ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 1 (2025). С. 3-24.

УДК 517.5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, ИНВАРИАНТНЫЕ ПРИ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

Аннотация. Пользуясь метрикой Пуанкаре, мы определяем конформно инвариантные интегралы для гладких финитных функций, заданных в областях гиперболического типа на расширенной плоскости. Для этих интегралов, содержащих гиперболический радиус, гладкую функцию, ее градиент или лапласиан, рассматриваются конформно инвариантные аналоги неравенств типа Харди и Реллиха с константами, зависящими от области. Мы даем явные оценки констант, пользуясь числовыми характеристиками области, а именно, максимальными модулями области и геометрической константой, входящей в линейное гиперболическое изопериметрическое неравенство.

В статье нами доказаны несколько новых утверждений. В частности, обоснован критерий положительности констант для конечно–связных областей гиперболического типа и доказаны несколько интегральных неравенств, универсальных в том смысле, что эти неравенства не содержат неопределенных констант и справедливы в любой области гиперболического типа.

В начале статьи кратко изложены свойства гиперболического радиуса, а также описаны несколько родственных результатов. В частности, указаны результаты Шмидта, Оссермана, Фернандеса и Родригеса по гиперболическим изопериметрическим неравенствам и их применениям, дана формула Элстродта — Паттерсона — Салливана для критических показателей сходимости рядов Пуанкаре — Дирихле, а также приведен результат Карлесона и Гамелина по максимальным модулям области с равномерно совершенной границей.

Ключевые слова: метрика Пуанкаре, конформное отображение, изопериметрическое неравенство, неравенство типа Харди, оператор Лапласа.

Mathematics Subject Classification: 26D10, 33C20

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. В этой области определена метрика Пуанкаре $ds = \lambda_\Omega(z)|dz|$ с гауссовой кривизной $\kappa = -4$. Напомним, что область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ является областью гиперболического типа тогда и только тогда, когда ее граница $\partial\Omega$ содержит не менее трех точек. Кратко опишем некоторые сведения о гиперболическом радиусе $R(z,\Omega) := 1/\lambda_\Omega(z)$, их можно найти в монографиях Г.М. Голузина [1], Л.В. Альфорса [2], Ф.Г. Авхадиева и К-Й. Виртса [3].

По известной формуле для гауссовой кривизны имеем:

$$R^2(z,\Omega)\,\Delta \ln R(z,\Omega) \equiv -4(=\kappa). \tag{1.1}$$

F.G. Avkhadiev, Integral inequalities invariant under conformal transformations.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00066).
Поступила 18 апреля 2024 г.

Гиперболическим радиус $R(z,\Omega)$ привлекателен тем, что он сравним с евклидовым расстоянием $\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)$ от точки $z\in\Omega$ до границы $\partial\Omega$ области:

$$R(z,\Omega)\geqslant \mathrm{dist}(z,\partial\Omega):=\min_{w\in\partial\Omega}|z-w|,\quad z\in\Omega. \tag{1.2}$$

Для ряда областей $\Omega\subset\mathbb{C}$ имеет место и оценка вида

$$\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)\geqslant \alpha(\Omega)\,R(z,\Omega),\qquad z\in\Omega,$$

где $\alpha(\Omega)=\mathrm{const}\in(0,1/2]$.

Напомним также известные примеры: $R(z,\mathbb{D})=1-|z|^2$ для единичного круга $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $R(z,P)=2\,\mathrm{dist}(z,\partial P)$ для полуплоскости, $R(z,\mathbb{D}\setminus\{0\})=2\,|z|\ln(1/|z|)$ для круга $\mathbb{D}$ с выколотым центром.

Если $\infty\in\Omega$, то вблизи этой точки $R(z,\Omega)\asymp|z|^2$.

Пусть $f:\mathbb{D}\to\Omega$ — универсальное накрывающее отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω гиперболического типа. Отметим, что функция f является голоморфной или мероморфной функцией. Если Ω — односвязная область, то f — однолистное конформное отображение, если же Ω — неодносвязная область, то накрывающее отображение является лишь локально однолистной. Для любой области $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа справедливо тождество

$$R(z,\Omega)\equiv|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2),\qquad \zeta\in\mathbb{D},\quad z=f(\zeta)\in\Omega,$$

Как следствие этого тождества можно получить уравнение (1.1) и эквивалентное уравнение Лиувилля

$$R(z,\Omega)\,\Delta R(z,\Omega)=|\nabla R(z,\Omega)|^2-4,$$

где евклидов градиент и евклидов лапласиан функции $\varphi=R(\,\cdot\,,\Omega)$ определены известными формулами

$$\nabla\varphi(z)=2\frac{\partial\varphi(z)}{\partial\overline{z}},\qquad \Delta\varphi(z)=4\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z\,\partial\overline{z}}.$$

Как доказано в недавней статье [4], справедливо тождество

$$\frac{R^3(z,\Omega)}{4}\,\Delta^2 R(z,\Omega)\equiv(1-|\zeta|^2)^4\,|S_f(\zeta)|^2,\quad z=f(\zeta)\in\Omega,$$

где $\Delta^2 R:=\Delta(\Delta R)$, функция S_f — шварциан универсального накрывающего отображения, т.е.

$$S_f(\zeta)=\frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2,\quad \zeta\in\mathbb{D}.$$

Из указанного тождества следует, что для любой области $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа функция $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$, определенная формулой $\psi(z)=\Delta R(z,\Omega)$, является субгармонической.

В области $\Omega\setminus\{\infty\}$ гиперболический радиус $R(z,\Omega)$ является вещественно аналитической функцией. Если $\infty\in\Omega$, то вблизи бесконечно удаленной точки вещественно аналитической является $|z|^{-2}R(z,\Omega)$, причем существует предел

$$\lim_{z\to\infty}\frac{R(z,\Omega)}{|z|^2}>0.$$

Если $z_0\in(\partial\Omega)\setminus\{\infty\}$, то

$$\lim_{z\to z_0}R(z,\Omega)=\lim_{z\to z_0}\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)=0.$$

Рассмотрим m–связную область $G_m\subset\Omega$ с кусочно–гладкой границей $\partial G_m\subset\Omega$, где m означает число граничных компонент. Гиперболические площадь и периметр области

$G_m \subset \Omega$ определяются следующими интегралами

$$A(G_m) = \iint\limits_{G_m} \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)}, \qquad L(\partial G_m) = \int\limits_{\partial G_m} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)}, \tag{1.3}$$

инвариантными относительно конформных преобразований Ω.

При некоторых требованиях на пару (Ω, G_m) справедливо следующее конформно инвариантное, гиперболическое изопериметрическое неравенство:

$$4\pi\, A(G_m) - \kappa\, A^2(G_m) \leqslant L^2(\partial G_m),$$

где $k = const < 0$ — кривизна гиперболической метрики, площадь $A(G_m)$ и длина $L(\partial G_m)$ определены формулами (1.3). Приведем точные формулировки.

Теорема 1.1 ([5]). *Если Ω является односвязной областью гиперболического типа и снабжена метрикой Пуанкаре кривизны $\kappa = -4$, то для любой односвязной области G_1 с кусочно–гладкой границей и компактно вложенной в область Ω имеет место неравенство*

$$4\pi\, A(G_1) + 4\, A^2(G_1) \leqslant L^2(\partial G_1),$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда G_1 — гиперболический круг.

Нетрудно показать, что справедлива следующая теорема, которая является одновременно и обобщением, и следствием теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа и снабжена метрикой Пуанкаре кривизны $\kappa = -4$, и пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$ — универсальное накрывающее отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Пусть, далее, G_m является m–связной областью с кусочно–гладкой границей и $\overline{G}_m \subset \Omega$. Если дополнительно потребуем, что в области G_m можно выделить однозначную ветвь аналитической функции $f^{-1} : \Omega \to \mathbb{D}$, то справедливо неравенство*

$$4\pi\, A(G_m) + 4\, A^2(G_m) \leqslant L^2(\partial G_m). \tag{1.4}$$

Очевидно, если область Ω является односвязной, то дополнительное условие выполняется автоматически. Напомним также, что для любой области Ω гиперболического типа существование однозначной ветви функции f^{-1} в односвязной области $G_1 \subset \Omega$ выполнено безусловно в силу теоремы о монодромии. Легко убедиться, что без дополнительного требования на G_m при $m \geq 2$ неравенство (1.4) может быть неверным даже в случае двусвязных областей Ω.

Отметим, что для достаточно гладких функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ интегралы

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dxdy, \qquad \iint\limits_{\Omega} \Delta u(z) dxdy, \qquad \iint\limits_{\Omega} |\Delta u(z)| dxdy$$

являются конформно инвариантными.

Попутно укажем, что конформно инвариантным равенством является формула Грина

$$\iint\limits_{\Omega} (u\Delta v + (\nabla u, \nabla v)) dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} u\, (\partial v/\partial n)|dz|.$$

Нетрудно построить ряд других конформно инвариантных интегралов. Для $p \in [1, \infty)$ интегралы вида $\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^p R^{p-2}(z,\Omega)\, dxdy$ являются конформно инвариантными. Действительно, если $\Phi : \Pi \to \Omega$ — однолистное конформное отображение области Π гиперболического типа на область Ω, то

$$R(z,\Omega) = |\Phi'(\zeta)| R(\zeta, \Pi), \qquad \zeta = \xi + i\eta \in \Pi, \quad z = x + iy = \Phi(\zeta) \in \Omega.$$

Следовательно,

$$\frac{|\nabla_z u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy = \frac{|\nabla_\zeta u(\Phi(\zeta))|^p}{R^{2-p}(\zeta,\Pi)}d\xi d\eta \qquad \left(\frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} = \frac{d\xi d\eta}{R^2(\zeta,\Pi)}\right). \tag{1.5}$$

В любой области гиперболического типа евклидово расстояние $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\operatorname{dist}(z_1,\partial\Omega) - \operatorname{dist}(z_2,\partial\Omega)| \leqslant |z_1 - z_2|, \qquad z_1, z_2 \in \Omega,$$

но не является гладкой функцией даже для ограниченных выпуклых областей Ω. С учетом неравенства (1.2) и других указанных свойств гиперболического радиуса, величину $R(z,\Omega)$ можно рассматривать как «гладкий заменитель» для евклидова расстояния $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ в известных интегральных неравенствах математической физики.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Символом $C_0^k(\Omega)$ обозначим семейство k раз непрерывно дифференцируемых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, компактные носители которых лежат в области Ω.

Если $\infty \in \Omega$, то непрерывность $u(z)$ и ее производных в точке $z = \infty$ означает непрерывность $u(1/z)$ и ее производных по переменным x и y $(x + iy = z)$ в точке $z = 0$.

Пусть $p \in [1, \infty)$. Пользуясь формулами (1.5) и их аналогами для лапласиана, мы определяем и изучаем ряд новых конформно инвариантных числовых характеристик для областей гиперболического типа. Базовыми из них являются следующие константы

$$c_p(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega), u \not\equiv 0} \frac{\iint\limits_\Omega |\nabla u(z)|^p R^{p-2}(z,\Omega)dxdy}{\iint\limits_\Omega |u(z)|^p R^{-2}(z,\Omega)dxdy},$$

$$c_p^{**}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^2(\Omega), u \not\equiv 0} \frac{\iint\limits_\Omega |\Delta u(z)|^p R^{2p-2}(z,\Omega)dxdy}{\iint\limits_\Omega |u(z)|^p R^{-2}(z,\Omega)dxdy}.$$

Эти характеристики $c_p(\Omega) \in [0,\infty)$ и $c_p^{**}(\Omega) \in [0,\infty)$ являются конформно инвариантными. Величина $c_p(\Omega)$ представляет собой точную константу в интегральном неравенстве

$$\iint\limits_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \geqslant c_p(\Omega) \iint\limits_\Omega \frac{|u(z)|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

а величина $c_p^{**}(\Omega)$ является точной константой в неравенстве

$$\iint\limits_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p}{R^{2-2p}(z,\Omega)}dxdy \geqslant c_p^{**}(\Omega) \iint\limits_\Omega \frac{|u(z)|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega).$$

Если $c_p(\Omega) = 0$ или $c_p^{**}(\Omega) = 0$, то соответствующее неравенство теряет смысл. Поэтому важным является поиск условий положительности этих констант. В разделах 2 и 3 мы опишем такие условия, а также приведем оценки этих констант через геометрические характеристики областей.

2. Константы $h(\Omega)$ и $c_2(\Omega)$, максимальные модули $M(\Omega)$ и $M_0(\Omega)$

Полезными в приложениях оказались линейные изопериметрические неравенства вида

$$A(G_m) \leqslant h(\Omega)\, L(\partial G_m), \qquad h(\Omega) := \sup_{G_m} \frac{A(G_m)}{L(\partial G_m)}. \tag{2.1}$$

Здесь площадь $A(G_m)$ области G_m и длина $L(\partial G_m)$ ее границы определены формулами (1.3).

Точная верхняя граница в формуле (2.1) берется по множеству конечно–связных областей G_m ($m \in \mathbb{N}$), имеющих кусочно–гладкие границы и компактно вложенных в область Ω. Очевидно, если изопериметрическое неравенство (1.4) справедливо для пары (Ω, G_m), то

$$A(G_m) \leqslant \frac{1}{2} L(\partial G_m).$$

Известно (см. обзорную статью Р. Оссермана [6]), что справедливо

Предложение 2.1. *Если Ω — односвязная или двусвязная область гиперболического типа, снабженная метрикой Пуанкаре кривизны $k = -4$, то $h(\Omega) = 1/\sqrt{-\kappa} = 1/2$.*

В [6] Р. Оссерман указывает также, что существуют области гиперболического типа, для которых $h(\Omega) = \infty$, в частности, $h(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) = \infty$.

Напомним, что символом $C_0^1(\Omega)$ мы обозначаем множество непрерывно дифференцируемых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, имеющих компактные носители в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа. Рассмотрим следующий конформно инвариантный аналог неравенства типа Харди:

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dxdy \geqslant c_2(\Omega) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^2}{R^2(z, \Omega)} dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{2.2}$$

где константа $c_2(\Omega) \geqslant 0$ предполагается наибольшей из возможных в этом месте. Точное определение $c_p(\Omega)$ для любого фиксированного $p \in [1, \infty)$ приведено выше. Ясно, что неравенство (2.2) является также гиперболическим аналогом классического неравенства Пуанкаре — Фридрихса.

Известно следующее утверждение (см. A. Ancona [7], D. Sullivan [8], J.L. Fernández [9]).

Теорема 2.1. *Постоянная $c_2(\Omega) = 1$ для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа.*

Следующее утверждение также хорошо известно (см. J. Cheeger [10], R. Osserman [6], P. Buser [11], см. также J.L. Fernández и J.M. Rodríguez [12]).

Теорема 2.2. *Для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, снабженной метрикой Пуанкаре кривизны $k = -4$, имеют место неравенства*

$$\frac{1}{4\, h^2(\Omega)} \leqslant c_2(\Omega) \leqslant \frac{3}{h(\Omega)}. \tag{2.3}$$

Отметим сначала простое

Следствие 2.1. *Для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа*

$$c_2(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow h(\Omega) < \infty.$$

Дополнением к предложению 2.1 является нетривиальное

Предложение 2.2. *Для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, снабженной метрикой Пуанкаре кривизны $k = -4$, справедливы неравенства:*

$$c_2(\Omega) \leqslant 1, \qquad h(\Omega) \geqslant \frac{1}{2}$$

Доказательство. По формуле Элстродта — Паттерсона — Салливана ([8, с. 333]):

$$c_2(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 4\beta(1-\beta), & \dfrac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 1. \end{cases}$$

где $\beta = \beta(\Omega) \in [0,1]$ — критический показатель сходимости рядов Пуанкаре — Дирихле для фундаментальной группы преобразований Ω. Из этой формулы следует, что $c_2(\Omega) \leqslant 1$ для любой области гиперболического типа. Комбинируя этот факт с нижней оценкой в неравенствах (2.3), получаем, что $h(\Omega) \geqslant 1/2$. $\square$

Далее нам потребуется конформный максимальный модуль $M(\Omega)$. Пусть Ω_2 — двусвязная область, конформно эквивалентная кольцу

$$A(a, z_0, b) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}.$$

Как обычно, считаем, что конформный модуль $\mathrm{mod}(\Omega_2)$ двусвязной области Ω_2 определяется равенством

$$\mathrm{mod}(\Omega_2) = \mathrm{mod}(A(a, z_0, b)) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (0 \leqslant a < b \leqslant \infty)$$

при соглашении: если $a = 0$ и (или) $b = \infty$, то $\mathrm{mod}(A(a, z_0, b)) = \infty$.

Определение 2.1. *Конформный максимальный модуль $M(\Omega)$ неодносвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ определяется равенством*

$$M(\Omega) = \sup_{\Omega_2} \mathrm{mod}(\Omega_2),$$

где точная верхняя граница берется по множеству двусвязных областей $\Omega_2 \subset \Omega$, каждая из которых разделяет границу Ω. В частности, если область Ω двусвязна, то $M(\Omega) = \mathrm{mod}(\Omega)$. Если Ω — односвязная область гиперболического типа, то полагаем $M(\Omega) = 0$.

Теорема 2.3 ([12]). *Для любой неодносвязной области гиперболического типа*

$$M(\Omega) < \infty \Longrightarrow c_2(\Omega) > 0. \tag{2.4}$$

Обратная импликация неверна. В частности, для единичного круга с выколотым центром имеем: $c_2(\mathbb{D} \setminus \{0\}) = 1$, но $M(\mathbb{D} \setminus \{0\}) = \mathrm{mod}(\mathbb{D} \setminus \{0\}) = \infty$. Имеется открытая проблема, поставленная в [12], 1990 г.: *описать в терминах евклидовой геометрии все те области Ω, для которых $c_2(\Omega) > 0$.* Эта проблема не решена до сих пор. Имеется только следующее частичное продвижение: *импликацию (2.4) можно заменить на равносильную импликацию: $M_0(\Omega) < \infty \Longrightarrow c_2(\Omega) > 0$, где $M_0(\Omega)$ — константа, определяемая в терминах евклидовой геометрии области Ω без привлечения конформных отображений.* Приведем определение $M_0(\Omega)$.

Определение 2.2. *Евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ неодносвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ определяется равенством:*

$$M_0(\Omega) = \sup_{A(a,z_0,b)} \quad (2\pi)^{-1} \ln(b/a),$$

где точная верхняя граница берется по множеству колец

$$A(a, z_0, b) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\},$$

таких, что $A(a, z_0, b) \subset \Omega$, $A(a, z_0, b)$ разделяет границу Ω. $z_0 \in \partial\Omega$ и $0 < a < b < \infty$.

Если таких колец нет, то полагаем $M_0(\Omega) = 0$. Полагаем также, что $M_0(\Omega) = 0$ для любой односвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа.

Если $M_0(\Omega) < \infty$, то, следуя Х. Поммеренке [13], будем говорить, что $\partial\Omega$ является равномерно совершенным множеством. Если область Ω является конечно–связной, то ее граница $\partial\Omega$ равномерно совершенна тогда и только тогда, когда она совершенна. Наиболее существенна роль евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ для бесконечно–связных областей. К тому же в этом случае равномерное совершенство границы значительно отличается от совершенства границы.

Л. Карлесон и Т.В. Гамелин [14] указали, что *масштабированием и применением нормальных семейств можно доказать следующее утверждение:*

$$M(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow M_0(\Omega) < \infty.$$

Очевидно, оценка $M_0(\Omega) \leqslant M(\Omega)$ тривиальна, а импликация

$$M_0(\Omega) < \infty \Longrightarrow M(\Omega) < \infty$$

является неожиданным утверждением. В связи с этим, обратим внимание читателя на то, что в статье [12] области, удовлетворяющие условию $M(\Omega) < \infty$, названы «модулированными» областями. Наряду с модулированными в этой статье рассмотрены отдельно и области с равномерно совершенными границами, удовлетворяющие условию $M_0(\Omega) < \infty$. Таким образом, появление нового термина «модулированные» области в статье [12] связано лишь с тем, что авторам была неизвестна импликация

$$M_0(\Omega) < \infty \Longrightarrow M(\Omega) < \infty.$$

Оценки сверху $M(\Omega)$ через $M_0(\Omega)$ встречаются в нескольких работах. Лучшие к настоящему времени оценки представлены в следующей теореме.

Теорема 2.4 ([3] для $\infty \notin \Omega$; [15] для $\infty \in \Omega$)**.** *Для любой неодносвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеют место утверждения:*

1) *если $\infty \notin \Omega$, то*
$$M_0(\Omega) \leqslant M(\Omega) \leqslant M_0(\Omega) + \frac{1}{2}.$$

2) *если $\infty \in \Omega$, то*
$$M_0(\Omega) \leqslant M(\Omega) \leqslant 2\, M_0(\Omega) + 1,$$
где постоянную 2 нельзя заменить на $2 - \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$.

В доказательстве этой теоремы, а именно, при оценках сверху $M(\Omega)$ через $M_0(\Omega)$, существенно используются равенство $\Lambda(1) = 1/2$ и следующая формула Л.В. Альфорса (см. [2, с. 75])

$$t = t(q) = \frac{1}{16q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n}} \right)^8, \qquad q = \exp(-2\pi\Lambda(t)),$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{mod}(G_t) > 0$ — модуль «кольца» О. Тейхмюллера

$$G_t := \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1, 0] \cup [t, \infty])\,, \qquad 0 < t < \infty.$$

Равномерное совершенство границы области сохраняется при однолистных конформных или K–квазиконформных преобразованиях области, так как условие $M_0(\Omega) < \infty$ эквивалентно условию $M(\Omega) < \infty$, а инвариантность условия $M(\Omega) < \infty$ при указанных преобразованиях — классический факт. Отметим также, что отсутствие конформной инвариантности евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ вполне компенсируется простотой его вычисления.

3. Основные результаты

Начнем с описания интересного явления, показывающего важное отличие неравенства (2.2) с точной константой $c_2(\Omega)$ от классического неравенства Пуанкаре — Фридрихса

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dxdy \geqslant \lambda_1(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |u(z)|^2 dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где точная константа $\lambda_1(\Omega) \in [0, \infty)$ — первое собственное значение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Хорошо известно, что для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с гладкой границей неравенство Пуанкаре — Фридрихса превращается в равенство

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dxdy = \lambda_1(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |u(z)|^2 dxdy < \infty$$

для экстремальной функции $u \not\equiv 0$ со свойствами: $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u(z) = 0$ для любого $z \in \partial\Omega$, $\Delta u(z) + \lambda_1(\Omega)\, u(z) = 0$ в области Ω.

По определению, точность константы $c_2(\Omega) \geqslant 0$ в неравенстве (2.2) влечет, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию $u_\varepsilon \in C_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую противоположному неравенству

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(z)|^2 dxdy < (c_2(\Omega) + \varepsilon) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u_\varepsilon(z)|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy.$$

В частности, для односвязных и двусвязных областей точность константы $c_2(\Omega) = 1$ в неравенстве (2.2) означает лишь, что справедливо неравенство

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dxdy \geqslant \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.1}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $u_\varepsilon \in C_0^1(\Omega)$, такая, что

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(z)|^2 dxdy < (1 + \varepsilon) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u_\varepsilon(z)|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy.$$

Для односвязной или двусвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ с гладкой границей не существует экстремальной функции $u \not\equiv 0$ со свойствами: $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u(z) = 0$ для любого $z \in \partial\Omega$ и

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dxdy = \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy < \infty.$$

Этот факт связан с наличием сингулярной весовой функции $R^{-2}(z,\Omega)$. Отсутствие экстремальной функции позволяет усилить неравенство (3.1). Несмотря на то, что $c_2(\Omega) = 1$ для односвязных и двусвязных областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, в правую часть неравенства (3.1) можно вставить дополнительное положительное слагаемое. А именно, справедлива следующая теорема об усилении неравенства (3.1) для односвязных и двусвязных областей.

Теорема 3.1 (см. [15]). 1) *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — односвязная область гиперболического типа, g — любое из однолистных конформных отображений Ω на полуплоскость $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta > 0\}$. Тогда*

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dxdy \geqslant \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^2 dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1}{4} \iint\limits_{\Omega} |u(z)|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Постоянная $1/4$ является точной, т.е. максимальной из возможных.

2) *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — двусвязная область гиперболического типа, g — любое из однолистных конформных отображений Ω на кольцо вида $\{\zeta \in \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\}$. Тогда*

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dxdy \geqslant \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^2 dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1/16}{M^2(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} |u(z)|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Постоянная $M^{-2}(\Omega)/16$ является точной, т.е. максимальной из возможных.

Важным ингредиентом доказательства этой теоремы для односвязных областей является следующее двойное усиление неравенства Харди в конечных промежутках.

Лемма 3.1 ([15]). *Пусть $v : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям*

$$v(0) = v(\pi) = 0, \qquad v \not\equiv 0, \qquad v' \in L^2(0,\pi).$$

Тогда

$$\int\limits_0^\pi v'^2(\theta)\, d\theta > \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi \frac{v^2(\theta)}{\sin^2\theta}\, d\theta + \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi v^2(\theta)\, d\theta.$$

Постоянные $1/4$ являются точными в том смысле, что ни одну из них нельзя заменить на $(1+\varepsilon)/4$ при любом $\varepsilon > 0$.

При выполнении условий леммы 3.1 результаты Харди дают лишь неравенство (см. [16]):

$$\int\limits_0^\pi v'^2(\theta)\, d\theta > \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi \frac{v^2(\theta)}{\min\{\theta^2, (\pi-\theta)^2\}}\, d\theta,$$

где

$$\frac{1}{\min\{\theta^2, (\pi-\theta)^2\}} < \frac{1}{\sin^2\theta}$$

для всех $\theta \in (0,\pi)$ в силу известных свойств синуса.

Для сравнения приведем также следующий аналог леммы 3.1.

Лемма 3.2 ([17]). *Пусть $v : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям*

$$v(0) = v(\pi) = 0, \qquad v \not\equiv 0, \qquad v' \in L^2(0,\pi).$$

Тогда

$$\int\limits_0^\pi v'^2(\theta)\, d\theta > \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi \frac{v^2(\theta)}{\min\{\theta^2, (\pi-\theta)^2\}}\, d\theta + \frac{4\lambda_0^2}{\pi^2}\int\limits_0^\pi v^2(\theta)\, d\theta,$$

где $\lambda_0 \approx 0.940$ — постоянная Лямба, определенная как первый положительный корень уравнения $J_0(x) + 2xJ_0'(x) = 0$ для функции Бесселя порядка нуль. Постоянные $1/4$ и $4\lambda_0^2/\pi^2$ являются точными.

Как известно, гиперболический радиус для кольца $A(q,0,1) = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$ при $q \in (0,1)$ выражается следующей формулой

$$R(z, A(q,0,1)) = \frac{2|z|\,\ln(1/q)}{\pi}\sin\frac{\pi\ln|z|}{\ln q}.$$

Пусть $C = \pi/\ln(1/q)$ и $0 < q < r < 1$. Заменой $\theta = -C\ln r$ в интегралах леммы 3.1, получаем утверждение, которое является основой доказательства теоремы 3.1 для двусвязных областей.

Лемма 3.3 ([15]). *Пусть $q \in (0,1)$. Для любой абсолютно непрерывной функции $v : [q,1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$v(q) = v(1) = 0, \qquad v \not\equiv 0, \qquad v' \in L^2(q,1),$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_q^1 v'^2(r)\, r dr > \int\limits_q^1 \frac{v^2(r)}{\rho^2(x)}\, r dr + \frac{\pi^2}{4\ln^2 q}\int\limits_q^1 \frac{v^2(r)}{r}\, dr,$$

где

$$\rho(r) = \frac{2r\ln q}{\pi}\sin\frac{\pi\ln r}{\ln q}.$$

Постоянная $\pi^2/4$ является точной.

Отметим, что с применением лемм 3.1, 3.2 и 3.3 нами получены несколько неравенств, аналогичных неравенствам, приведенным в теореме 3.1 (см. работы [17]–[19]).

Далее рассматриваем неравенства, содержащие конформно инвариантные интегралы вида

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy,\quad \iint\limits_{\Omega}\frac{|u(z)|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy,\quad \iint\limits_{\Omega}\frac{|\Delta u(z)|^p}{R^{2-2p}(z,\Omega)}dxdy.$$

Прежде всего, рассмотрим L_p–версию неравенства (2.2):

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \geqslant c_p(\Omega)\iint\limits_{\Omega}\frac{|u(z)|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy \quad \forall u\in C_0^1(\Omega), \tag{3.2}$$

где $p\in[1,\infty)$ — фиксированный параметр. Константу $c_p(\Omega)\in[0,\infty)$ в (3.2) считаем максимальной из возможных.

Нам потребуется следующая лемма, доказанная в статье [20].

Лемма 3.4. *Пусть $1\leqslant p\leqslant q<\infty$. Тогда*

$$p\,(c_p(\Omega))^{\frac{1}{p}} \leqslant q\,(c_q(\Omega))^{\frac{1}{q}}$$

для любой области $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа. В частности, $c_1(\Omega)\leqslant 2\sqrt{c_2(\Omega)}$.

Справедлива

Теорема 3.2. *Пусть $p\in[1,\infty)$ и $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если Ω является односвязной или двусвязной областью, то $c_p(\Omega)=2^p/p^p$;*
2) *если Ω — конечно–связная область, имеющая не менее трех граничных компонент, то $c_p(\Omega)>0$ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из граничных компонент этой области является континуумом;*
3) *пусть Ω — конечно–связная или бесконечно–связная область, граница которой является равномерно совершенным множеством и имеет не менее трех компонент, тогда*

$$c_p(\Omega)\geqslant\frac{1}{p^p\,\sigma^p(\Omega)}>0,$$

где

$$\sigma(\Omega) := \pi\,M_0(\Omega)+\frac{\Gamma^4\left(\frac14\right)}{4\pi^2}$$

в случае, когда $\infty\notin\Omega$, и

$$\sigma(\Omega) := 2\pi\,M_0(\Omega)+\pi+\frac{\Gamma^4\left(\frac14\right)}{4\pi^2}$$

в случае, когда $\infty\in\Omega$, Γ — гамма функция Эйлера, $M_0(\Omega)$ — евклидов максимальный модуль.

Пункты 1 и 3 этой теоремы доказаны в нашей статье [15], пункт 2 является новым и требует доказательства.

Доказательство пункта 2 теоремы состоит из доказательства двух утверждений.

Предложение 3.1. *Пусть $m \geqslant 3$ — натуральное число. Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — m–связная область, γ_1, γ_2, …, γ_m — ее граничные компоненты, γ_m — континуум. Тогда $c_p(\Omega) > 0$ для любого $p \in [1, \infty)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.4 достаточно доказать, что $c_1(\Omega) > 0$.

Без ограничения общности можно считать, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченная круговая область, у которой каждая граничная компонента — либо окружность, либо изолированная точка. Предположим, что область Ω лежит в круге, ограниченной окружностью $\gamma_m \subset \partial\Omega$. Рассмотрим двусвязные области Ω_1, Ω_2, …, Ω_{m-1}, такие, что

$$\Omega \subset \Omega_k, \qquad \partial\Omega_k = \gamma_k \cup \gamma_m, \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad \Omega = \bigcap_{k=1}^{m-1} \Omega_k.$$

С учетом локального поведения гиперболических радиусов вблизи границы имеем: существуют положительные постоянные $\sigma_1(\Omega)$ и $\sigma_2(\Omega)$, такие, что

$$\frac{\sigma_1(\Omega)}{R(z,\Omega)} \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{R(z,\Omega_k)} \leqslant \frac{m-1}{R(z,\Omega)}, \quad \forall z \in \Omega,$$

$$\frac{\sigma_2(\Omega)}{R^2(z,\Omega)} \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{R^2(z,\Omega_k)} \leqslant \frac{m-1}{R^2(z,\Omega)}, \quad \forall z \in \Omega.$$

В силу двусвязности области Ω_k и пункта 1 теоремы имеем: константа $c_1(\Omega_k) = 2$ для любого $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Поэтому для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$, продолженной нулем на множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, будем иметь

$$(m-1) \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|}{R(z,\Omega)} dxdy \geqslant \sum_{k=1}^{m-1} \iint\limits_{\Omega_k} \frac{|\nabla u(z)|}{R(z,\Omega_k)} dxdy$$

$$\geqslant 2 \sum_{k=1}^{m-1} \iint\limits_{\Omega_k} \frac{|u(z)|}{R^2(z,\Omega_k)} dxdy \geqslant 2\sigma_2(\Omega) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|}{R^2(z,\Omega)} dxdy.$$

Следовательно,

$$c_1(\Omega) \geqslant \frac{2\sigma_2(\Omega)}{m-1} > 0,$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 3.2. *Пусть $m \geqslant 3$ — натуральное число. Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — m–связная область, каждая граничная компонента которой содержит лишь одну точку. Тогда $c_p(\Omega) = 0$ для любого $p \in [1, \infty)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.4 достаточно доказать, что константа $c_p(\Omega) = 0$ для любого $p \in (2, \infty)$. Поэтому будем считать, что число $p > 2$.

Нам потребуется функция Иоганна Бернулли, а именно, выпуклая функция $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, определенная равенствами: $g(\varepsilon) = \varepsilon^{\varepsilon}$ при $\varepsilon \in (0, \infty)$, $g(0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{\varepsilon} = 1$. Имеем

$$g(0) = g(1) = 1, \quad \min_{\varepsilon \in [0,\infty)} g(\varepsilon) = g(1/e) = \frac{1}{e^{1/e}} > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что бесконечно удаленная точка $\infty \in \Omega$, т.е. граница области имеет вид: $\partial\Omega = \{z_1, z_2, ..., z_m\} \subset \mathbb{C}$. Очевидно, $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, ..., z_m\}$.

Нам также потребуется малый параметр ε, такой, что

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := \frac{1}{2} \min_{k \neq j} |z_k - z_j|.$$

Введем следующие обозначения:

$$S_k(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_k| \leqslant \varepsilon\}, \qquad \Omega(\varepsilon) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} S_k(\varepsilon).$$

Покажем, что существует семейство вещественнозначных функций $u_\varepsilon \in C_0^1(\Omega)$, такое, что $u_\varepsilon \not\equiv 0$ и для любого фиксированного $p \in (2, \infty)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\iint\limits_{\Omega} R^{p-2}(z,\Omega)\, |\nabla u_\varepsilon(z)|^p dxdy}{\iint\limits_{\Omega} R^{-2}(z,\Omega)\, |u_\varepsilon(z)|^p dxdy} = 0,$$

что влечет равенство $c_p(\Omega) = 0$ для любого $p \in (2, \infty)$.

Рассмотрим сначала непрерывные, кусочно гладкие, положительные в области функции U_ε, определяемые равенствами

$$U_\varepsilon(z) \equiv \varepsilon^\varepsilon, \quad z \in \Omega(\varepsilon); \quad U_\varepsilon(z) = |z - z_k|^\varepsilon, \quad z \in S_k(\varepsilon) \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Построим функции $u_\varepsilon \in C_0^1(\Omega)$. Полагаем: $u_\varepsilon(z) \equiv U_\varepsilon(z)$ области $\Omega(\varepsilon)$. Для любого $z \in S_k(\varepsilon)$ определим ниже значения $u_\varepsilon(z)$ так, чтобы выполнялось неравенство:

$$|\nabla u_\varepsilon(z)| \leqslant 2|\nabla U_\varepsilon(z)|.$$

Для любого $z \in S_k(\varepsilon)$ имеем:

$$|\nabla U_\varepsilon(z)| = \varphi_\varepsilon(r) := \varepsilon r^{\varepsilon-1},$$

где $r = |z - z_k| \in [0, \varepsilon]$.

Пусть $\delta \in (0, \varepsilon/4)$. Определим функцию $\varphi_{\delta,\varepsilon} : [0, \varepsilon] \to [0, \infty)$ равенствами:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\delta,\varepsilon}(r) = 0 && \text{для} \quad r \in [0, \delta] \quad \text{и} \quad r \in [\varepsilon - \delta, \varepsilon],\\
&\varphi_{\delta,\varepsilon}(r) = \frac{(r-\delta)\varphi_\varepsilon(2\delta)}{\delta} && \text{для} \quad r \in (\delta, 2\delta],\\
&\varphi_{\delta,\varepsilon}(r) = \frac{(\varepsilon-\delta-r)\varphi_\varepsilon(\varepsilon-2\delta)}{\delta} && \text{для} \quad r \in (\varepsilon-2\delta, \varepsilon-\delta],\\
&\varphi_{\delta,\varepsilon}(r) = \varphi_\varepsilon(r) && \text{для} \quad \in (2\delta, \varepsilon - 2\delta).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\varphi_{\delta,\varepsilon}(r) \leqslant \varphi_\varepsilon(r)$ для любого $r \in [0, \varepsilon]$ и компактный носитель $\varphi_{\delta,\varepsilon}$ лежит внутри интервала $(0, \varepsilon)$. Пусть

$$\psi_{\delta,\varepsilon}(r) := \int_0^r \varphi_{\delta,\varepsilon}(t)dt, \quad r \in [0, \varepsilon].$$

Для фиксированного $\varepsilon \in (0, 1)$ интеграл

$$\psi_{\delta,\varepsilon}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \varphi_{\delta,\varepsilon}(t)dt$$

является непрерывной убывающей функцией от параметра $\delta \in (0, \varepsilon/4)$. Так как

$$\lim_{\delta\to\frac{\varepsilon}{4}} \psi_{\delta,\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{1+\varepsilon}}{2^{1+\varepsilon}}, \qquad \lim_{\delta\to 0} \psi_{\delta,\varepsilon}(\varepsilon) = \varepsilon^\varepsilon,$$

то

$$\frac{\varepsilon^{1+\varepsilon}}{2^{1+\varepsilon}} < \psi_{\delta,\varepsilon}(\varepsilon) < \varepsilon^\varepsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon/4)$, что $2\psi_{\delta,\varepsilon}(\varepsilon) = \varepsilon^\varepsilon$.

Полагаем

$$\psi_\varepsilon(r) := 2\psi_{\delta(\varepsilon),\varepsilon}(r),\ r\in[0,\varepsilon],\quad u_\varepsilon(z)=\psi_\varepsilon(|z-z_k|),\quad z\in S_k(\varepsilon)\quad (k=1,2,\dots,m).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon\in(0,1)$ определена вещественнозначная функция $u_\varepsilon\in C_0^1(\Omega)$. Далее мы будем пользоваться следующими свойствами этой функции:

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon(z)=\varepsilon^\varepsilon, \qquad |\nabla u_\varepsilon(z)|=0 && \text{для всех}\quad z\in\Omega(\varepsilon),\\ &|\nabla u_\varepsilon(z)|\leqslant 2|\nabla U_\varepsilon(z)|=2\varepsilon|z-z_k|^{\varepsilon-1} && \text{для всех}\quad z\in S_k(\varepsilon),\qquad k=1,2,\dots,m. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon\in(0,\min\{\varepsilon_0,1/e\})$. Оценим интегралы

$$X_{p\varepsilon}(\Omega) := \iint\limits_{\Omega} R^{-2}(z,\Omega)\,|u_\varepsilon(z)|^p dxdy,\quad Y_{p\varepsilon}(\Omega) := \iint\limits_{\Omega} R^{p-2}(z,\Omega)\,|\nabla u_\varepsilon(z)|^p dxdy.$$

Учитывая равенство $u_\varepsilon(z)=\varepsilon^\varepsilon$ для всех $z\in\Omega(\varepsilon)$ и неравенство $\varepsilon^\varepsilon\geqslant e^{1/e}$, получим

$$X_{p\varepsilon}(\Omega)\geqslant \varepsilon^{p\varepsilon}\iint\limits_{\Omega(\varepsilon)} R^{-2}(z,\Omega)\,dxdy \geqslant \frac{1}{e^{p/e}}\iint\limits_{\Omega(1/e)} R^{-2}(z,\Omega)\,dxdy>0\quad \forall\varepsilon\in(0,\min\{\varepsilon_0,1/e\}).$$

Имеем: $|\nabla u_\varepsilon(z)|=0$ для всех $z\in\Omega(\varepsilon)$. Кроме того,

$$|\nabla u_\varepsilon(z)|\leqslant 2|\nabla U_\varepsilon(z)|=2\varepsilon|z-z_k|^{\varepsilon-1}$$

для всех $z\in S_k(\varepsilon)$ и

$$R(z,\Omega)\asymp |z-z_k|\ln\frac{1}{|z-z_k|}$$

в достаточно малой окрестности точки z_k $(k=1,2,\dots,m)$. Поэтому будем иметь: для любого фиксированного $p\in(2,\infty)$ и достаточно малых $\varepsilon>0$

$$Y_{p\varepsilon}(\Omega)\leqslant 2\sum_{k=1}^m\iint\limits_{S_k(\varepsilon)} R^{p-2}(z,\Omega)\,|\nabla U_\varepsilon(z)|^p dxdy = 2\sum_{k=1}^m\iint\limits_{S_k(\varepsilon)} R^{p-2}(z,\Omega)\ \left(\varepsilon|z-z_k|^{\varepsilon-1}\right)^p dxdy$$

$$\asymp 4m\pi\,\varepsilon^p\int\limits_0^\varepsilon r^{p\varepsilon-p}\left(r\ln\frac{1}{r}\right)^{p-2} rdr = 4m\pi\,\varepsilon^p\int\limits_0^\varepsilon r^{2\varepsilon-1}\left(r^\varepsilon\ln\frac{1}{r}\right)^{p-2}dr =: Z_{p\varepsilon}.$$

Далее, для $r\in(0,\varepsilon)$ и $p\in(2,\infty)$

$$\left(r^\varepsilon\ln\frac{1}{r}\right)^{p-2}\leqslant\frac{1}{e^{p-2}\varepsilon^{p-2}},$$

поэтому

$$Z_{p\varepsilon}\leqslant\frac{4m\pi\,\varepsilon^2}{e^{p-2}}\int\limits_0^\varepsilon r^{2\varepsilon-1}dr=\frac{2m\pi\,\varepsilon^{1+2\varepsilon}}{e^{p-2}}=O(\varepsilon)\quad(\varepsilon\to0).$$

Таким образом, приходим к равенствам

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}Y_{p\varepsilon}(\Omega)=\lim_{\varepsilon\to0^+}Z_{p\varepsilon}=0.$$

Следовательно, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{Y_{p\varepsilon}(\Omega)}{X_{p\varepsilon}(\Omega)}=0,$$

что влечет равенство $c_p(\Omega)=0$.

Этим завершается доказательство предложения 3.2 и пункта 2 теоремы 3.2. □

В отличие от $M(\Omega)$, евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ может быть вычислен для ряда областей. Зная $M_0(\Omega)$, мы можем применить пункт 3 теоремы 3.2 и получить явные оценки снизу константы $c_p(\Omega)$. Приведем лишь один пример применения пункта 3 теоремы 3.2 к многосвязной области, граница которой состоит из несчетного множества компонент.

Пример 1. *Пусть* $\mathbb{K}$ *— классическое канторово множество, лежащее на отрезке* $[0,1]$. *Рассмотрим область* $\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{K}_1$, *где* $\mathbb{K}_1$ *— канторов частокол, определенный формулой:*

$$\mathbb{K}_1 = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{K}, \quad |y| \leqslant 1\}.$$

Тогда $M_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{K}_1) = 0$. *Следовательно, применяя теорему 3.2, получаем, что для любого* $p \in [1,\infty)$

$$c_p(\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{K}_1) \geqslant p^{-p}\left(\pi + \frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi^2}\right)^{-p} > 0.$$

Вернемся к константе $h(\Omega) \in (0,\infty]$, наименьшей величине в линейном гиперболическом изопериметрическом неравенстве вида

$$A(G_m) \leqslant h(\Omega)L(\partial G_m), \qquad \forall G_m \Subset \Omega.$$

В силу теоремы 2.2 и пункта 2 теоремы 3.2 получаем

Следствие 3.1. *Если* Ω *— конечно–связная область, имеющая не менее трех граничных компонент, то* $h(\Omega) < \infty$ *тогда и только тогда, когда хотя бы одна из граничных компонент этой области является континуумом.*

Приведем также два простых следствия.

Следствие 3.2. *Пусть* $p \in [1,\infty)$, *и пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— область гиперболического типа. Тогда равномерное совершенство границы области является достаточным, но не необходимым условием для того, чтобы* $c_p(\Omega) > 0$.

Следствие 3.3. *Предположим, что* $p \in [1,\infty)$ *и* m *— натуральное число,* $m \geqslant 3$. *Если* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная область, имеющая* m *граничных компонент, то* $c_p(\Omega) > 0$.

Отметим, что в силу пункта 1 теоремы 3.2 для любой односвязной или двусвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа и для любых $\varepsilon > 0$ и $p \in [1,\infty)$ существует функция $u_{p,\varepsilon} \in C_0^1(\Omega)$, такая, что

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u_{p,\varepsilon}(z)|^p dxdy < (1+\varepsilon)\frac{2^p}{p^p}\iint\limits_{\Omega}\frac{|u_{p,\varepsilon}(z)|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy.$$

Справедливо следующее обобщение теоремы 3.1, доказанное Р.Г. Насибуллиным [21]. Приведем его с более простым доказательством.

Теорема 3.3 (см. [21]). *Предположим, что* $p \in [2,\infty)$.

1) Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— односвязная область гиперболического типа, функция* g *— любое из однолистных конформных отображений* Ω *на полуплоскость* $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$. *Тогда для любой функции* $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \geqslant \frac{2^p}{p^p}\iint\limits_{\Omega}\frac{|u(z)|^p dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{2^{p-3}}{p^{p-1}}\iint\limits_{\Omega}|u(z)|^p\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy.$$

2) Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— двусвязная область гиперболического типа, функция* g *— любое из однолистных конформных отображений* Ω *на кольцо* $\{\zeta \in \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\}$. *Тогда для любой функции* $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \geqslant \frac{2^p}{p^p}\iint\limits_{\Omega}\frac{|u(z)|^p dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{(2/p)^{p-1}}{16M^2(\Omega)}\iint\limits_{\Omega}|u(z)|^p\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy.$$

Доказательство. При $p = 2$ эта теорема совпадает с теоремой 3.1, поэтому будем считать, что $p \in (2, \infty)$. Покажем, что в случае $p > 2$, неравенства теоремы 3.3 могут быть получены из соответствующих неравенств теоремы 3.1 с помощью некоторых преобразований функций и дополнительных оценок.

Докажем первое утверждение теоремы 3.3. Предположим, что $p > 2$, $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ является односвязной областью гиперболического типа, функция g — любое из однолистных конформных отображений Ω на полуплоскость $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta > 0\}$.

Возьмем произвольную вещественнозначную функцию $u \in C_0^1(\Omega)$. Тогда функция $v := |u|^{\frac{p}{2}}$ также принадлежит семейству $C_0^1(\Omega)$ в силу того, что $p > 2$. Применим к функции v первое неравенство теоремы 3.1. Учитывая равенства

$$v^2(z) = |u(z)|^p, \quad |\nabla v(z)|^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 |u(z)|^{p-2} |\nabla u(z)|^2,$$

получим

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{p}{2}\right)^2 |u(z)|^{p-2} |\nabla u(z)|^2 dxdy \geqslant \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^p dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1}{4} \iint\limits_{\Omega} |u(z)|^p \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy.$$

Оценим сверху интеграл, стоящей в левой части этого неравенства. Для этого положим

$$a = \frac{p^2 |\nabla u(z)|^2}{2^2 R^{\frac{2(2-p)}{p}}(z,\Omega)}, \qquad b = \frac{|u(z)|^{p-2}}{R^{\frac{2(p-2)}{p}}(z,\Omega)}, \quad z \in \Omega,$$

и применим неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{2}{p} a^{\frac{p}{2}} + \left(1 - \frac{2}{p}\right) b^{\frac{p}{p-2}}.$$

Непосредственными вычислениями получаем неравенство

$$\frac{p^{p-1}}{2^{p-1}} \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy + (1 - 2/p) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^p dxdy}{R^2(z,\Omega)}$$
$$\geqslant \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^p dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1}{4} \iint\limits_{\Omega} |u(z)|^p \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy,$$

что влечет

$$\frac{p^{p-1}}{2^{p-1}} \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geqslant \frac{2}{p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^p dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1}{4} \iint\limits_{\Omega} |u(z)|^p \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy.$$

Легко видеть, что это неравенство равносильно неравенству пункта 1 теоремы.

Ясно, что неравенство пункта 2 теоремы 3.3 доказывается аналогично. Этим и завершается доказательство теоремы 3.3. □

Рассмотрим теперь следующее конформно инвариантное неравенство для вещественнозначных функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\left(\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant c_{p,q}(\Omega) \left(\iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^q dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где постоянную $c_{p,q}(\Omega) \in [0,\infty)$ считаем точной, т.е. наибольшей из возможных. Кроме того, определим величину $h_{p,q}(\Omega)$ равенством:

$$h_{p,q}(\Omega) = \sup_{G} \left(\iint_{G} R^{-2}(z,\Omega)dxdy \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+1} \left(\int_{\partial G} R^{-1}(z,\Omega)|dz| \right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G с кусочно гладкими границами, и таким, что $\overline{G} \subset \Omega$.

Теорема 3.4. *Предположим, что* $p \in [1,2)$, $q \in [p, 2p/(2-p)]$ *и* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— односвязная область гиперболического типа. Пусть, далее,* $\mu : [1,2] \to (0,\infty)$ *— функция, определенная равенством*

$$\mu(\lambda) = \frac{(\lambda-1)^{\lambda-1}(2-\lambda)^{1-\frac{\lambda}{2}}}{2\lambda^{\frac{\lambda}{2}}\pi^{\lambda-1}}, \quad 1 < \lambda < 2,$$

с непрерывным продолжением на граничные точки:

$$\mu(1) := \lim_{\lambda \to 1^+} \mu(\lambda) = \frac{1}{2}, \qquad \mu(2) := \lim_{\lambda \to 2^-} \mu(\lambda) = \frac{1}{4\pi}.$$

Если $p = 1$ *и* $q \in [1,2]$, *то*

$$c_{1,q}(\Omega) \geqslant \frac{q^{-\frac{1}{q}}}{(\mu(q))^q}.$$

Если $p \in (1,2)$ *и* $q \in [p, 2p/(2-p)]$, *то*

$$c_{p,q}(\Omega) \geqslant \frac{q^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}}{\left(\mu\left(\frac{pq}{p-q+pq}\right)\right)^{\frac{pq}{p-q+pq}}} \left(\frac{p(q-1)}{q(p-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Доказательство. Неравенство $h_{p,q}(\Omega) < \infty$ гарантировано для односвязных областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа в силу (1.4) и ограничений на параметры p и q. Действительно, нетрудно показать, что при любом $\lambda \in [1,2]$ из гиперболического изопериметрического неравенства (1.4) вытекает оценка $A(G_m) \leqslant \mu(\lambda)\, L^{\lambda}(\partial G_m)$. Следовательно,

$$h_{p,q}(\Omega) \leqslant (\mu(\lambda(p,q))^{\lambda(p,q)}, \quad \text{где} \quad \lambda(p,q) = \frac{pq}{p-q+pq} \in [1,2].$$

С другой стороны, в статье [20] доказаны оценки:

$$c_{1,q}(\Omega) \geqslant \frac{q^{-\frac{1}{q}}}{h_{1,q}(\Omega)} \qquad \text{если} \quad q \in [1,2],$$

$$c_{p,q}(\Omega) \geqslant \frac{q^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}}{h_{p,q}(\Omega)} \left(\frac{p(q-1)}{q(p-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad \text{если} \quad p \in (1,2), \quad q \in \left[p, \frac{2p}{2-p}\right].$$

Комбинируя эти оценки с неравенством $h_{p,q}(\Omega) \leqslant (\mu(\lambda(p,q))^{\lambda(p,q)}$, получаем утверждения теоремы 3.4. □

Пользуясь теоремой Кёбе об 1/4, т.е. поточечным неравенством

$$\frac{1}{4}R(z,\Omega) \leqslant \operatorname{dist}(z,\partial\Omega),$$

справедливым для односвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа, из теоремы 3.4 при $p = 1$, $q = 2$ получаем

Следствие 3.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|\,dx\,dy}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)} \geqslant \left(\frac{\pi}{8}\iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^2\,dx\,dy}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (z = x+iy).$$

Рассмотрим теперь интегральные неравенства, связанные с лапласианом. А именно, рассмотрим конформно инвариантные неравенства, содержащие лапласиан функции $u \in C_0^2(\Omega)$ и ее градиент:

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u(z)|^p}{R^{2-2p}(z,\Omega)}dxdy \geqslant c_p^*(\Omega) \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega),$$
$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u(z)|^p}{R^{2-2p}(z,\Omega)}dxdy \geqslant c_p^{**}(\Omega) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^p}{R^{2}(z,\Omega)}dxdy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega),$$

где $p \in [1,\infty)$ — фиксированный параметр. Константы $c_p^*(\Omega)$, $c_p^{**}(\Omega)$ в этих неравенствах считаем точными, т.е. максимальными из возможных. В работах [18], [19] нами доказана

Теорема 3.5. *Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Если Ω — односвязная или двусвязная область, то $c_2^*(\Omega) = c_2^{**}(\Omega) = 1$. Если Ω — многосвязная область с равномерно совершенной границей, то $c_2^*(\Omega) > 0$ и $c_2^{**}(\Omega) > 0$. Для любой области гиперболического типа справедливы неравенства:*

$$c_2^*(\Omega) \geqslant c_2(\Omega), \qquad c_2^{**}(\Omega) \geqslant c_2(\Omega)c_2^*(\Omega)$$

Кроме того, в [18] мы доказываем, что

$$c_p^{**}(\Omega) \geqslant 4^p(p-1)^p p^{-2p} c_2^p(\Omega)$$

при $p \in [2,\infty)$. Эта оценка представлена в следующей теореме.

Теорема 3.6. *Предположим, что $p \in [2,\infty)$ и $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Если $c_2(\Omega) > 0$, то имеет место конформно инвариантное неравенство*

$$\iint\limits_{\Omega} R^{2p-2}(z,\Omega)|\Delta u(z)|^p dx\,dy \geqslant \frac{4^p(p-1)^p\, c_2^p(\Omega)}{p^{2p}} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^p dx\,dy}{R^2(z,\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^2(\Omega).$$

Из теорем 3.2 и 3.6 вытекает

Следствие 3.5. *Предположим, что $p \in [2,\infty)$ и $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Тогда константа $c_p^{**}(\Omega) > 0$ при выполнении одного из двух следующих требований:*

1) *область Ω является конечно–связной и хотя бы одна из граничных компонент этой области является континуумом;*
2) *область Ω является многосвязной и имеет равномерно совершенную границу.*

Укажем некоторые нерешенные задачи.

Вероятно, справедливы два следующих утверждения: *константа $c_2^*(\Omega) \leqslant 1$ и константа $c_2^{**}(\Omega) \leqslant 1$ для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа.* К настоящему времени автору неизвестны доказательства этих неравенств.

При $p \in [1,2)$ свойства констант $c_p^*(\Omega)$, $c_p^{**}(\Omega)$ неизвестны. Нам не удалось найти подходящие методы и все интересные вопросы о свойствах констант $c_p^*(\Omega)$, $c_p^{**}(\Omega)$ для случая $p \in [1,2)$ остаются пока без ответа.

4. Универсальные неравенства

Интегральное неравенство в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа будем называть универсальным, если выполняются три условия:

1) неравенство верно для гладких функций с компактными носителями в любой области гиперболического типа;
2) неравенство инвариантно по отношению к линейным конформным преобразованиям области, т.е. к преобразованиям вида $w = az + b$, где $a \neq 0$;
3) неравенство не содержит неопределенных констант.

Два универсальных неравенства приведены в следующей теореме.

Теорема 4.1 ([15]). *Для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа справедливы следующие утверждения.*

1) *Пусть $s \in (2, \infty)$, $p \in [2, \infty)$. Тогда*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{s-p}(z,\Omega)} dxdy \geqslant \frac{4^p (s-2)^{\frac{p}{2}}}{p^p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^p}{R^s(z,\Omega)} dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

При $p = 2$ и любом $s \in (3, \infty)$ постоянная $4^p(s-2)^{\frac{p}{2}}/p^p$ является точной для любой конечносвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с гладкой границей.

2) *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, тогда*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|(\nabla u(z), \nabla R(z,\Omega))|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} \, dxdy \geqslant \frac{4^p}{p^p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^p}{R^2(z,\Omega)} \, dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где $(\nabla u, \nabla R)$ — скалярное произведение градиентов.

Из пункта 2 этой теоремы при $p = 1$ с применением оценки

$$|\nabla R(z,\Omega)| \leqslant \frac{2R(z,\Omega)}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}$$

(см. B.G. Osgood [22]) получаем

Следствие 4.1 ([15]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Тогда справедливо универсальное неравенство*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)} \, dxdy \geqslant 2 \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|}{R^2(z,\Omega)} \, dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Для односвязных и двусвязных областей константа $c_1(\Omega) = 2$ и последнее неравенство является также следствием пункта 1 теоремы 3.2.

В недавней статье [23] нами построены несколько универсальных конформно инвариантных интегральных неравенств. Одно из них имеет вид:

$$\iint\limits_{\Omega} |\Delta u(z)| \, dxdy \geqslant \frac{2}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|^2}{1 + |u(z)|^2} \, dxdy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega), \tag{4.1}$$

где u — вещественнозначная функция. Как следствие (4.1) получаем следующее утверждение для гладких финитных функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Предложение 4.1. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Тогда справедливы следующие конформно инвариантные неравенства*

$$\iint\limits_{\Omega} |\Delta\,(sh\, u(z))| \, dxdy \geqslant \frac{2}{\pi} \iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 \, dxdy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega), \tag{4.2}$$

и

$$\iint\limits_{\Omega} |\Delta\,(\sinh\, u(z))|\, dxdy \geqslant \frac{2\, c_2(\Omega)}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u(z)|^2}{R^2(z,\Omega)}\, dxdy, \quad \forall u \in C_0^2(\Omega), \tag{4.3}$$

где sh *— гиперболический синус,* $z = x + iy$*,* u *— вещественнозначная функция.*

Доказательство. Если вещественнозначная функция $u \in C_0^2(\Omega)$, то функция $\operatorname{sh} u$ также является вещественнозначной и принадлежит семейству $C_0^2(\Omega)$. Подставляя $\operatorname{sh} u(z)$ вместо $u(z)$ в неравенстве (4.1), получаем (4.2).

Применяя неравенство (2.2) для оценки снизу интеграла Дирихле $\iint\limits_{\Omega} |\nabla u(z)|^2\, dxdy$ в неравенстве (4.2), приходим к неравенству (4.3), что завершает доказательство. □

Ясно, что неравенство (4.3) влечет содержательные неравенства в областях, для которых известны нижние оценки константы $c_2(\Omega)$. Напомним, что $c_2(\Omega) = 1$ для односвязных и двусвязных областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа и

$$c_2(\Omega) \geqslant \left(2\pi\, M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{2\pi^2}\right)^{-2}$$

для областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ с равномерно совершенными границами.

Докажем теперь универсальное неравенство, родственное линейному гиперболическому изопериметрическому неравенству.

Теорема 4.2. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— область гиперболического типа. Тогда для любой конечно–связной области* G *с кусочно гладкой границей и компактно вложенной в область* Ω *справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{G} \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\partial G} \frac{|dz|}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Применим формулу Грина

$$\iint\limits_{G} \left(u(z)\Delta v(z) + (\nabla u(z), \nabla v(z))\right) dxdy = \int\limits_{\partial G} u(z) \frac{\partial v(z)}{\partial n}\, |dz|$$

в области G к паре функций

$$u(z) \equiv 1, \qquad v(z) \equiv -\frac{1}{4} \ln R(z,\Omega).$$

Пользуясь формулой (1.1) для гауссовой кривизны при $k = -4$, получаем

$$\iint\limits_{G} \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} = \frac{1}{4} \int\limits_{\partial G} \frac{\partial \ln R(z,\Omega)}{\partial n}\, |dz|.$$

Отсюда и следует неравенство (4.4). Действительно, имеем:

$$\left| \frac{\partial \ln R(z,\Omega)}{\partial n} \right| \leqslant \frac{|\nabla R(z,\Omega)|}{R(z,\Omega)}.$$

Далее применяем оценку (см. B.G. Osgood [22])

$$|\nabla R(z,\Omega)| \leqslant 2 \frac{R(z,\Omega)}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}, \quad z \in \Omega,$$

Таким образом, теорема 4.2 доказана. □

Далее нам потребуется число

$$c_0 := \frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi^2} \approx 4.38.$$

Пользуясь предложением 2.2 и теоремой 4.2, докажем следующее

Предложение 4.2. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— область гиперболического типа, снабженная метрикой Пуанкаре кривизны* $k = -4$ *и имеющая равномерно совершенную границу. Пусть* $h(\Omega)$ *— константа линейного гиперболического изопериметрического неравенства в* Ω*. Тогда*

$$\frac{1}{2} \leqslant h(\Omega) \leqslant \pi M(\Omega) + c_0, \tag{4.5}$$

где $M(\Omega)$ *— конформный максимальный модуль области* Ω*.*

Если $\infty \notin \Omega$*, то справедливы уточненные оценки*

$$\frac{1}{2} \leqslant h(\Omega) \leqslant \pi M_0(\Omega) + c_0, \tag{4.6}$$

где $M_0(\Omega)$ *— евклидов максимальный модуль области* Ω*.*

Доказательство. Как показано в предложении 2.2, неравенство $h(\Omega) \geqslant 1/2$ имеет место для любой области гиперболического типа. Поэтому докажем лишь верхние оценки для $h(\Omega)$.

Поскольку область имеет равномерно совершенную границу, то максимальные модули $M_0(\Omega)$ и $M(\Omega)$ являются конечными величинами. Далее, пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$, т.е. $\infty \notin \Omega$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{R(z,\Omega)}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)} \leqslant 2\pi M_0(\Omega) + 2c_0, \quad \forall z \in \Omega. \tag{4.7}$$

Это неравенство обосновано в работе Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса [3]. Оно является уточнением оценок Бирдона и Поммеренке (A.E. Beardon, Ch. Pommerenke [24]).

В силу (4.4) и (4.7) для любой конечно–связной области G с кусочно гладкой границей и компактно вложенной в область Ω имеет место неравенство

$$\iint\limits_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leqslant (\pi M_0(\Omega) + c_0) \int\limits_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)}.$$

Так как число $h(\Omega)$ определено формулой (2.1) как наилучшая константа в линейном гиперболическом изопериметрическом неравенстве для области Ω, то из последнего неравенства вытекает правая оценка в (4.6), а также в (4.5) в том случае, когда $\infty \notin \Omega$.

Пусть теперь бесконечно удаленная точка $\infty \in \Omega$. Возьмем одну из точек $z_0 \in (\partial\Omega) \cap \mathbb{C}$ и рассмотрим область

$$\Omega_0 = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \frac{1}{z - z_0},\ z \in \Omega\right\} \subset \mathbb{C}.$$

В силу (4.6) имеем:

$$\frac{1}{2} \leqslant h(\Omega_0) \leqslant \pi M_0(\Omega_0) + c_0 \leqslant \pi M(\Omega_0) + c_0.$$

Отсюда следует неравенство (4.5) для случая $\infty \in \Omega$, так как в силу конформной инвариантности величин $h(\Omega)$ и $M(\Omega)$ имеют место равенства: $h(\Omega_0) = h(\Omega)$ и $M(\Omega_0) = M(\Omega)$. Этим и завершается доказательство предложения 4.2. □

По теореме 2.4 имеем оценку: $M(\Omega) \leqslant 2M_0(\Omega) + 1$. Пользуясь этой оценкой и неравенством (4.5) для области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, получаем

Следствие 4.2. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, снабженная метрикой Пуанкаре кривизны $k = -4$ и имеющая равномерно совершенную границу. Тогда*

$$\frac{1}{2} \leqslant h(\Omega) \leqslant 2\pi M_0(\Omega) + \pi + c_0,$$

где $M_0(\Omega)$ — евклидов максимальный модуль области Ω.

Обратим внимание читателя на то, что неравенство (4.7) не имеет места для всех точек области Ω, содержащей бесконечно удаленную точку. Действительно, если Ω имеет равномерно совершенную границу и $\infty \in \Omega$, то $M_0(\Omega) < \infty$ и, в то же время,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{R(z,\Omega)}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)} = \infty.$$

Следовательно, неравенство (4.7) не будет справедливо для точек $z \in \Omega$, достаточно близких к бесконечно удаленной точке.

В заключение приведем пример явной оценки $M(\Omega)$ и $h(\Omega)$ для конкретной многосвязной области, граница которой состоит из несчетного множества компонент.

Пример 2. *Пусть*

$$S = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x < 1, -\infty < y < \infty\}$$

— полоса, и пусть $\mathbb{K}_1$ — канторов частокол, определенный формулой

$$\mathbb{K}_1 = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{K}, \quad |y| \leqslant 1\},$$

где $\mathbb{K}$ — классическое канторово множество, лежащее на отрезке $[0, 1]$.

Рассмотрим область $\Omega = S \setminus \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{C}$. Нетрудно показать, что $M(S \setminus \mathbb{K}_1) > 0$ и $M_0(S \setminus \mathbb{K}_1) = 0$. Следовательно, применяя теорему 2.4 и предложение 4.2, получаем, что

$$0 < M(S \setminus \mathbb{K}_1) \leqslant \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leqslant h(S \setminus \mathbb{K}_1) \leqslant c_0 \approx 4.38.$$

Точные значения констант $M(S \setminus \mathbb{K}_1)$ и $h(S \setminus \mathbb{K}_1)$ неизвестны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Москва: Наука. 1966.
2. L.V. Ahlfors. *Conformal invariants, Topics in Geometric Function Theory.* New-York: McGraw-Hill. 1973.
3. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Schwarz — Pick Type Inequalities.* Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag. 2009.
4. F.G. Avkhadiev. *Euclidean maximum moduli of plane domains and their applications* // Complex Var. Elliptic Equ. **64**:11, 1869–1880 (2019).
5. E. Schmidt. *Über die Isoperimetrische Aufgabe im n–dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. I. Die isoperimetrischen Ungleichungen in der hyperbolichen Ebene und für Rotationskörper im n–dimensionalen hyperbolichen Raum* // Math. Z. **46**, 204–230 (1940).
6. R. Osserman. *The isoperimetric inequality* // Bull. Am. Math. Soc. **84**:6, 1182–1238 (1978).
7. A. Ancona. *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$* // J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **34**, 274–290 (1986).
8. D. Sullivan. *Related aspects of positivity in Riemannian geometry* // J. Differ. Geom. **25**, 327–351 (1987).
9. J.L. Fernández. *Domains with Strong Barrier* // Rev. Mat. Iberoam. **5**:1–2, 47–65 (1989).
10. J. Cheeger. *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian.* In: *Probl. Analysis*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 195–199 (1970).
11. P. Buser. *A note on the isoperimetric constant* // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér **4**:15, 213–230 (1982).

12. J.L. Fernández, J.M. Rodríguez. *The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Math. **15**:1, 165–183 (1990).
13. Ch. Pommerenke. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric* // Arch. Math. **32**, 192–199 (1979).
14. L. Carleson, T.W. Gamelin. *Complex dynamics.* New-York: Springer. 1993.
15. Ф.Г. Авхадиев. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения* // Мат. сб. **206**:2, 3–28 (2015).
16. Ф.Г. Авхадиев. *Интегральные неравенства Харди, их прямые обобщения и родственные неравенства* // Уфим. мат. ж. **15**:4, 3–19 (2023).
17. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. **87**:8–9, 632–642 (2007).
18. Ф.Г. Авхадиев. *Конформно инвариантные неравенства* // Итоги науки тех., Сер. Соврем. мат. прилож., Темат. обз. **142**, 28–41 (2017).
19. Ф.Г. Авхадиев. *Конформно инвариантные неравенства.* Казань: Изд–во Казанского университета. 2020.
20. Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин. *Конформные инварианты плоских областей гиперболического типа* // Уфим. мат. ж. **11**:2, 3–18 (2019).
21. R.G. Nasibullin. *Sharp conformally invariant Hardy-type inequalities with remainders* // Eurasian Math. J. **12**:3, 46–56 (2021).
22. B.G. Osgood. *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric* // Indiana Univ. Math. J. **31**:4, 449–461 (1982).
23. Ф.Г. Авхадиев. *Универсальные неравенства в областях евклидова пространства и их применения* // Уфим. мат. ж. **14**:3, 3–16 (2022).
24. A.E. Beardon, Ch. Pommerenke. *The Poincaré metric of plane domains* // J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **18**, 475–483 (1978).

Фарит Габидинович Авхадиев,
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская 18,
420008 г. Казань, Россия
E-mail: avkhadiev47@mail.ru