его вероятностные свойства (то есть полностью задает его совместные распределения). Заметим, что существование переходной вероятности не тривиально и условия, что $\mathcal{Y}$ — сепарабельное полное метрическое пространство, достаточно ([17, том 2, гл. I, §2]).

Определение 2.4. *Система функций $P(B, t|x, s)$, где $x \in \mathcal{Y}$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $B \in \Sigma$ называется переходной вероятностью процесса X_t, если*

1. *при фиксированных $0 \leqslant s \leqslant t$ и $B \in \Sigma$ функция $P(B, t|x, s)$ является измеримой по x, а при фиксированных s, t и $x \in \mathcal{Y}$ — вероятностной мерой от B;*

2. *$P(B,t|x,t) = \chi_B(x)$;*
3. *$P(B,t|x,s) = \mathbb{P}(X_t \in B \mid X_s = x)$ (для п.в. x относительно меры $\mathbb{P}_{X_s}$);*
4. *для $\mathbb{P}_{X_s}$–п.в. x выполнено уравнение Чепмена — Колмогорова*

$$P(B,t|x,s) = \int P(B,t|y,r)P(dy,r|x,s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t. \tag{2.10}$$

По функциям $P(B,t|x,s)$ строятся марковские операторы $\mathbf{P}_{(t|s)}$ на банаховом пространстве $B_B(\mathcal{Y})$ борелевских ограниченных функций с sup–нормой:

$$(\mathbf{P}_{(t|s)}f)(x) = \int f(y)P_t(dy,t|x,s) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s = x). \tag{2.11}$$

Если переходная вероятность $P(B,t|x,s)$ зависит только от разности времен $t-s$, то есть $P(B,t+h|x,t) = P_h(B,x)$, то соответствующий марковский процесс X_t называется однородным по времени.

Из уравнения Чепмена — Колмогорова следует, что для однородного марковского процесса семейство $\{\mathbf{P}_t := \mathbf{P}_{(t|0)},\ t \geqslant 0\}$ образует марковскую полугруппу с генератором

$$\mathbf{L} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{P}_{t+h} - \mathbf{P}_t}{h}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \Big\{ f \in B_B(\mathcal{Y}) \;\Big|\; \exists \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{P}_{t+h}f - \mathbf{P}_t f}{h} \Big\},$$

предел в определении которой берется по норме.

С линейным случайным блужданием на гильбертовом пространстве при котором случайный вектор $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ переходит в случайный вектор $G_{(t|s)}|\psi\rangle$ при условии, что оператор $G_{(t|s)}$ не зависит от $|\psi\rangle$, связан марковский оператор

$$f(v) \mapsto \int d\mathbb{P}(d\psi_t, t|v, 0) f(\psi_t) = \int d\mathbb{P}(\omega)\ f(G_{(t|s)}(\omega)v), \quad v \in \mathcal{H}. \tag{2.12}$$

В данном примере процесс определен на сепарабельном гильбертовом пространстве, поэтому переходные вероятности заданы.

Характеристический функционал случайного вектора ξ со значением в бесконечномерном банаховом пространстве X определяется по формуле $\varphi(v) = \mathbb{E}e^{i\,\mathrm{Re}\,\ell(\xi)}$, $\ell \in X^*$ (см. [18, гл. V, опр. 9], где определение приводится для вещественнозначных случайных векторов). Комплексный случай сводится к вещественному процедурой овеществления $X \to X_{\mathbb{R}}$, при котором, как легко заметить, $(X_{\mathbb{R}})^* = \{x \mapsto \mathrm{Re}\,\ell(x)\}$. Для нас важен пример $X = \mathcal{H}$, на котором любой непрерывный функционал является скалярным произведением с фиксированным вектором $v \in \mathcal{H}$. В общем случае марковский оператор $\mathbf{P}_{(t|s)}$ не переводит характеристический функционал случайного вектора $|\psi_s\rangle$ в характеристический функционал случайного вектора $|\psi_t\rangle$. Однако, для линейного случайного блуждания $\{G_{(t|s)}\}$ изменение

$$\varphi_s(v) = \mathbb{E}e^{i\,\mathrm{Re}\langle v|\psi_s\rangle} \mapsto \varphi_t(v) = \mathbb{E}e^{i\,\mathrm{Re}\langle v|\psi_t\rangle}$$

при эволюции на интервале (s,t) происходит под действием марковского оператора сопряженного линейного случайного блуждания $\{G^*_{(t|s)}\}$, что видно из

$$\mathbb{E}e^{i\,\mathrm{Re}\langle v|\psi_t\rangle} = \mathbb{E}e^{i\,\mathrm{Re}\langle G^*_{(t|s)}v|\psi_s\rangle} = \int d\mathbb{P}(\omega)\ \varphi_s(G^*_{(t|s)}v).$$

Нас будут интересовать случайные процессы, являющиеся решением стохастических дифференциальных уравнений специального вида на конечномерном пространстве

$$\begin{cases} dX_t = AX_t dt + \sum_k B_k X_t dW_{k,t}, \\ X_0 = \xi, \end{cases} \tag{2.13}$$

где $\{A, B_k\}$ — линейные операторы, $W_t = (W_{k,t})$ — многомерный винеровский процесс, и их обобщения на бесконечномерный случай. Такие процессы называются геометрическими броуновскими движениями, и играют важную роль в финансовой математике (см. [18], [20], [21]) и квантовой механике. Они являются марковскими, и в конечномерных пространствах описываются марковскими полугруппами с генераторами вида

$$(\mathbf{L}f)(v) = (Av, df(v)) + \frac{1}{2}\sum_{k,l}(B_k v, B_l v)\frac{\partial^2 f(v)}{\partial_k \partial_l}. \tag{2.14}$$

Определение бесконечномерных аналогов нетривиально. Им посвящены работы ([22]–[24]). Данная работа также затрагивает вопрос построения процессов, марковские операторы которых имеют генератор, аналогичный (2.14).

Процесс X_t с начальным условием $X_0 = \xi$ можно получить, приближая процессами дискретного времени $X_t^{(N)}$

$$X_{t_N}^{(N)} = \left(1 + A(t_N - t_{N-1}) + \sum_k B_k(W_{k,t_N} - W_{k,t_{N-1}})\right) \\ \ldots \left(1 + A(t_1 - t_0) + \sum_k B_k(W_{k,t_1} - W_{k,t_0})\right)\xi.$$

В следующих разделах мы реализуем следующую идею: для однородного линейного случайного блуждания на гильбертовом пространстве построим марковскую полугруппу, вычислим ее генератор, который будет иметь вид, аналогичный генератору диффузионного процесса (2.13), и приблизим полугруппу семейством марковских операторов дискретного линейного случайного блуждания.

2.4. Процесс непрерывных неточных измерений координаты. Как всегда, множество состояний на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ обозначается $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, а пространство ограниченных операторов — $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Однако часто рассматривают неограниченные операторы, имеющие плотную область определения. Таковыми выступают оператор координаты $\hat{x}$ и оператор импульса $\hat{p}$. Используя представление координаты, то есть отождествление $\mathcal{H} \simeq \mathbb{L}_2(\mathbb{R}, dx)$, $|\psi\rangle \mapsto \psi(x)$, можно развить функциональное исчисление для оператора $\hat{x}$. Для любой борелевской ограниченной функции $f(x)$ на прямой определен оператор $f(\hat{x}) \in \mathcal{B}(\mathbb{L}_2(\mathbb{R}))$ умножения на функцию f:

$$(f(\hat{x})\psi)(x) = f(x)\psi(x).$$

Измерительный инструмент, соответствующий простейшему единичному неточному измерению координаты (см. в обзоре Холево [25, пример 2, стр. 87]; [15]) выглядит следующим образом:

$$\rho \mapsto \mathbf{M}[B](\rho) = \int_B \sqrt{p(yI - \hat{x})}\rho\sqrt{p(yI - \hat{x})}\, dy, \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}). \tag{2.15}$$

Здесь I — тождественный оператор, $\hat{x}$ — оператор координаты, p — плотность некоторой вероятностной меры. Случайный исход измерения $q(\omega)$ имеет распределение

$$\int\limits_B d\mathbb{P}_q = \int\limits_B \operatorname{Tr} \rho p(yI - \hat{x})\ dy = \operatorname{Tr} \mathbf{M}[B](\rho). \tag{2.16}$$

При неточном измерении чистого состояния апостериорное состояние также чистое. Случайное блуждание нормированной волновой функции имеет вид

$$(|\psi\rangle, \omega) \mapsto \frac{\sqrt{p(q(\omega)I - \hat{x})}|\psi\rangle}{\|\sqrt{p(q(\omega)I - \hat{x})}|\psi\rangle\|}, \tag{2.17}$$

так что плотность вероятности для случайной величины $q(\omega)$ зависит от исходной волновой функции:

$$d\mathbb{P}_q(y) = \|\sqrt{p(yI - \hat{x})}|\psi\rangle\|^2\ dy.$$

Предположим, некоторая вероятностная мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $d\mu(y) = \pi(y)dy$ и $\pi(y) > 0$. Тогда в соответствии с рассуждениями параграфа 2.1, можно рассмотреть случайное блуждание вида

$$(|\psi\rangle, \omega) \mapsto \frac{\sqrt{p(q(\omega)I - \hat{x})}|\psi\rangle}{\sqrt{\pi(q(\omega))}} \tag{2.18}$$

с вероятностью исхода $\mathbb{P}(q \in dy) = \pi(y)dy$. В частности, если сама плотность $p(x)$ строго положительна, ее можно брать в качестве $\pi(x)$.

Будем для простоты считать, что $p_N(x) \propto e^{-t\lambda x^2}$, $t = \dfrac{T}{N}$, $\pi(x) = p_N(x)$ для каждого фиксированного N (см. [9]). Здесь константа $\lambda > 0$ интерпретируется как степень точности измерений, производимых в серии.

Уравнение Шредингера — Белавкина (УШБ), описывающее предельную эволюцию, содержит помимо гамильтоновой части случайную составляющую, и представляет теперь стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), приведенное в статье [9]:

$$d|\psi_t\rangle = -iH|\psi_t\rangle dt - \frac{\lambda^2}{4}\hat{x}^2|\psi_t\rangle dt + \sqrt{\frac{\lambda^2}{2}}\hat{x}|\psi_t\rangle dW_t. \tag{2.19}$$

Приведенный пример непрерывного процесса квантового измерения соответствует однородному линейному случайному блужданию на гильбертовом пространстве, причем все случайные операторы блуждания коммутируют друг с другом.

3. Теорема Чернова для bi–непрерывных полугрупп

3.1. Bi–непрерывные полугруппы. Понятие bi–непрерывных полугрупп было сформировано и развито в диссертации F. Kühnemund (см. [26]) и последующих работах. Bi–непрерывные полугруппы достаточно естественно обобщают сильно непрерывные полугруппы, для которых общеизвестна теорема Чернова об аппроксимации [27, теорема 5.2]. Возможность аппроксимации bi–непрерывных полугрупп исследована в работах [28], [29], где был доказан аналог теоремы Чернова.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство с сопряженным X^*, снабженное также локально выпуклой топологией τ, которая имеет свойства:

1. $\|\cdot\|$–ограниченные τ–замкнутые множества секвенциально τ–полны (любая фундаментальная в τ последовательность сходится),
2. топология τ хаусдорфова и грубее топологии нормы,

3. для любого $x \in X$
$$\|x\| = \sup\left\{|\ell(x)|: \quad \ell \in (X,\tau)',\ \|\ell\|_{X^*} \leqslant 1\right\},$$
где $(X,\tau)'$ — пространство, топологически сопряженное к (X,τ) на котором рассматривается норма $\|\cdot\|_{X^*}$ сопряженного пространства X^*.

Замечание 3.1. *Далее в статье такие условия на топологию τ относительно банахова пространства $(X,\|\cdot\|)$, будем называть bi–условиями. Кроме того, для отображения $f: M \to X$ и для метрического пространства M будем обозначать*
$$\mathrm{bi}\lim_{a\to a_0} f(a) = f_0 \in X,$$
если $\{f(a),\ a \neq a_0\}$ $\|\cdot\|$–ограниченно и $\tau \lim\limits_{a\to a_0} f(a) = f_0$, и называть bi–сходимостью.

Отметим, что, поскольку τ грубее топологии нормы, можно считать $(X,\tau)'$ подпространством X^* с индуцированной нормой на нем.

В качестве пространств $(X,\|\cdot\|,\tau)$ широко используются пространства ограниченных непрерывных функций на банаховом пространстве E с sup–нормой и топологией сходимости на некотором классе подмножеств E (см. примеры в [26]):

Пример 3.1. *Пусть E — банахово пространство, $X = C_B(E)$ с sup–нормой. Топология равномерной сходимости на ограниченных множествах τ порождена sup–полунормами $\|\cdot\|_B$, где B — шар в E. Проверим, что такая топология удовлетворяет bi–условиям.*

Пусть $M \subset X$ — равномерно ограниченное семейство функций, замкнутое в топологии равномерной сходимости на шарах, значит множество $M|_B$ ограниченных на B функций из M замкнуто в $C_B(B)$. Если $\{f_n\}$ — τ–фундаментальная последовательность функций, то их ограничения на B будет сходиться в $C_B(B)$ к функции, которую обозначим f_B. Очевидно, для шаров B и B' выполнено условие согласования: $(f_B)|_{B\cap B'} = (f_{B'})_{B\cap B'}$, что позволяет построить функцию f_E, которая будет непрерывна в каждой точке и ограниченна.

Второе условие очевидно.

Среди функционалов из $(X,\tau)'$ присутствуют все δ–функционалы вида
$$\delta_{e_0}(f) = f(e_0), \quad e_0 \in E.$$
Таким образом, sup–норма f достигается.

Замечание 3.2. *Напрашивается также рассмотреть топологию поточечной сходимости (которая играет большую роль при работе с характеристическими функциями случайных величин). Но она не удовлетворяет первому условию. Даже в одномерном случае, можно взять счетное семейство функций*
$$\mathcal{M} = \{f_n(x) = \mathrm{arctg}(nx),\ n \in \mathbb{N}\},$$
которое, очевидно, равномерно ограниченно, а также замкнуто в топологии поточечной сходимости. Если любая окрестность функции $f(x) \in C_B(\mathbb{R})$ содержит элементы $\mathcal{M}$, несложно проверить, что она является его элементом. Но $\mathcal{M}$ секвенциально не полно, поскольку для всех $x \in \mathbb{R}$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится.

Определение 3.1. *Будем говорить, что полугруппа $\{T_t\}$ на $(X,\|\cdot\|,\tau)$ bi–непрерывна, если*

1. $\exists M \geqslant 1$, $w \in \mathbb{R}$, *что* $\forall t \geqslant 0$ *выполнено* $\|T_t\| \leqslant Me^{wt}$,
2. $\tau \lim\limits_{t\to 0} T_t x = x \quad \forall x \in X$,
3. *для любой bi–сходящейся последовательности $\{x_n\}$ к x верно* $\mathrm{bi}\lim\limits_{n\to\infty} T_t x_n = T_t x$ *равномерно по t из любого отрезка $\mathbb{R}_+$.*

Определение 3.2. *Генератором bi–непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ мы называем такой оператор $L : \mathcal{D}(L) \to X$, определенный как предел*

$$Lx = \tau \lim_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t}, \quad \mathcal{D}(L) = \left\{ x \in X : \sup_{t\in(0,1]} \frac{\|T_t x - x\|}{t} < \infty,\ \exists\, \tau \lim_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t} \in X \right\}.$$

Также нам понадобятся следующие определения ([26]).

Определение 3.3. *Пусть $(L, \mathcal{D}(L))$ — оператор на X.*

1. *Подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(L)$ называется bi–существенной областью определения, если $\forall x \in \mathcal{D}(L)$ существует $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$, что $\{x_n\}$ и $\{Lx_n\}$ bi–сходятся к x и Lx соответственно.*
2. *L называют bi–замыкаемым, если он допускает bi–замкнутое расширение (замыкание $\overline{L}^{\|\cdot\|,\tau}$ — минимальное замкнутое расширение).*

Определение 3.4. *Подмножество $M \subset X$ называется bi–плотным, если для любого $x \in X$ найдется bi–сходящаяся последовательность $\{x_n\} \subset M$ к точке x.*

Определение 3.5. *Семейство $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $\|\cdot\|$–непрерывных операторов называется bi–равностепенно непрерывным, если для любой bi–сходящейся последовательности $\{x_n\}$ к x, выполнено $\tau \lim\limits_{n\to\infty} S_\alpha x_n = x$ равномерно по α.*

Теперь приведем формулировку теоремы Чернова для bi–непрерывных полугрупп ([29, теорема 4.1]).

Теорема 3.1. *Пусть $F : [0, +\infty) \to \mathcal{B}(X)$ — такая функция, что*

1. *$F_0 = I$,*
2. *$\|F_t^m\| \leqslant Me^{mwt}$,*
3. *$\{e^{-mwt}(F_t)^m,\ t \geqslant 0\}$ локально равномерно bi–равностепенно непрерывно по m, т.е. для любой bi–сходящейся последовательности $\{x_n\}$ к x выполняется*
$$\tau \lim_{n\to\infty} (e^{-wt} F_t)^m (x - x_n) = 0$$
равномерно по m и t из отрезков $\mathbb{R}_+$,
4. *$\dfrac{F_t x - x}{t}$ $\|\cdot\|$–ограниченно на $(0, T]$ и существует $\tau \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{F_t x - x}{t} = Lx$ на bi–плотном подпространстве $\mathcal{D} \subset X$.*

Пусть $(\lambda_0 I - L)(\mathcal{D})$ bi–плотно для некоторого $\lambda_0 > w$. Тогда замыкание $\overline{L}^{\|\cdot\|,\tau}$ является генератором bi–непрерывной полугруппы $\{T_t\}$, дающейся аппроксимацией

$$T_t x = \tau \lim_{N\to\infty} (F_{\frac{t}{N}})^N x,$$

равномерной на отрезках $\mathbb{R}_+$.

3.2. Полугруппа, связанная с процессом непрерывного измерения. Символом η будем далее обозначать нормальную случайную величину: $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$.

В терминах случайных блужданий в гильбертовом пространстве в простейшей постановке волновая функция в соответствии с полученным результатом η (не зависящим от $\psi(x)$) «коллапсирует» в (см. формулу (2.18))

$$\psi(x) \mapsto \exp\left(-t\lambda \frac{\left(\frac{\eta}{\sqrt{t\lambda}} - x\right)^2}{2} \right) e^{\frac{\eta^2}{2}} \psi(x) = e^{-\frac{t\lambda x^2}{2} + \eta x \sqrt{t\lambda}} \psi(x). \tag{3.1}$$

Замечание 3.3. *В формулы всюду входит комбинация $t\lambda$, поэтому можно полагать далее $\lambda = 1$.*

При выполнении последовательности измерений на каждом шаге возникает независимое от предыдущих моментов времени изменение того же вида. Таким образом, можно говорить о марковском характере векторного случайного процесса $|\psi_t\rangle$, но в этом параграфе рассмотрим одномерный вещественный случайный процесс $\operatorname{Re}\psi_t(x)$, поскольку случайные операторы линейного блуждания представимы в виде функции от оператора координаты. В этом примере строится приближение марковской полугруппы одномерного случайного процесса, и вывод представленного результата может быть взят из случая блуждания на произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве.

Однократное изменение (3.1) с параметром t соответствует марковскому оператору

$$(\mathbf{T}_t f)(z) = \int \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} f\left(\exp\left(-\frac{tx^2}{2} + yx\sqrt{t}\right) z\right),$$

который получен в соответствии с формулой (2.12).

Более того, простое вычисление показывает (можно обратиться к предложению 4.3), что $\mathbf{T}_t$ уже является полугруппой, но она не сильно непрерывна в топологии нормы, а bi–непрерывна, если областью определения является пространство $(C_B(\mathbb{R}), \|\cdot\|, \tau)$ ограниченных непрерывных функций sup–нормой и топологией равномерной сходимости на компактах. Действительно, при стремлении $t \to 0$ функция $f(z) = \sin(z)$ быстро приближается в окрестности начала координат, в то время как в окрестности бесконечности образ $\mathbf{T}_t f$ хорошо сглаживается. Свойство bi–непрерывности будет показано в общем случае.

Генератор $\mathbf{L}$ полугруппы $\mathbf{T}_t$ легко вычисляется:

$$\mathbf{L}f(z) = -\frac{x^2}{4} z f'(z) + \frac{x^2}{4} z^2 f''(z)$$

(в область его определения входит пространство Шварца), следовательно, случайный процесс $\psi_t(x)$ удовлетворяет стохастическому уравнению Шредингера — Белавкина

$$d\psi(x) = -\frac{x^2}{4}\psi(x)dt + \frac{x}{\sqrt{2}}\psi(x)dW_t(x), \tag{3.2}$$

где $W_t(x)$ — стандартный винеровский процесс.

Интересно, что при выборе других плотностей $\{p_t\}$ полугрупповое свойство может нарушаться, и приходится пользоваться теоремой приближения bi–непрерывной полугруппы.

4. Случайные блуждания в гильбертовом пространстве

Теперь получим некоторое обобщение полученного результата в бесконечномерном некоммутативном случае.

4.1. О слабо непрерывных и дифференцируемых функциях на гильбертовом пространстве. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot|\cdot\rangle$, линейным по второму аргументу. Для овеществления $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$ индуцируется скалярное произведение $\langle u|v\rangle_\mathbb{R} = \operatorname{Re}\langle u|v\rangle$. Слабая топология $\mathcal{H}$ совпадает со слабой топологией $\mathcal{H}_\mathbb{R}$.

Рассмотрим пространство $B_B(\mathcal{H})$ комплексных ограниченных борелевских относительно слабой топологии на $\mathcal{H}$ функций, полное относительно нормы

$$\|f(v)\| = \sup_{v\in\mathcal{H}} |f(v)|. \tag{4.1}$$

Полнота $B_B(\mathcal{H})$ следует из того, что поточечный предел измеримых функций измерим.

Среди замкнутых подпространств $B_B(\mathcal{H})$ можно выделить банаховы подпространства ограниченных непрерывных $C_B(\mathcal{H})$ и ограниченных слабо секвенциально непрерывных $C_{BWS}(\mathcal{H})$ функций. Имеет место вложение $C_{BWS}(\mathcal{H}) \subset C_B(\mathcal{H}) \subset B_B(\mathcal{H})$. По определению $f \in C_{BWS}(\mathcal{H})$, если для любой слабо сходящейся последовательности $\tau_W \lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_0$

выполнено $f(v_n) = f(v_0)$, а если f в ограничении на любой шар $B \subset \mathcal{H}$ равномерно приближается слабо непрерывными функциями, то $f \in C_{BWS}(\mathcal{H})$. Кроме того, известно, что на ограниченных множествах слабо непрерывные функции равномерно слабо непрерывны. Для полноты изложения доказательство этих фактов и некоторых других свойств можно найти в Приложении.

Пусть $F \subset C_B(\mathcal{H})$ — некоторое $\|\cdot\|$–замкнутое подпространство. На F введем топологию τ равномерной сходимости на ограниченных множествах $\mathcal{H}$. Соответствующие полунормы обозначим $\|\cdot\|_B$, если B — ограниченное подмножество. Заметим, что τ метризуема, поскольку существует счетная система полунорм, порождающая τ, а именно $\left\{\|f\|_n = \sup\limits_{\|v\|\leqslant 2^n} |f(v)|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Предложение 4.1. *Пространство $(F, \|\cdot\|, \tau)$ удовлетворяет bi–условиям.*

Доказательство. Было отмечено (пример 3.1), что bi–условиям удовлетворяет пространство $(C_B(\mathcal{H}), \|\cdot\|, \tau)$. Тогда результат переносится и на $\|\cdot\|$–замкнутое подпространство F. Во–первых, $\|\cdot\|$–ограниченное τ–замкнутое $M \subset F$ будет таковым и в $C_B(\mathcal{H})$, поэтому является и секвенциально τ–полным. Во–вторых, топология τ и τ–непрерывные линейные функционалы индуцируются из $C_B(\mathcal{H})$, сохраняя заявленные свойства. □

Замечание 4.1. *Bi–условия формулируются в терминах секвенциальной сходимости в топологии τ. Например, bi–плотность подразумевает существование последовательности, обладающей определенными свойствами. В нашем случае нет разницы между топологическим и секвенциальным условием, поскольку ограниченные множества гильбертова пространства метризуемы в слабой топологии.*

Определение 4.1. *Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство. Отображение $|\psi\rangle : \Omega \to \mathcal{H}$ называется случайным вектором, если оно измеримо в паре $(\mathscr{F}, \mathscr{B}_W)$. Под $\mathscr{B}_W$ понимается борелевская σ–алгебра относительно слабой топологии.*

Определение 4.2. *Случайным (ограниченным) оператором мы называем отображение $G : \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, которое измеримо относительно пары $(\mathscr{F}, \mathscr{B}_{WOT})$, где $\mathscr{B}_{WOT}$ обозначает σ–алгебру, порожденную слабой операторной топологией.*

Замечание 4.2. *Топология нормы и слабая топология на сепарабельном гильбертовом пространстве порождают одну и ту же борелевскую σ–алгебру,* [30, предложение 6.10.64]. *В частности, множества*

$$\{\omega :\ \|\psi(\omega)\| < R\}, \quad R > 0$$

измеримы, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_\varepsilon > 0$, что $\mathbb{P}(\|\psi(\omega)\| < R_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Пространство ограниченных борелевских функций на $\mathcal{H}$, которое участвует в определении марковских операторов, обозначается $B_B(\mathcal{H})$. Топология нормы, SOT и WOT топологии на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ также порождают одну и ту же σ–алгебру ([31, предложение 2.11]*). С большой вероятностью случайный оператор имеет ограниченную норму.*

Характеристическим функционалом случайного вектора $|\psi\rangle$ называется функция

$$\varphi(v) = \mathbb{E}e^{i\langle v|\psi\rangle_{\mathbb{R}}} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

При данном $v \in \mathcal{H}$ отображение $|w\rangle \mapsto e^{i\langle v|w\rangle_{\mathbb{R}}}$ слабо непрерывно, поэтому композиция $\omega \mapsto e^{i\langle v|\psi(\omega)\rangle_{\mathbb{R}}}$ является случайной величиной, и корректно определен интеграл $\varphi(v) = \mathbb{E}e^{i\langle v|\psi\rangle_{\mathbb{R}}}$.

Важным примером в настоящей работе преобразований функций выступает марковский оператор, который действует на пространстве $B_B(\mathcal{H})$ согласно

$$(\mathbf{F}[G]f)(v) = \int d\mathbb{P}(\omega)\ f(G(\omega)v). \tag{4.3}$$

Предложение 4.2. *Для случайного оператора $G : \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ корректно определен марковский оператор $\mathbf{F}[G] : B_B(\mathcal{H}) \to B_B(\mathcal{H})$ по формуле (4.3). Подпространства $C_B(\mathcal{H})$ и $C_{BWS}(\mathcal{H})$ инвариантны относительно оператора $\mathbf{F}[G]$.*

Доказательство. Определим для каждого v вероятностную меру $P(B|v)$, где $v \in \mathcal{H}$, $B \in \mathscr{B}_W$, как распределение случайного вектора $G(\omega)v$ на $\mathcal{H}$. Тогда действие оператора $\mathbf{F}[G]$ имеет вид $f(v) \mapsto \int P(d\psi|v)\ f(\psi)$, он является марковским. Легко видеть, что ограниченные слабо секвенциально непрерывные функции переводят $\mathscr{B}_W$–борелевские множества в борелевские на $\mathbb{C}$, поэтому лежат в $B_B(\mathcal{H})$.

Пусть последовательность $\{v_n\}$ слабо сходится к v_0 и $f \in C_{BWS}(\mathcal{H})$. Из этого следует, что $\{G(\omega)v_n\}$ п.н. слабо сходится к $G(\omega)v_0$. При $\varepsilon > 0$ объединение измеримых множеств

$$\begin{aligned}\Omega(\varepsilon, N) =&\{\omega \in \Omega : \quad |f(G(\omega)v_n) - f(G(\omega)v_0)| < \varepsilon,\ \forall n > N\}\\ =& \bigcap_{n \geqslant N} \{\omega \in \Omega : \quad |f(G(\omega)v_n) - f(G(\omega)v_0)| < \varepsilon\}\end{aligned}$$

имеет вероятность 1, поэтому при некотором N_ε выполняется

$$\mathbb{P}\left(\Omega\left(\frac{\varepsilon}{2}, N_\varepsilon\right)\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$$

и

$$|\mathbf{F}[G]f(v_n) - \mathbf{F}[G]f(v_0)| < \frac{\varepsilon}{4\|f\|}2\|f\| + \int\limits_{\Omega\left(\frac{\varepsilon}{2}, N_\varepsilon\right)} d\mathbb{P}(\omega)\ |f(G(\omega)v_n) - f(G(\omega)v_0)| < \varepsilon, \quad n > N_\varepsilon,$$

поэтому $\mathbf{F}[G]f \in C_{BWS}(\mathcal{H})$.

Для $C_B(\mathcal{H})$ утверждение доказывается аналогично. □

Аналогична схема доказательства слабой секвенциальной непрерывности характеристических функционалов случайных векторов $|\psi\rangle$. Отметим, что теорема Сазонова устанавливает необходимые и достаточные условия на характеристический функционал ([30, следствие 7.13.8]).

4.2. Полугруппы, связанные с линейным случайным блужданием на $\mathcal{H}$. Прежде чем переходить к общему случаю, представим явный вид некоторых важных полугрупп.

Предложение 4.3. *Предположим, подалгебра $\mathcal{E} \subset C_B(\mathbb{R})$ содержит функции*

$$g[a, b](x) = e^{-ax^2 + bx}, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R},$$

и определен гомоморфизм $\Upsilon : \mathcal{E} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда семейство $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ для $G_t(y) = \Upsilon(g[at,\ yb\sqrt{t}])$ для некоторых $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ относительно меры $d\mathbb{P}(y) = \dfrac{e^{-y^2}dy}{\sqrt{\pi}}$ образует полугруппу на $B_B(\mathcal{H})$.

Доказательство. Выполнены равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{F}[G_{t_1}]\mathbf{F}[G_{t_1}]f(v) &= \int \frac{dy_1 dy_2}{\pi} e^{-y_1^2} e^{-y_2^2}\ f\Big(\Upsilon(g[at_1,\ y_1 b\sqrt{t_1}])\Upsilon(g[at_2, y_2 b\sqrt{t_2}])v\Big)\\ &= \int \frac{dy_1 dy_2}{\pi} e^{-y_1^2} e^{-y_2^2}\ f\Big(\Upsilon(g[a(t_1 + t_2),\ b(y_1\sqrt{t_1} + y_2\sqrt{t_2})])v\Big)\end{aligned}$$

Если $\eta_{1,2} \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ и случайные величины $\eta_1,\ \eta_2$ независимы, то

$$\eta_1\sqrt{t_1} + \eta_2\sqrt{t_2} \sim \mathcal{N}(0, t_1 + t_2),$$

поэтому

$$\mathbf{F}[G_{t_1}]\mathbf{F}[G_{t_1}]f(v) = \int \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}\ f\Big(\Upsilon(g[a(t_1+t_2),\ by\sqrt{t_1+t_2}])v\Big) = \mathbf{F}[G_{t_1+t_2}]f(v).$$

□

Замечание 4.3. *Если для оператора $C:\mathscr{D}(C)\to\mathcal{H}$ развито функциональное исчисление, то есть определен гомоморфизм $\Upsilon_C:\mathbb{L}_\infty(\mathbb{C})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то строится полугруппа по случайным операторам вида $G_t(y)=\Upsilon_C(g[at,yb\sqrt{t}])=\exp(yb\sqrt{t}C-atC^2)$.*

Следующий результат предлагает условия, при которых операторнозначные функции $\mathbf{F}[G_t]$, и, в частности, полугруппы такого вида на $C_{BWS}(\mathcal{H})$ bi–непрерывны.

Теорема 4.1. *Дана ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}_{t\in[0,T]}$ операторов на $C_B(\mathcal{H})$.*

1. *Если выполнено*

$$\forall\varepsilon>0, r>0\quad \exists R>0,\ \text{для которого}\ \sup_{t\in[0,T]}\sup_{\|v\|\leqslant r}\mathbb{P}\Big(\|G_tv\|>R\Big)<\varepsilon, \tag{4.4}$$

то для любой bi–сходящейся последовательности $\{f_n\}$ к f_0 последовательность $\mathbf{F}[G_t]f_n$ равномерно по $t\in[0,T]$ bi–сходится к $\mathbf{F}[G_t]f_0$.

2. *Если выполнено*

$$\forall\varepsilon>0, w\in\mathcal{H}\quad \lim_{t\to t_0}\mathbb{P}\Big(\|(G_t^*-G_{t_0}^*)w\|>\varepsilon\Big)=0, \tag{4.5}$$

то для всех $f\in C_{BWS}(\mathcal{H})$ имеет место сходимость $\mathrm{bi}\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{F}[G_t]f=\mathbf{F}[G_{t_0}]f$.

Доказательство. 1) Пусть f_n bi–сходится к f. Для любых $\varepsilon>0$ и $r>0$ найдем $R_\varepsilon>0$ (зависящее также от r), что для всех $v\in B_r$ и $t\in[0,T]$ выполнено

$$\mathbb{P}\Big(\|G_t(\omega)v\|>R_\varepsilon\Big)<\frac{\varepsilon}{4C},$$

где $C=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|$. Используя множества

$$\Omega_\varepsilon^t(v)=\{\omega:\ \|G_t(\omega)v\|\leqslant R_\varepsilon\},$$

получаем оценку

$$\|\mathbf{F}[G_t]f_n(v)-\mathbf{F}[G_t]f_0(v)\|_{B_r}\leqslant\frac{\varepsilon}{4C}2C+\int\limits_{\Omega_\varepsilon^t(v)}d\mathbb{P}(\omega)\ |f_n(G_t(\omega)v)-f_0(G_t(\omega)v)|. \tag{4.6}$$

Поскольку $\|f_n-f_0\|_{B_{R_\varepsilon}}\to0$ при $n\to\infty$, правую часть неравенства (4.6) можно оценить сверху как ε для достаточно больших n. Из произвольности $\varepsilon>0$ следует выполнение первого условия bi–непрерывности в точке t_0.

2) Как прежде, имеются $\varepsilon>0$, $R_\varepsilon>0$. На шаре B_{R_ε} функция $f\in C_{BWS}(\mathcal{H})$ равномерно слабо непрерывна, то есть существуют $\delta>0$ и $w_1,\dots,w_n\in\mathcal{H}$, что из $|\langle w_l|v'-v''\rangle|<\delta$ следует $|f(v')-f(v'')|<\varepsilon$. По условию, для некоторой окрестности $U(t_0)$ для всех $t\in U(t_0)$, $\varepsilon>0, v\in B_r$ существуют множества $\Omega_\varepsilon^t(v)\subset\Omega$, что

$$\mathbb{P}(\Omega_\varepsilon^t(v))>1-2\varepsilon,\quad \Omega_\varepsilon^t(v)=\Big\{\forall l\quad \|(G_t^*-G_{t_0}^*)w_l\|<\frac{\delta}{r},\quad \|G_tv\|,\|G_{t_0}v\|\leqslant R_\varepsilon\Big\}.$$

Следовательно, на $\Omega_\varepsilon^t(v)$ выполнено $|f(G_t(\omega)v)-f(G_{t_0}(y)v)|<\varepsilon$ и

$$\Big\|(\mathbf{F}[G_t]-\mathbf{F}[G_{t_0}])f\Big\|_{B_r}\leqslant4\varepsilon\|f\|+\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, $\mathbf{F}[G_t]f$ сходится равномерно на ограниченных множествах к $\mathbf{F}[G_{t_0}]f$, что и требовалось.

□

Следствие 4.1. *Если полугруппа $\{\mathbf{T}_t\}$ на $C_{BWS}(\mathcal{H})$ имеет вид $\mathbf{T}_t = \mathbf{F}[G_t]$, удовлетворяющей условиям теоремы 4.1, то она является bi–непрерывной полугруппой на $C_{BWS}(\mathcal{H})$.*

Разумеется, сходимость $\tau \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{F}[G_t]f = \mathbf{F}[G_{t_0}]f$ может выполняться не только для $f \in C_{BWS}(\mathcal{H})$.

Пример 4.1. *Определим $\{G_t(\omega) = e^t\mathbf{I}\}$, $f(v) = \exp(-\|v\|^2)$. Тогда*
$$\mathbf{F}[G_t]f(v) = \exp\Big(-e^{2t}\|v\|^2\Big),$$
и в этом случае сходимость $\mathbf{F}[G_t]f(v) \to f(v)$ при $t \to 0$ равномерна на $\mathcal{H}$.

Более того, если функция $f \in C_B(\mathcal{H})$ такова, что $\Big\|\dfrac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t}\Big\| < C \quad \forall t \in [0,T]$, то $\mathbf{F}[G_t]f(v) \to f(v)$ при $t \to 0$ равномерно на $\mathcal{H}$.

Напомним, что bi–замыканием $\mathcal{L} \subset C_B(\mathcal{H})$ называется множество функций $f \in C_B(\mathcal{H})$, которые bi–приближаются последовательностями из $\mathcal{L}$.

Предложение 4.4. *Пусть ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ удовлетворяет условию (4.4) и*
$$\Big[\mathbf{F}[G_t], \mathbf{F}[G_s]\Big] = 0 \quad \text{для любых} \quad t, s \in [0,T].$$
Обозначим через F_G bi–замыкание множества тех функций $f \in C_B(\mathcal{H})$, для которых
$$\sup_{t\in[0,T]} \Big\|\frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t}\Big\| < \infty \quad \text{и существует} \quad \tau \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t}.$$
Тогда F_G инвариантно относительно всех операторов ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}$.

Доказательство. Пусть для $f \in C_B(\mathcal{H})$ при всех $t \in [0,T]$ выполнено
$$\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t}\Big\| \leqslant C, \qquad \tau \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t} = \theta$$

Следовательно, для произвольного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ также имеет место оценка
$$\Big\|\int d\mathbb{P}(\omega)\ \frac{f(G_t(\omega)Av) - f(Av)}{t}\Big\| \leqslant C,$$
из чего следует
$$\Big\|\int d\mathbb{P}(\omega)\ \int d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde\omega)\ \frac{f(G_t(\omega)\tilde G(\tilde\omega)v) - f(\tilde G(\tilde\omega)v)}{t}\Big\| \leqslant C$$
для случайного оператора $(\tilde G, \tilde{\mathbb{P}})$.

Теперь пусть $\varepsilon > 0$, B_r — шар радиуса r с центром в нуле, $(\tilde G, \tilde{\mathbb{P}})$ — произвольный случайный оператор. Как уже отмечалось, найдется $R_\varepsilon > 0$, что
$$\mathbb{P}\Big(\|\tilde G\| > R_\varepsilon\Big) < \frac{\varepsilon}{4C}.$$
Допустим,
$$\Big\|\int d\mathbb{P}(\omega)\ \frac{f(G_t(\omega)v) - f(v)}{t} - \theta(v)\Big\|_{B_{rR_\varepsilon}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Заметим, что из ограниченности по норме дифференциального отношения имеется оценка $\|\theta\| \leqslant C$. Тогда
$$\Big\|\int d\mathbb{P}(\omega)\ \int d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde\omega)\ \Big(\frac{f(G_t(\omega)\tilde G(\tilde\omega)v) - f(\tilde G(\tilde\omega)v)}{t} - \theta(\tilde G(\tilde\omega)v)\Big)\Big\|_{B_r} \leqslant \frac{\varepsilon}{4C}2C + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, подпространство

$$\mathcal{L}_G = \left\{ f \in C_B(\mathcal{H}) \;\middle|\; \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t} \right\| < \infty,\ \exists \tau \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t} \right\}$$

инвариантно относительно действия любого оператора $\mathbf{F}[\tilde{G}]$, если $\left[\mathbf{F}[\tilde{G}], \mathbf{F}[G_t]\right] = 0$ для любых $t \in [0,T]$, и в частности $\{\mathbf{F}[G_t]\}$. Отметим, что

$$\tau \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t} \in C_B(\mathcal{H}),$$

как bi–предел последовательности функций из $C_B(\mathcal{H})$.

Теперь возьмем $f \in F_G$ и bi–приближающую ее последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_G$. Будем считать, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = C$. Тогда для случайного оператора $(\tilde{G}, \tilde{\mathbb{P}})$ имеем

$$\|\mathbf{F}[\tilde{G}]f - \mathbf{F}[\tilde{G}]f_n\| \leqslant C,$$

а τ–сходимость $\mathbf{F}[\tilde{G}]f_n \in \mathcal{L}_G$ к $\mathbf{F}[\tilde{G}]f$ следует из первого пункта утверждения теоремы 4.1 применительно к постоянной ОЗФ $\{\mathbf{F}[\tilde{G}]\}$. Таким образом, F_G инвариантно относительно действия оператора $\mathbf{F}[\tilde{G}]$. □

Далее в тексте мы также будем использовать подпространство

$$\mathcal{L}_G = \left\{ f \in C_B(\mathcal{H}) \;\middle|\; \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t} \right\| < \infty,\ \exists \tau \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{F}[G_t]f - f}{t} \right\} \subset F_G. \tag{4.7}$$

Обозначим линейный оператор

$$\mathbf{L}f = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{F}[G_t] - \mathbf{I}}{t} f,$$

определенный на bi–плотном подпространстве $\mathcal{L}_G \subset F_G$.

4.3. Приближения bi–непрерывных полугрупп операторами $\mathbf{F}\left[G_{\frac{t}{N}}\right]^N$. Теорема Чернова 3.1 для bi–непрерывных полугрупп позволяет не только доказать возможность приближения полугрупп, но и построить тем самым bi–непрерывную полугруппу, если в явном виде она не была дана. Этот параграф посвящен проверке условий теоремы 3.1 в отношении к заданной ОЗФ $\mathbf{F}[G_t]\Big|_{F_G}$. А именно, нужно уметь проверять, что $\mathbf{F}[G_t]$ локально равномерно bi–равностепенно непрерывна, а для производной $\mathbf{L} = \frac{d}{dt}\mathbf{F}[G_t]\Big|_{t=0}$ с областью определения $\mathcal{L}_G$ подпространство $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L})(\mathcal{L}_G) \subset F_G$ bi–плотно для некоторого $\lambda > 0$.

Будем обозначать произведения независимых случайных операторов следующим образом:

$$(G_t^{\perp\!\!\!\perp m}, \mathbb{P}^{\otimes m}) = (\{G_t(\omega_1)\dots G_t(\omega_m)\},\ d\mathbb{P}(\omega_1)\dots d\mathbb{P}(\omega_m)).$$

Предложение 4.5. *Верны утверждения.*

1. *Пусть дана операторнозначная функция $\{G_t\}$, причем для любых $r > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется $R > 0$, для которого выполнено*

$$\sup\left\{ \mathbb{P}\Big(\|G_t^{\perp\!\!\!\perp m} v\| > R\Big),\quad \|v\| \leqslant r,\ t \in [0,T],\ m \in \mathbb{N} \right\} < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Тогда ОЗФ $\mathbf{F}[G_t]$ на $B_B(\mathcal{H})$ локально равномерно bi–равностепенно непрерывна.

2. *Условия*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|G_t\|_1 < \infty, \tag{4.9}$$

где $\|G_t\|_1 = \mathbb{E}\|G_t\|$, *достаточно для выполнения условия предыдущего пункта.*

Доказательство. Покажем достаточность (4.9) для выполнения неравенств (4.8), после чего будем доказывать локально равномерную bi–равностепенную непрерывность. Пусть B_r — шар в $\mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$ и $M = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|G_t\|_1$. Введем функцию

$$p(R) = 1 - \inf_{t\in[0,T]} \mathbb{P}(\Omega_R^t) \leqslant \frac{M}{R},$$

где $\Omega_R^t = \{\omega : \|G_t(\omega)\| \leqslant R\}$. Для $\varepsilon \in (0,1)$ положим $R_\varepsilon = \max(1, (M/\varepsilon)^{1/\varepsilon})$, тогда $\forall R > R_\varepsilon$, с одной стороны, при $s \in [0,\varepsilon]$ по неравенству Бернулли

$$(1 - p(R^s))^s \geqslant \left(1 - \frac{M}{R^s}\right)^s \geqslant 1 - s\frac{M}{R^s} \geqslant 1 - \varepsilon,$$

а, с другой стороны, при $s \in [\varepsilon, 1]$

$$(1 - p(R^s))^s \geqslant 1 - \frac{M}{R^s} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, при всех $R > R_\varepsilon$, $t \in [0,T]$, $m \in \mathbb{N}$, $v \in B_r$ с вероятностью не менее $1-\varepsilon$ выполняется

$$\|G_t(\omega_1)\dots G_t(\omega_m)v\| \leqslant rR_\varepsilon.$$

Перейдем непосредственно к проверке условия. Предположим, последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена по норме константой $C > 0$, и сходится равномерно к нулю на каждом ограниченном множестве. Обозначим

$$f_{nm}^t(v) = (\mathbf{F}[G_t])^m f_n(v) = \int d\mathbb{P}(\omega_1)\dots d\mathbb{P}(\omega_m) f_n(G_t(\omega_m)\dots G_t(\omega_1)v).$$

Разбивая исходы на «дальние» и «близкие», оцениваем

$$|f_{nm}^t(v)| \leqslant \varepsilon C + \sup_{v\in B_\varepsilon} |f_n(v)|.$$

Но на ограниченном множестве $B_\varepsilon = B_{rR_\varepsilon}$ последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к нулю, поэтому в силу произвольности $\varepsilon > 0$ последовательность $\{f_{nm}^t(v)\}$ равномерно по $t \in [0,T]$, $m \in \mathbb{N}$ и $v \in B_r$ сходится по $n \to \infty$ к нулю. □

Замечание 4.4. *Свойство локально равномерной bi–равностепенной непрерывности* $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ *сохраняется при ограничении на любое подпространство* $B_B(\mathcal{H})$.

Замечание 4.5. *Из конечности* $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|G_t\|_1$ *следует первое условие теоремы 4.1 равномерно для всех композиций независимых операторов* $G_t^{\perp\!\!\!\perp m}$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$.

Введем операторы, действующие на $B_B(\mathcal{H})$, по формуле

$$\mathbf{F}_{t,\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} te^{-\lambda mt}\mathbf{F}[G_t]^m, \quad t \in [0,T], \quad \lambda > 0. \tag{4.10}$$

Общий факт состоит в том, что если $\{\mathbf{F}_{\alpha,k},\ k \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ — bi–равностепенно непрерывное семейство операторов на замкнутом подпространстве $F \subset B_B(\mathcal{H})$, то для последовательностей $\{p_\alpha = (p_{\alpha,k})_k\}_\alpha$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_k |p_\alpha| = 1$, семейство $\{\mathbf{F}_\alpha\}_\alpha$, где $\mathbf{F}_\alpha f = \sum\limits_k p_{\alpha,k}\mathbf{F}_{\alpha,k}f$, также bi–равностепенно непрерывно $\forall f \in F$. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ по определению bi–равностепенной непрерывности для любого шара $B \subset \mathcal{H}$, последовательности f_n, bi–сходящейся к f_0, имеет место $\sup\limits_{\alpha,k}\|\mathbf{F}_{\alpha,k}(f_n - f_0)\|_B \to 0$ при $n \to \infty$. Очевидно, это неравенство сохранится при переходе к операторам $\{\mathbf{F}_\alpha\}$.

В нашем случае из локально равномерной bi–равностепенной непрерывности $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ следует bi–равностепенная непрерывность семейства $\{\mathbf{F}_{t,\lambda}\}$ при фиксированном $\lambda > 0$.

Предложение 4.6. *Пусть для случайной ОЗФ $\{G_t\}$ выполнено условие первого пункта предложения 4.5 и условие коммутации $\Big[\mathbf{F}[G_t], \mathbf{F}[G_s]\Big] = 0,\ \forall t, s \in [0,T]$. Подпространства $C_B(\mathcal{H}), C_{BWS}(\mathcal{H}),\ F_G$ и $\mathcal{L}_G$ инвариантны относительно $\mathbf{F}_{t,\lambda}$.*

Доказательство. Используя инвариантность $C_B(\mathcal{H}), C_{BWS}(\mathcal{H})$ и F_G относительно марковских операторов $\mathbf{F}[G_t],\ t \in [0,T]$ (предложение 4.4), их замкнутость по норме и абсолютную сходимость ряда в определении $\mathbf{F}_{t,\lambda}$, получаем инвариантность подпространств $C_B(\mathcal{H})$, $C_{BWS}(\mathcal{H})$, F_G относительно $\mathbf{F}_{t,\lambda}$.

Далее, для $\varepsilon > 0$, пользуясь неравенствами (4.8), найдем $R_\varepsilon > 0$, что с вероятностью хотя бы $1-\varepsilon$ вектор из шара B_r перейдет в шар B_{R_ε} для всех случайных операторов семейства $\{G_t^{\amalg m},\ t \in [0,T], m \in \mathbb{N}\}$. Допустим, $f \in \mathcal{L}_G$ удовлетворяет условиям

$$\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s} f - \mathbf{L}f\Big\|_{B_{R_\varepsilon}} < \varepsilon, \qquad \Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s} f\Big\| \leqslant C.$$

Тогда для любых t, m

$$\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s}\mathbf{F}[G_t]^m f\Big\| \leqslant C,$$

поскольку п.н.

$$\Big|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s} f(G_t^{\amalg m} v)\Big| \leqslant C,$$

и (используя условие коммутации)

$$\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s}\mathbf{F}[G_t]^m f - \mathbf{L}\mathbf{F}[G_t]^m f\Big\|_{B_r} < \varepsilon(C+1)$$

по той же причине. Отметим, что оценка равномерна по m и $t \in [0,T]$. Имеем

$$\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s}\mathbf{F}_{t,\lambda} f\Big\| \leqslant C\sum_{m=0}^{\infty} t e^{-\lambda m t} \leqslant \frac{CT}{1-e^{-\lambda T}}, \qquad \Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s}\mathbf{F}_{t,\lambda} f - \mathbf{L}\mathbf{F}_{t,\lambda} f\Big\|_{B_r} < \frac{\varepsilon(C+1)T}{1-e^{-\lambda T}}.$$

В итоге получаем, что $\mathbf{F}_{t,\lambda} f \in \mathcal{L}_G,\ \forall t \in [0,T]$. □

Предложение 4.7. *Пусть для случайной ОЗФ $\{G_t\}$ выполняется условие первого пункта предложения 4.5, условие коммутации, $\lambda > 0$. Тогда пространство $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L})(\mathcal{L}_G)$ bi–плотно в F_G.*

Доказательство. Заметим элементарное соотношение

$$\frac{\mathbf{F}[G_t]-\mathbf{I}}{t}\mathbf{F}_{t,\lambda} = \frac{e^{\lambda t}-1}{t}\mathbf{F}_{t,\lambda} - \mathbf{I}. \tag{4.11}$$

Пусть $\varepsilon > 0,\ f \in \mathcal{L}_G$. Существует $s_\varepsilon > 0$ такое, что для всех $s \in [0, s_\varepsilon]$

$$\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s} f - \mathbf{L}f\Big\|_{B_{R_\varepsilon}} < \varepsilon, \qquad \Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s} f\Big\| \leqslant C,$$

где $R_\varepsilon > 0$ выбран так, что

$$\mathbb{P}\Big(\|G_t^{\amalg m} v\| > R_\varepsilon, \quad \forall v : \|v\| \leqslant r\Big) < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,T],\ m \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Тогда, согласно оценкам из доказательства предложения 4.6, для $\forall t, s \in [0, s_\varepsilon]$

$$\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s}\mathbf{F}_{t,\lambda} f - \Big(\frac{e^{\lambda t}-1}{t}\mathbf{F}_{t,\lambda} f - f\Big)\Big\|$$

$$\leqslant \Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s}\mathbf{F}_{t,\lambda}f\Big\|+\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_t]-\mathbf{I}}{t}\mathbf{F}_{t,\lambda}f\Big\|\leqslant\ 2\frac{CT}{1-e^{-\lambda T}},$$

$$\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s}\mathbf{F}_{t,\lambda}f-\Big(\frac{e^{\lambda t}-1}{t}\mathbf{F}_{t,\lambda}f-f\Big)\Big\|_{B_r}\leqslant\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_s]-\mathbf{I}}{s}\mathbf{F}_{t,\lambda}f-\mathbf{L}\mathbf{F}_{t,\lambda}f\Big\|_{B_r}$$
$$+\Big\|\frac{\mathbf{F}[G_t]-\mathbf{I}}{t}\mathbf{F}_{t,\lambda}f-\mathbf{L}\mathbf{F}_{t,\lambda}f\Big\|_{B_r}<\ 2\frac{\varepsilon(C+1)T}{1-e^{-\lambda T}}.$$

Следовательно, bi–замыкание $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L})(\mathcal{L}_G)$ содержит функцию f, к ней можно bi–приблизиться функциями $\{(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L})\mathbf{F}_{t_k,\lambda}f\}$ для последовательности $\{t_k\}$, сходящейся к нулю. □

4.4. Об одном классе дифференциальных операторов. Некоторые важные примеры полугрупп и операторнозначных функций связаны с дифференциальными операторами на пространстве функций из $\mathcal{H}$ в $\mathbb{C}$, поэтому дадим необходимые сведения о них.

Классический подход к дифференциальным операторам в целом заключается в следующем. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $F(X,Y)$ — пространство всех функций из X в Y. Функция $f\in F(X,Y)$ дифференцируема по Фреше в точке $x\in X$, если существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=df(x)\ h$$

равномерно по h из окрестности $0\in X$. При этом производная Фреше $df(x)$ является элементом пространства $\mathcal{B}(X,Y)$ непрерывных линейных отображений из X в Y. Если $f\in F(X,Y)$ дифференцируема по Фреше в каждой точке, то ее производная df принадлежит пространству $F(X,\mathcal{B}(X,Y))$. Производные Фреше высших порядков определяются по индукции. Пусть $\mathcal{B}_1(X,Y)=\mathcal{B}(X,Y)$, и определяемые для всех $n\in\mathbb{N}$ пространства $\mathcal{B}_{n+1}(X,Y)=\mathcal{B}(X,\mathcal{B}_n(X,Y))$ — нормированные пространства относительно операторной нормы; обозначим $d^1f:=df$. Если f имеет производные $df, d^2f,\dots,d^{n-1}f$ в некоторой окрестности точки $x\in X$, причем отображение $x\mapsto d^{n-1}f(x)$ дифференцируемо по Фреше в точке x, то производной порядка $n>1$, $d^nf(x)$, в точке x называется производная Фреше $d(d^{n-1}f)(x)$ функции $d^{n-1}f$, действующей из пространства X в $\mathcal{B}_{n-1}(X,Y)$. Пространство $\mathcal{B}_n(X,Y)$ естественным образом вкладывается в пространство $\mathcal{L}_n(X,Y)$ n–линейных отображений $X\times\ldots\times X\to Y$, причем значения производных определяют симметричные полилинейные отображения.

Далее определяются дифференциальные операторы.

Определение 4.3 ([32], определение 7.1.1)**.** *Пусть Z — топологическое векторное пространство и F_n — некоторое пространство, состоящее из n раз дифференцируемых по Фреше в каждой точке $x\in X$ функций $X\to Y$. Отображение $\mathcal{D}: F_n\to F(X,Z)$ называется дифференциальным оператором n-ого порядка, если существует такое отображение*

$$\theta: X\to\mathcal{L}(\mathcal{B}_n(X,Y),Z),\quad x\mapsto\theta_x, \tag{4.13}$$

что для $\forall x\in X$, $f\in F_n$ имеет место

$$(\mathbf{D}f)(x)=\theta_x(d^nf(x)). \tag{4.14}$$

Всюду далее будет рассматриваться случай, когда $X=\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ — овеществление комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}$, $Y=\mathbb{C}$ или $Y=\mathbb{R}$. На $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ скалярное произведение индуцировано скалярным произведением в $\mathcal{H}$: $\langle w|v\rangle_{\mathbb{R}}=\mathrm{Re}\langle w|v\rangle$. Однако, несмотря на различие пространств $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, пространства функций на них $F(\mathcal{H},Y)$ и $F(\mathcal{H}_{\mathbb{R}},Y)$ для любого множества Y естественно изоморфны. Скалярное произведение на комплексификации пространства $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ и его тензорных степенях будем обозначать скобками $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$.

Пример 4.2. *Пусть $A_n : \mathscr{D}(A_n) \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\otimes n}$ — (возможно, не ограниченный) оператор на гильбертовом тензорном произведении $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\otimes n}$, F — пространство вещественных n раз дифференцируемых на $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ функций, для которых производная $d^n f$ в каждой точке $v \in \mathcal{H}$ как n–линейная функция допускает непрерывное продолжение на $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\otimes n}$, причем $d^n f(v) \in \mathscr{D}(A_n)$. Функционал $\theta_v : F \to \mathbb{R}$, определенный равенством*

$$\theta_v d^n f(v) = \langle A_n d^n f(v) | v^{\otimes n} \rangle_{\mathbb{R}}, \tag{4.15}$$

задает действие дифференциального оператора $\mathbf{D}(A_n) : F \to F(\mathcal{H}, \mathbb{R})$.

Пусть $A = (A_1, \ldots, A_n)$ — набор операторов $A_k : \mathscr{D}(A_k) \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\otimes k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть F — некоторое подпространство функций $\mathcal{H} \to \mathbb{R}$, имеющих производные Фреше n-го порядка во всех точках $v \in \mathcal{H}$, каждая из которых допускает продолжение до линейного непрерывного функционала $d^n f(v) \in (\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\otimes n})^*$, $\forall v$ и $d^k f(v) \in \mathscr{D}(A_k)$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant n, v \in \mathcal{H}$. Определим дифференциальный оператор равенством $\mathbf{D}(A) f = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{D}(A_k) f$, отображающий F в $F(\mathcal{H}, \mathbb{R})$.

Эта схема позволяет распространить дифференциальный оператор $\mathbf{D}(A)$ на случай комплексных функций. Если для $f \in F(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ действительная и мнимая части лежат в подпространстве F, указанном в примере 4.2, то полагается

$$(\mathbf{D}(A) f)(v) = (\mathbf{D}(A) \operatorname{Re} f)(v) + i (\mathbf{D}(A) \operatorname{Im} f)(v). \tag{4.16}$$

Проиллюстрируем действие введенного выше дифференциального оператора $\mathbf{D}(A_n)$ на примере полиномов. Пусть подпространство $F \subset F(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ содержит мономы

$$p : v \mapsto \langle w_1 | v \rangle_{\mathbb{R}} \ldots \langle w_m | v \rangle_{\mathbb{R}},$$

для которых выполнено условие $d^n p(v) \in \mathscr{D}(A_n)$. Достаточно для этого требовать, чтобы для всех инъективных отображений $j : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ выполнялось

$$w_{j(1)} \otimes \ldots \otimes w_{j(n)} \in \mathscr{D}(A_n).$$

В этом случае легко найти, что

$$(\mathbf{D}(A_n) p)(v) = \sum_{\sigma \in S(m)} \langle A_n (w_{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma_n}) | v^{\otimes n} \rangle_{\mathbb{R}} \frac{\langle w_{\sigma_{n+1}} | v \rangle_{\mathbb{R}} \ldots \langle w_{\sigma_m} | v \rangle_{\mathbb{R}}}{(m-n)!}. \tag{4.17}$$

Проясним причины, по которым в дальнейшем будут фигурировать дифференциальные операторы второго порядка. В общем случае мы могли бы рассматривать усреднения по любым комплексным мерам конечной вариации. Для меры ν ($\nu(\Omega) = 1$) на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ с конечной полной вариацией естественным образом определяется структура вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F})$, беря в качестве $\mathbb{P} = \dfrac{|\nu|}{|\nu|(\Omega)}$. Как мы увидим ниже, с помощью усреднения по мере ν мы сможем получать ОЗФ

$$\mathbf{F}_\nu [G_t] : f(v) \mapsto \int d\nu(\omega) \ f(G_t(\omega) v),$$

производной которой может быть дифференциальный оператор любого порядка. Но если ν, положительна, при достаточно слабых технических ограничениях возможны лишь дифференциальные операторы порядка не более второго.

Пусть далее $A = (A_1, \ldots, A_n)$ — набор плотно определенных операторов

$$A_k : \mathscr{D}(A_k) \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\otimes k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$F \subset F(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ — такое пространство $n+1$ раз дифференцируемых по Фреше функций f, производные $\{d^k f(v)\}$ которых по непрерывности продолжаются на комплексное пространство $\mathbb{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\otimes k})$ с условием $d^k f(v) \in \mathbb{C}\mathscr{D}(A_k)$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$, $v \in \mathcal{H}$, а $\sup\limits_{v \in \mathcal{H}} \|d^{n+1} f(v)\| < \infty$.

Предложение 4.8. *Пусть даны конечная мера ν ($\nu(\Omega) = 1$) на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ и операторнозначная функция $\mathbf{F}_\nu[G_t]$ для которой*

1. *выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{t \to 0} \int d\nu(\omega)\ \frac{\langle w | (G_t(\omega) v - v)^{\otimes k} \rangle_{\mathbb{R}}}{k! t} = \langle A_k w | v^{\otimes k} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \forall w \in \mathscr{D}(A_k) \subset \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\otimes k},\ 1 \leqslant k \leqslant n; \quad (4.18)$$

2. *для любого $v \in \mathcal{H}$ выполняется*

$$\int d|\nu|(\omega)\ \frac{\|(G_t(\omega) - I) v\|^{n+1}}{t} \to 0$$

при $t \to 0$.

Тогда для $f \in F$ для каждого вектора $v \in \mathcal{H}$ производная $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{F}_\nu[G_t] f(v))\Big|_{t=0}$ равна $(\mathbf{D}(A) f)(v)$.

Если справедливы сходимости интегралов Бохнера

$$\lim_{t \to 0} \int d\nu(\omega)\ \frac{(G_t^*(\omega) - I)^{\otimes k} w}{k! t} = A_k w, \quad \forall w \in \mathscr{D}(A_k),\ 1 \leqslant k \leqslant n; \qquad (4.19)$$

по норме, то $\dfrac{\mathbf{F}[G_t] - \mathbf{I}}{t} f$, $f \in F$ стремится к $\mathbf{D}(A) f$ при $t \to 0$ равномерно на ограниченных множествах.

Доказательство. По формуле Тейлора (см. [30, Теорема 12.4.4]) ν–почти всюду

$$f(G_t(\omega) v) = f(v) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \langle d^k f(v) | (G_t(\omega) - I)^{\otimes k} v^{\otimes k} \rangle_{\mathbb{C}} + r_n(t, \omega, v),$$

причем

$$r_n(t, \omega, v) = \int_0^1 ds\ \frac{(1-s)^n}{n!} \langle d^{n+1} f(v) | (G_t(\omega) v - v)^{\otimes (n+1)} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Справедлива оценка

$$\frac{|r_n(t, \omega, v)|}{t} \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{\|(G_t(\omega) - I) v\|^{n+1}}{t},$$

усреднение которой по $|\nu|$ дает равномерную на шарах оценку остатка.

Применяя условие к действительной и мнимой частям f, получаем, что разность

$$\sum_{k=1}^{n} \int d\nu(\omega)\ \frac{\langle d^k f(v) | (G_t(\omega) v - v)^{\otimes k} \rangle_{\mathbb{C}}}{k! t} - \sum_{k=1}^{n} \int d\nu(\omega)\ \langle A_k d^k f(v) | v^{\otimes k} \rangle_{\mathbb{C}}$$

стремится к нулю при $t \to 0$ для каждого $v \in \mathcal{H}$. Если данная сходимость равномерна по v на шарах, то $\dfrac{\mathbf{F}[G_t] - \mathbf{I}}{t} f \to \mathbf{D}(A) f$, $\ f \in F$ при $t \to 0$ равномерно на шарах, что завершает доказательство. □

Рассмотрим случай, когда случайная ОЗФ $\{G_t\}$ имеет аналитический вид

$$G_t(\omega) = I + \sum_{k=1}^{m} t^{\frac{1}{k}} G_{k,t}(\omega), \qquad (4.20)$$

причем выполняется сходимость $\lim\limits_{t\to 0}\langle w|G_{k,t}(\omega)v\rangle = \langle L_k(\omega)w|v\rangle$ ν–почти всюду для всех w из плотного подпространства $\mathscr{D}\subset\mathcal{H}$ и любых $v\in\mathcal{H}$. Предположим также, что выполнены условия:

$$1.\quad \lim_{t\to 0}\int d\nu(\omega)\ (\langle L_k(\omega)w|v\rangle)^j = 0,\quad j<k\leqslant m,\ w\in\mathscr{D},\ v\in\mathcal{H};$$

$$2.\quad \lim_{t\to 0}\int d\nu(\omega)\ (\langle L_k(\omega)w|v\rangle)^k = \langle A_k w^{\otimes k}|v^{\otimes k}\rangle,\quad w\in\mathscr{D},\ v\in\mathcal{H}.$$

Тогда, как это следует из 4.8, для $f\in F$ имеет место

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_\nu[G_t]f(v)\Big|_{t=0} = \mathbf{D}(A)f(v)$$

для всех $v\in\mathcal{H}$.

Если $\nu\geqslant 0$, то условия предыдущего пункта выполняются лишь в случае $L_k=0$ для всех $k>2$ ν–почти всюду. Действительно, если $k>2$, $w\in\mathscr{D}$, то

$$\int d\nu(\omega)\ |\langle L_k(\omega)w|v\rangle|^2 = 0$$

равносильно

$$\langle L_k(\omega)|v\rangle = 0$$

ν–почти всюду, откуда

$$\int d\nu(\omega)\ (\langle L_k(\omega)w|v\rangle)^k = 0.$$

Это рассуждение иллюстрирует тот факт, что среди генераторов марковских полугрупп не возникает дифференциальных операторов порядка выше второго.

5. Основной результат

Переходим к формулировке основного результата. Для краткости обозначим символом (#) условие первого пункта предложения 4.5. Условие $\Big[\mathbf{F}[G_t],\mathbf{F}[G_s]\Big]=0$, $\forall t,s\in[0,T]$, будем называть условием коммутации.

Замкнутое подпространство $F_G\subset C_B(\mathcal{H})$ выбрано как bi–замыкание подпространства $\mathcal{L}_G$, определенного в соответствии с (4.7). Оно является областью определения оператора $\mathbf{L}$.

Операторы $\{\mathbf{F}_{t,\lambda},\quad t\in[0,T]\}$ $(\lambda>0)$ являются дискретным аналогом резольвенты и имеют в качестве инвариантного подпространства $\mathcal{L}_G$ при выполнении условия (#).

При этих условиях справедлива основная

Теорема 5.1. *Пусть ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ удовлетворяет условию (#) и условию коммутации. Тогда для любой функции $f\in F_G$ определено действие bi–непрерывной полугруппы $\{\mathbf{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ в пространстве F_G, причем*

$$\mathbf{T}_t f = \tau\lim_{N\to\infty}\mathbf{F}\left[G_{\frac{t}{N}}\right]^N f \tag{5.1}$$

равномерно на отрезках $\mathbb{R}_+$ по аргументу $t>0$.

Выбор пространства $(F_G,\|\cdot\|,\tau)$ уже обеспечивает нужные свойства дифференциального отношения $\dfrac{\mathbf{F}[G_t]-\mathbf{I}}{t}f$ на bi–плотном подпространстве, и если мы хотим работать с динамикой характеристических функционалов, нужно понять, вкладывается ли $C_{BWS}(\mathcal{H})$ в F_G. Однако, можно ослабить функциональные свойства полугруппы, расширив ее действие на борелевские ограниченные функции.

Теорема 5.2. *Пусть полугруппа $\{\mathbf{T}_t\}$ bi–непрерывна на $C_{BWS}(\mathcal{H})$ и аппроксимируется итерациями Чернова ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}$, удовлетворяющей условию (#). Тогда она имеет единственную расширяющую ее полугруппу $\{\mathbf{Q}_t\}$ на $B_B(\mathcal{H})$, являющуюся марковской. Более того, $\forall f \in C_B(\mathcal{H})$ выполнено $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{F}\left[G_{\frac{t}{N}}\right]^N f(v) = \mathbf{Q}_t f(v)$ для всех $v \in \mathcal{H},\ t \geqslant 0$.*

Доказательство. Напомним, что семейство случайных элементов $\{x_\alpha\}_\alpha$ на метрическом пространстве (S,ρ) называется плотным, если $\forall\varepsilon > 0$ можно найти компакт $K_\varepsilon \subset S$, что $\mathbb{P}(x_\alpha \notin K_\varepsilon) < \varepsilon$ для всех α (см. [18, гл. V, определение 4]). В нашем случае плотным при фиксированном $v \in \mathcal{H}$ согласно (#) является семейство случайных векторов $\mathcal{M}_v = \{G_t^{\amalg m} v\}$ в топологии слабой секвенциальной сходимости τ_{WS} (эта топология порождена пересечениями τ_W–открытых множеств с концентрическими шарами в $\mathcal{H}$ с целыми радиусами; τ_{WS} метризуема, а шары в ней компактны).

По теореме Прохорова ([18, гл. V, теорема 5]) множество мер случайных векторов $\mathcal{M}_v$ в $(\mathcal{H},\mathscr{B}_W)$ слабо относительно компактно, то есть из любой последовательности из $\mathcal{M}_v$ можно выбрать сходящуюся по распределению последовательность случайных векторов. Например, существует последовательность $\{N_k\} \subset \mathbb{N}$, что $G_{\frac{t}{N_k}}^{\amalg N_k} v$ сходится по распределению к некоторому случайному вектору $\psi_{v,t}$ с распределением (вероятностной мерой на $\mathcal{H}$) $\mathbb{P}_{v,t}$ (этот выбор не единственный). Более того, $\{N_k\}$ можно выбрать как подпоследовательность из любой наперед заданной последовательности. Тогда можем определить операторы $\{\mathbf{Q}_t\}$ нормы 1 из $B_B(\mathcal{H})$ в пространство всех функций,

$$(\mathbf{Q}_t f)(v) = \int d\mathbb{P}_{v,t}(\psi)\ f(\psi), \quad f \in B_B(\mathcal{H}). \tag{5.2}$$

Однако мы не доказали, что борелевские функции переходят в борелевские. Пусть последовательность $\{f_n\} \subset C_{BWS}(\mathcal{H})$ π–приближает $f_0 \in B_B(\mathcal{H})$ (то есть последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограниченна и сходится к f_0 поточечно; такой тип сходимости был введен E. Priola в работе [33], посвещенной π–непрерывным полугруппам). По теореме Лебега

$$\int d\mathbb{P}_{v,t}(\psi)\ f_n(\psi) \to \int d\mathbb{P}_{v,t}(\psi)\ f_0(\psi),$$

то есть $\mathbf{T}_t f_n$ π–сходится к $\mathbf{Q}_t f_0$ (равномерная ограниченность следует из того, что мера $\mathbb{P}_{v,t}$ вероятностная). Пространство борелевских ограниченных функций является π–замыканием $C_{BWS}(\mathcal{H})$ (индикаторные функции множеств вида $\{v:\ \langle w|v\rangle \in [a,b]\}$ π–приближаются слабо непрерывными функциями), поэтому функции $v \mapsto \mathbf{Q}_t f$, $f \in B_B(\mathcal{H})$ приближаются поточечно борелевскими функциями, значит $B_B(\mathcal{H})$ инвариантно относительно операторов $\mathbf{Q}_t$. Итак, операторы $\mathbf{Q}_t$ являются марковскими и расширяют $\mathbf{T}_t$, причем единственным образом (так как приближаются поточечно действием оператора $\mathbf{T}_t$).

Покажем, что система $\{\mathbf{Q}_t\}_{t\geqslant 0}$ является полугруппой на $B_B(\mathcal{H})$. Для произвольной $f_0 \in B_B(\mathcal{H})$ найдем последовательность $\{f_n\} \subset C_{BWS}$, π–приближающую f_0. Тогда

$$\mathbf{Q}_t\mathbf{Q}_s f_0 = \pi \lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_t\mathbf{T}_s f_n = \pi \lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{t+s} f_n = \mathbf{Q}_{t+s} f_0.$$

По построению $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$.

Выберем любую последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$. Как уже отмечалось, можно выбрать ее подпоследовательность $\{N_k\}$, для которой распределения случайных векторов $\{G_{\frac{t}{N_k}}^{\amalg N_k} v\}$ будут слабо сходиться к некоторой мере $\tilde{\mathbb{P}}_{v,t}$. Однако, в силу совпадения

$$\int d\mathbb{P}_{v,t}(\psi)\ f(\psi) = \int d\tilde{\mathbb{P}}_{v,t}(\psi)\ f(\psi)$$

на $C_{BWS}(\mathcal{H})$, получаем равенства $\tilde{\mathbb{P}}_{v,t} = \mathbb{P}_{v,t}$ и

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{F}[G_{\frac{t}{N_k}}]^{N_k} f(v) = \mathbf{Q}_t f(v).$$

Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{F}\left[G_{\frac{t}{N}}\right]^N f(v) = \mathbf{Q}_t f(v)$. □

Пример 5.1. *Случайная операторнозначная функция* $\{G_t(y) = e^{by\sqrt{t}C - atC^2}\}$ *относительно меры* $d\mathbb{P}(y) = \dfrac{dy}{\sqrt{\pi/\gamma}} e^{-\gamma y^2}$ *удовлетворяет условию* (#) *для любого самосопряженного оператора* C *на* $\mathcal{H}$, $a > 0$, $\gamma > \dfrac{b^2}{4a}$. *Это легко проверить, учитывая представление*

$$G_t(y) = e^{\frac{y^2b^2}{4a}} \exp\Big(-\Big(C\sqrt{at} - \frac{by}{2\sqrt{a}}\Big)^2\Big),$$

откуда получается

$$\frac{d\mathbb{P}(y)}{dy}\ \|G_t(y)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\gamma - \frac{b^2}{4a}\right)y^2}.$$

Используя некоторый класс ОЗФ, описанный в 5.1, имеется возможность строить аппроксимации Чернова bi–непрерывных полугрупп. Однако отдельно нужно проверять условие коммутации, которое может быть разрушено следующими операциями. А именно, можно

1. усреднять доступные ОЗФ: если ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_{\alpha,t}]\}$ при каждом α удовлетворяет (#), и дана квазивероятностная мера ограниченной вариации $d\nu(\alpha)$, то $\{\mathbf{F}_\nu[G_t] := \int d\nu(\alpha)\ \mathbf{F}[G_{\alpha,t}]\}$ удовлетворяет (#);
2. репараметризовать семейство: если ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ удовлетворяет (#) на отрезке $[0,T]$, и $s : [0,T] \to [0,S]$, то $\{\mathbf{F}[G_{s(t)}]\}$ также удовлетворяет (#), но на отрезке $[0,S]$.

Первый пункт соответствует замене вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ на $\Big(\mathcal{A}\times\Omega, \Sigma\otimes\mathscr{F}, \tilde{\mathbb{P}} := \dfrac{|\nu|}{|\nu|(\mathcal{A})}\otimes\mathbb{P}\Big)$. Подразумевается, что необходимые условия измеримости случайных операторов $\{G_{\alpha,t}(\omega)\}$ и $\zeta(\alpha) := \Big\{\sup\limits_{t\in[0,T],\ \|v\|\leqslant r} \mathbb{P}\Big(\|G_{\alpha,t}(\omega)v\| > R\Big)\Big\}$ относительно $(\Sigma\otimes\mathscr{F}, \mathscr{B}_{WOT})$ выполнены. Отображение $\alpha \mapsto \zeta(\alpha)$ является измеримым, и поэтому $\forall\varepsilon > 0$ найдутся $R_\varepsilon > 0$ и измеримое $\mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{A}$, что

$$\frac{|\nu|(\mathcal{A}_\varepsilon)}{|\nu|(\mathcal{A})} > 1 - \varepsilon$$

и $|\zeta(\alpha)| \leqslant R_\varepsilon \quad \forall\alpha\in\mathcal{A}_\varepsilon$. При этом

$$\tilde{\mathbb{P}}\Big(\alpha\in\mathcal{A}_\varepsilon,\ \|G_{\alpha,t}(\omega)v\| \leqslant R_\varepsilon\Big) \geqslant 1 - 2\varepsilon.$$

Второй пункт очевиден.

5.1. Примеры.

5.1.1. Квантовые измерения. Мы рассмотрим частный пример схемы квантовых измерений, приводящий в пределе стремления интервала $t > 0$ между измерениями с одинаковыми инструментами к нулю к непрерывному процессу в пространстве состояний, допускающий описания в терминах линейных случайных блужданий. Допустим, заданы измеримое пространство с мерой $(\mathcal{A}, \Sigma, \nu)$ и измеримые отображения $\alpha \mapsto \langle w|C_\alpha v\rangle$ для всех $w \in \mathcal{H}$, $v \in \mathscr{D}$ (подпространство $\mathscr{D}$ плотно в $\mathcal{H}$) и некоторых самосопряженных операторов $\{C_\alpha\}$. Рассмотрим вполне положительный инструмент

$$\mathbf{M}[B](\rho)=\int\limits_B d\nu(\alpha)\int\frac{dy}{\sqrt{\pi/\gamma}}e^{-\gamma y^2}\;G_{\alpha,t}(y)\rho G^*_{\alpha,t}(y), \tag{5.3}$$

где $B\in\Sigma$, $G_{\alpha,t}(y)=e^{by\sqrt{t}C_\alpha-atC_\alpha^2}$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$.

Линейное случайное блуждание с параметром t задается семейством случайных операторов $\{G_{\alpha,t}(y)\}$. Как уже было отмечено, условие (#) выполняется при $\gamma>b^2/4a$, так что остается проверить, что на некотором пространстве $\mathcal{D}_0\subset C_B(\mathcal{H})$, bi–замыкание которого содержит $C_{BWS}(\mathcal{H})$, имеет место

$$\lim_{t\to 0}\left|\left|\frac{\mathbf{F}[G_t]-\mathbf{I}}{t}f-\mathbf{L}f\right|\right|=0,\quad f\in\mathcal{D}_0. \tag{5.4}$$

Пусть

$$\lim_{t\to 0}\int d\nu(\alpha)\int\frac{dy}{\sqrt{\pi/\gamma}}e^{-\gamma y^2}\;\frac{G_{\alpha,t}(y)w-w}{t}=A_1w,\quad w\in\mathscr{D},$$
$$\lim_{t\to 0}\int d\nu(\alpha)\int\frac{dy}{\sqrt{\pi/\gamma}}e^{-\gamma y^2}\;\frac{(G_{\alpha,t}w-w)^{\otimes 2}}{2t}=A_2w^{\otimes 2},\quad w\in\mathscr{D},$$

обозначим $A=(A_1,A_2)$, и пусть $A_1\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A_2\in\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$.

Формально связь операторов A_1,A_2 со случайным оператором C_α может быть выражена формулами

$$-\Big(a-\frac{b^2}{4\gamma}\Big)\int d\nu(\alpha)\;\langle w|C_\alpha^2v\rangle=\langle A_1w|v\rangle,$$
$$\frac{b^2}{4\gamma}\int d\nu(\alpha)\;\langle w|C_\alpha v\rangle^2=\langle A_2w^{\otimes 2}|v^{\otimes 2}\rangle.$$

Образуем $\mathcal{D}_0$ как $\mathbb{C}$–линейную оболочку функций вида

$$f(v)=p(\langle w_1|v\rangle_{\mathbb{R}},\dots,\langle w_n|w\rangle_{\mathbb{R}})h(\delta\|v\|^2),$$

где $p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, $n\in\mathbb{N}$, $\delta>0$, а функция $h(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ обладает следующими условиями

1. $h(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$;
2. $\|h\|=1$;
3. $h(x)=1$ для любых $x\in[-1,1]$, и $h(x)=0$ для любых $x\in\mathbb{R}\setminus[-2,2]$.

При данных условиях функция $f(v)$ имеет ограниченные производные любого порядка, отличные от нуля лишь внутри некоторого ограниченного множества. Мы ограничились случаем, когда операторы A_1 и A_2 непрерывны, так что в каждой точке $v\in\mathcal{H}$ определено действие $(\mathbf{D}(A)f)(v)$ для $A=(A_1,A_2)$ и $\mathbf{D}(A)f\in C_B(\mathcal{H})$. Поскольку выполнено условие (4.19) предложения 4.8, на ограниченных множествах сходимость $\dfrac{\mathbf{F}[G_t]-\mathbf{I}}{t}f-\mathbf{L}f$ будет равномерной, следовательно, $f\in\mathcal{L}_G$. Осталось заметить, что любую слабо секвенциально непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать многочленами на любом ограниченном подмножестве $\mathcal{H}$, поэтому к любой $f\in C_{BWS}(\mathcal{H})$ bi–сходится некоторая последовательность из $\mathcal{D}_0$.

Тем самым, итерации Чернова построенной ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ bi–аппроксимируют некоторую bi–непрерывную полугруппу на $C_{BWS}(\mathcal{H})$, продолжающуюся до марковской полугруппы на $B_B(\mathcal{H})$, если выполнено условие коммутации, которое нужно проверять отдельно.

Тот же вывод можно получить для случая, когда A_1, A_2 — самосопряженные (не обязательно ограниченные) операторы, причем $\{e_k\}$ — ортонормированный базис собственных векторов оператора A_1, а $\{e_j \otimes e_k\}$ — ортонормированный базис собственных векторов оператора A_2. Тогда в качестве $\mathcal{D}_0$ можно взять $\mathbb{C}$–линейную оболочку функций вида $f(v) = g(\langle e_k|v\rangle_{\mathbb{R}})$, где $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Легко заметить, что $\mathbf{D}(A)f \in C_B(\mathcal{H})$ и bi–замыкание $\mathcal{D}_0$ содержит $C_{BWS}(\mathcal{H})$. То есть потенциально $\mathbf{D}(A)$ может служить генератором bi–непрерывной полугруппы. Если потребовать дополнительно, чтобы для ОЗФ $\mathbf{F}[G_t]$ было выполнено (5.4), то итерации Чернова построенной ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ также bi–аппроксимируют некоторую bi–непрерывную полугруппу согласно теоремам 5.1 и 5.2.

5.1.2. Случайное управление. Пусть случайный гамильтониан (H_α, ν) ограничен по норме, то есть ν–почти всюду для некоторой константы $M > 0$ выполнено $\|H_\alpha\| \leqslant M$. Построим случайную ОЗФ $\{G_t\}$, $G_{\alpha,t}(y) = \exp\Big(iby\sqrt{t}H_\alpha + atH_\alpha\Big)$ относительно меры $\nu \otimes \dfrac{dy}{\sqrt{\pi/\gamma}} e^{-\gamma y^2}$, для которой считаем выполненным условие коммутации.

Условие (#) очевидно следует из оценки нормы $\|G_{\alpha,t}(y)\| \leqslant e^{atM}$, существенно используется ограниченность гамильтонианов. Дифференциальные операторы аналогично определены на семействе $\mathcal{D}_0$ и имеют вид $\mathbf{D}(A)$, где $A = (A_1, A_2)$,

$$
\begin{aligned}
A_1 w &= \left(a - \frac{b^2}{4\gamma}\right) \int d\nu(\alpha)\; H_\alpha^2 w, \\
A_2 w^{\otimes 2} &= -\frac{b^2}{4\gamma} \int d\nu(\alpha)\; H_\alpha^{\otimes 2} w^{\otimes 2}, \qquad v \in \mathcal{H},
\end{aligned}
$$

и порождают bi–непрерывную полугруппу $\mathbf{T}_t$ на C_{BWS}.

5.1.3. Выполнение условия коммутации для некоммутирующих случайных ОЗФ. Было не раз отмечено, что, хоть условие коммутации существенно ограничительно, но для его выполнения не требуется п.н. коммутирования $[G_t(\omega), G_s(\omega)] = 0,\ t, s \in [0, T]$. Приведем пример, когда коммутируют марковские операторы, соответствующие случайным операторам $G = \{(p_j, G_j)\}_{j=1}^n, \tilde{G} = \{(\tilde{p}_j, \tilde{G}_j)\}_{j=1}^n$, но при этом $[G_j, \tilde{G}_k] \neq 0$ при $j \neq k$.

Положим $n = 2$ $(\dim \mathcal{H} = 2)$,

$$
\begin{aligned}
&p_1 = p_2 = \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \frac{1}{2}, \\
&G_1 = \hat{\sigma}_x, \qquad G_2 = \hat{\sigma}_z, \qquad \tilde{G}_1 = i\hat{\sigma}_y, \qquad \tilde{G}_2 = -i\hat{\sigma}_y,
\end{aligned}
$$

где $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$ — матрицы Паули. Тогда случайные операторы $G\tilde{G}$ и $\tilde{G}G$ имеют одинаковое распределение

$$
\{(p_i p_j, G_i \tilde{G}_j)\} = \{(p_i p_j, \tilde{G}_j G_i)\} \sim \left\{ \left(\frac{1}{4}, \hat{\sigma}_x\right), \left(\frac{1}{4}, -\hat{\sigma}_x\right), \left(\frac{1}{4}, \hat{\sigma}_z\right), \left(\frac{1}{4}, -\hat{\sigma}_z\right) \right\}
$$

Следовательно, имеет место коммутация $\Big[\mathbf{F}[G], \mathbf{F}[\tilde{G}]\Big] = 0$.

Этот пример позволяет сконструировать ОЗФ $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ попарно коммутирующих марковских операторов на основе некоммутирующих случайных операторов: $G_t(\omega) = I$ с вероятностью $1 - t$, и $G_t(\omega)$ равен одному из операторов $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z, i\hat{\sigma}_y, -i\hat{\sigma}_y\}$ с вероятностью $t/4$.

Заключение

Было установлено, что при выполнении условия коммутации и при естественном техническом предположении (#) на ограниченное поведение случайных операторов дискретное во времени случайное блуждание аппроксимирует непрерывный марковский однородный процесс, описывающийся полугруппой, ограничение которой на пространство ограниченных слабо секвенциально непрерывных функций обладает свойством bi–непрерывности. Важность такого пространства заключается в том, что любую борелевскую ограниченную функцию можно поточечно приблизить его элементами. Важные для приложений в квантовой механике процессы удается аппроксимировать, используя дискретные процессы с указанным выше свойством. Данный результат не только указывает способ аппроксимации, безусловно полезный при моделировании процессов, но и неявно указывает на существование полугруппы с определенным типом генератора. В общем случае вопрос о существовании полугруппы с некотором неограниченным оператором в качестве генератора не решен окончательно. Условие коммутации марковских операторов семейства $\{\mathbf{F}[G_t]\}$ оказывается наиболее ограничительным в нашем анализе, но, как показано в Примере 3, не эквивалентно коммутации случайных операторов почти наверно. Нам не удалось в данном подходе преодолеть необходимость данного требования.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю Г.Г. Амосову за большое внимание к работе, постоянные обсуждения и поддержку при подготовке к публикации, В.Ж. Сакбаеву и Б.О. Волкову за многочисленные и полезные обсуждения, Я.А. Киндеркнехт за идею использовать обобщение теоремы Чернова для bi–непрерывных полугрупп, что сыграло решающую роль при анализе проблемы, и внимание к работе.

Приложение. Некоторые известные свойства функций на гильбертовом пространстве

Слабая топология τ_W на $\mathcal{H}$ порождается пересечениями окрестностей вида

$$U(w, a, \varepsilon) = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle w|v\rangle \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}$$

и совпадает со слабой *-топологией. На подмножестве $K \subset \mathcal{H}$ слабая топология индуцируется слабой топологией на $\mathcal{H}$. Слабо непрерывной функцией называется функция, непрерывная относительно слабой топологии. Для любого замкнутого шара $B \subset \mathcal{H}$ слабая топология метризуема, а B является слабым компактом. Напомним, что функция $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ называется слабо секвенциально непрерывной, если из $\tau_W \lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_0$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n) = f(v_0)$.

Предложение 5.1. *Функция $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ слабо секвенциально непрерывна в точке $v \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда ее ограничение на любую ограниченную окрестность U точки v слабо непрерывно.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $U_r(v)$ — шар с центром v. На нем слабая топология метризуема. Поэтому слабая непрерывность равносильна слабой секвенциальной непрерывности.

$\Leftarrow$ Слабо сходящаяся последовательность $\tau_W \lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_0$ ограниченна, поэтому ее можно поместить в шаровую окрестность U. Из слабой непрерывности f на U следует $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n) = f(v_0)$. □

Для пространств ограниченных борелевских функций ($B_B(\mathcal{H})$), ограниченных непрерывных ($C_B(\mathcal{H})$), ограниченных слабо секвенциально непрерывных ($C_{BWS}(\mathcal{H})$) и ограниченных слабо непрерывных функций ($C_{BW}(\mathcal{H})$) имеется следующая цепочка включений:

$C_{BW}(\mathcal{H}) \subset C_{BWS}(\mathcal{H}) \subset C_B(\mathcal{H}) \subset B_B(\mathcal{H})$. Каждое из этих подпространств являеется банаховым относительно sup–нормы. Мы проверим это свойство для интересующего нас пространства $C_{BWS}(\mathcal{H})$.

Предложение 5.2. *Пространство $C_{BWS}(\mathcal{H})$ с* sup*–нормой является банаховым.*

Доказательство. Достаточно показать его замкнутость в $C_B(\mathcal{H})$. Возьмем

$$f_1 \in C_B(\mathcal{H}) \setminus C_{BWS}(\mathcal{H}).$$

Тогда найдется последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{H}$, сходящаяся слабо к v_0, но

$$|f_1(v_n) - f_1(v_0)| > \varepsilon$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда достаточно рассмотреть окрестность $U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_1)$ радиуса $\varepsilon/3$ элемента f_1. Для любой $f_2 \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_1)$ и $\forall v \in \mathcal{H}$ выполнено $|f_1(v) - f_2(v)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$|f_2(v_n) - f_2(v_0)| \geqslant |f_1(v_n) - f_1(v_0)| - |f_1(v_n) - f_2(v_n)| - |f_1(v_0) - f_2(v_0)| > \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.5}$$

откуда следует отсутствие слабой секвенциальной непрерывности f_2. □

Слабая равномерная непрерывность функции $f : K \to \mathbb{C}$ выражается тем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$, $w_1, \ldots w_n \in \mathcal{H}$, что из $|\langle w_k | v' - v'' \rangle| < \delta$ $\forall k = 1, \ldots, n$, $v', v'' \in K$ следует $|f(v') - f(v'')| < \varepsilon$. На шарах (или других слабых компактах) слабо непрерывные функции равномерно непрерывны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Accardi, Y.G. Lu, I.V. Volovich. *Quantum Theory and its Stochastic Limit.* Berlin: Springer. 2002.
2. А.С. Холево. *Квантовые случайные процессы и открытые системы.* М.: Мир. 1988.
3. Х.–П. Бройер, Ф. Петруччионе. *Теория открытых квантовых систем.* Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исслед. 2010.
4. D. Keys, J. Dustin. *Poisson stochastic master equation unravelings and the measurement problem: a quantum stochastic calculus perspective* // J. Math. Phys. **61**:3, 032101, 18 p. (2020); Erratum **63**:10, 109901 (2022).
5. S. Andréys. *The Open Quantum Brownian Motion and continual measurements* // Preprint: arXiv:1910.01504 [math-ph] (2019).
6. S.J. Weber, A. Chantasri, J. Dressel, A.N. Jordan, K.W. Murch, I. Siddiqi. *Mapping the optimal route between two quantum states* // Nature **511**, 570–573 (2014).
7. Z.K. Minev, S.O. Mundhada, S. Shankar, P. Reinhold, R. Gutierrez-Jauregui, R.J. Schoelkopf, M. Mirrahimi, H.J. Carmichael, M.H. Devoret. *To catch and reverse a quantum jump mid–flight* // Nature **570**, 200–204 (2019).
8. V.P. Belavkin. *Nondemolitionmeasurements, nonlinear filtering and dynamic programming of quantum stochastic processes* // Sophia–Antipolis: Springer–Verlag (1988).
9. О.Г. Смолянов, А. Трумен. *Уравнения Шредингера — Белавкина и ассоциированные с ними уравнения Колмогорова и Линдблада* // Теор. мат. физ. **120**:2, 193–207 (1999).
10. M. Bauer, D. Bernard, A. Tilloy. *The open quantum Brownian motion* // J. Stat. Mech. Theory Exp. **2014**:9, 09001 (2014).
11. А.С. Холево. *Квантовые системы, каналы, информация.* М.: МЦНМО. 2010.
12. E.B. Davies, J.T. Lewis. *An operational approach to quantum probability* // Commun. Math. Phys. **17**, 239–260 (1970).
13. M. Ozawa. *Quantum measuring processes of continuous observables* // J. Math. Phys. **25**:1, 79–87 (1984).
14. M. Ozawa. *Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics* // Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21**:2, 279–295 (1985).

15. А.С. Холево. *Статистическая структура квантовой теории.* М.–Ижевск: Институт космических исследований. 2003.
16. C. Pellegrini. *Existence, uniqueness and approximation of a stochastic Schrödinger equation: The diffusive case* // Ann. Probab. **36**:6, 2332–2353 (2008).
17. И.И. Гихман, А.В. Скороход. *Теория случайных процессов.* Т. 1,2,3. М.: Наука. 1971, 1973, 1975.
18. А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. *Теория случайных процессов.* М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005.
19. Т. Хида. *Броуновское движение.* М.: Наука. 1987.
20. Б. Оксендаль. *Стохастические дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 2003.
21. А.Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики. В 2 т.* М.: МЦНМО. 2016.
22. G.D. Prato, J. Zabczyk. *Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces.* Cambrige: Cambridge university press. 2014.
23. Дж. Гоф, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Марковские аппроксимации эволюции квантовых систем* Докл. росс. акад. наук, мат., информ., процессы упр. **503**, 48–53 (2022).
24. А.В. Скороход. *Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы* // Усп. мат. наук **37**:6(228), 157–183 (1982).
25. А.С. Холево. *Квантовая вероятность и квантовая статистика* // Итоги науки техн. Сер. соврем. пробл. мат., фундам. направления. **83**, 5–132 (1991).
26. F. Kühnemund. *Bi–Continuous Semigroups on Spaces with Two Topologies: Theory and Applications.* Ph.D. thesis. Tübingen, 2001.
27. K.G. Engel, R.Nagel. *One–Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* New York: Springer. 2000.
28. F. Kühnemund. *Approximation of bi–continuous semigroups* // J. Approx. Theory, submitted for publication.
29. A.A. Albanese, E. Mangino. *Trotter — Kato theorems for bi–continuous semigroups and applications to Feller semigroups* // J. Math. Anal. Appl. **289**:2, 477–492 (2004).
30. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. *Действительный и функциональный анализ: университетский курс.* Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исслед. 2009.
31. O. Blasco, I. García–Bayona. *Remarks on Measurability of Operator-Valued Functions* // Mediterr. J. Math. **13**:6, 5147–5162 (2016).
32. В.И. Авербух, О.Г. Смолянов, С.В. Фомин. *Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье* // Тр. Моск. мат. общ. **27**, 249–262 (1972).
33. E. Priola. *π–Semigroups and applications* // Scuola Normale Superiore di Pisa (preprint) 9, (1998).

Андрей Владимирович Уткин,
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук,
119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8
E-mail: `utkin.av@phystech.edu`