ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 4 (2024). С. 84-94.

УДК 517.956

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПЕРФОРАЦИИ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ: УСРЕДНЕННОЕ УСЛОВИЕ ДИРИХЛЕ

А.И. МУХАМЕТРАХИМОВА

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в многомерной области, перфорированной малыми полостями вдоль границы. Предполагается, что размеры всех полостей одного порядка, а их форма и распределение вдоль границы могут быть произвольными. Полости произвольно поделены на два множества. На границах полостей первого множества ставится условие Дирихле, на границах полостей второго множества — третье нелинейное граничное условие. На границе, вдоль которой устроена перфорация, ставится условие Неймана. Предполагается, что полости с условием Дирихле не слишком малые и расположены достаточно часто. Показано, что в таких предположениях при усреднении полости пропадают, а на границе возникает условие Дирихле. Наш основной результат — оценки разности решений усредненной и возмущенной задач в W_2^1–норме равномерно по L_2–норме правой части.

Ключевые слова: перфорация вдоль границы, эллиптический оператор, операторная оценка.

Mathematics Subject Classification: 35B25, 35B27, 35B40

1. Введение

Краевые задачи в областях, перфорированных вдоль поверхности, изучались во многих работах, см., например, статьи [1]–[7]. Перфорация описывалась малыми полостями, расположенными вдоль заданного многообразия или вдоль границы области. Размеры полостей и расстояния между ними контролировались одним или несколькими малыми параметрами. Основной целью исследований было описание поведения решений задач при стремлении малых параметров к нулю. Основные полученные результаты — доказательство сходимости решений рассматриваемых задач в нормах пространств L_2 или W_2^1 к решениям некоторых усреднённых задач для фиксированных правых частей в уравнении и граничных условиях.

Одна из интересных постановок задач с перфорацией вдоль границы заключается в том, что на границах полостей задано условие Дирихле, а на внешней границе — условие Неймана. Предполагается, что полости достаточно большие и расположены достаточно часто. В этом случае при усреднении меняется условие на внешней границе — вместо условия Неймана возникает условие Дирихле. Такие задачи рассматривались в работах [8]–[15], где была доказана сходимость решений возмущенных задач к усредненным в W_2^1–нормах для заданных правых частей в уравнении.

A.I. Mukhametrakhimova, Operator estimates for non-periodic perforation along boundary: homogenized Dirichlet condition.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00009, https://rscf.ru/project/23-11-00009/.

Поступила 25 июня 2024 г.

Упомянутые выше результаты о сходимости решений означают наличие сильной или слабой резольвентной сходимости. Более сильный результат — доказательство равномерной резольвентной сходимости и получение операторных оценок. Впервые операторные оценки были получены для уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, история этого вопроса хорошо освещена в обзорах [16] и [17]. Данные работы стимулировали аналогичные исследования для задач теории граничного усреднения: задачи с частой сменой краевых условий, задачи с быстро осциллирующей границей, задачи с перфорацией вдоль заданного многообразия, см. работы [18]–[29]. Отметим также работы [30]–[32], где операторные оценки были получены для задач с непериодической перфорацией по всей области.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в многомерной области, перфорированной вдоль границы. Предполагается, что размеры всех полостей одного порядка, а их форма и распределение вдоль границы произвольны. Полости произвольно поделены на два множества. На границах полостей первого множества ставится условие Дирихле, на границах полостей второго множества — третье нелинейное граничное условие. На границе, вдоль которой устроена перфорация, ставится условие Неймана. При усреднении полости пропадают и меняется условие на внешней границе — вместо условия Неймана возникает условие Дирихле. Основным результатом работы является оценка разности решений усредненной и возмущенной задач в W_2^1–норме равномерно по L_2–норме правой части.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, а Ω — произвольная ограниченная или неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^2. Обозначим через S связную компоненту границы Ω. Пусть ε — малый положительный параметр, $\eta=\eta(\varepsilon)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $0<\eta(\varepsilon)\leqslant 1$.

В области Ω вдоль S произвольно выберем точки M_k^ε, $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$, где $\mathbb{M}^\varepsilon$ — некоторое не более, чем счетное множество индексов. Будем считать, что выбранные точки удовлетворяют условию

$$\operatorname{dist}(M_k^\varepsilon,S)\leqslant R_0\varepsilon,$$

где R_0 — положительная константа, не зависящая от k и ε. Обозначим через $\omega_{k,\varepsilon}$, $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$ ограниченные области в $\mathbb{R}^n$ с границами класса C^2 и положим

$$\omega_k^\varepsilon:=\big\{x:\,(x-M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}\eta^{-1}(\varepsilon)\in\omega_{k,\varepsilon}\big\},\qquad \theta^\varepsilon:=\bigcup_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\omega_k^\varepsilon,\qquad \Omega^\varepsilon:=\Omega\setminus\theta^\varepsilon.$$

Полости θ^ε разделим на два подмножества

$$\theta^\varepsilon=\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}}\cup\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}},\qquad \theta^\varepsilon_\natural=\bigcup_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon_\natural}\omega_k^\varepsilon,\qquad \natural\in\{\mathrm{D},\mathrm{R}\},$$

где $\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{D}}\cap\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{R}}=\emptyset$, $\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{D}}\cup\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{R}}=\mathbb{M}^\varepsilon$.

Пусть $A_{ij}=A_{ij}(x)$, $A_i=A_i(x)$, $A_0=A_0(x)$ — функции, заданные в Ω и удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}A_{ij}\in W_\infty^1(\Omega),\qquad A_j,A_0\in L_\infty(\Omega),\qquad A_{ij}=A_{ji},\qquad i,j=1,\dots,n,\\ \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)z_i\overline{z_j}\geqslant c_0|z|^2,\qquad x\in\Omega,\qquad z=(z_1\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\end{gathered}$$

где c_0 — некоторая положительная константа, не зависящая от x и z. Будем считать, что функции A_{ij} являются вещественнозначными, а функции A_j, A_0 — комплекснозначными.

Обозначим через $a = a(x, u)$ комплекснозначную функцию, заданную для $u \in \mathbb{C}$ и $x \in \Sigma$, где $\Sigma := \{x : \operatorname{dist}(x, S) \leqslant \tau_0\}$, $\tau_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Предполагаем, что функция a является кусочно-непрерывной по $(x, u) \in \Sigma \times \mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям

$$|a(x, u_1) - a(x, u_2)| \leqslant a_0|u_1 - u_2|, \qquad a(x, 0) = 0, \tag{2.1}$$

где a_0 — некоторая константа, не зависящая от $x \in \Sigma$ и $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$.

В работе рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned} &\left(-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0 - \lambda\right) u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \\ &u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \setminus S, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}}, \\ &\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}} + a(\,\cdot\,, u_\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}}, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}} = 0 \quad \text{на} \quad S \end{aligned} \tag{2.2}$$

где f — произвольная функция из $L_2(\Omega)$, λ — вещественное число. Производная по конормали задана формулой

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j},$$

ν_i — i-ая компонента единичной нормали ν к $\partial\theta^\varepsilon \cup S$, направленная из области Ω^ε.

Целью работы является изучение асимптотического поведения решения задачи (2.2) при $\varepsilon \to 0$.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся вспомогательные обозначения и предположения. Обозначим через τ расстояние от точки до S, измеренное вдоль нормали, а через s — локальные переменные на S. Относительно S и полостей θ^ε мы делаем следующие предположения.

A1. Переменные (τ, s) корректно определены по крайней мере на множестве Σ. На этом же множестве равномерно ограничены якобианы перехода от переменных x к переменным (τ, s) и обратно, а также производные x по (τ, s) и производные (τ, s) по x вплоть до второго порядка.

Пусть $B_r(M)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке M радиуса r.

A2. Существуют точки $M_{k,\varepsilon} \in \omega_{k,\varepsilon}$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, и числа $0 < R_1 < R_2$, $b > 1$, не зависящие от ε, такие, что для достаточно малых ε выполнено:

$$\begin{aligned} &B_{R_1}(M_{k,\varepsilon}) \subset \omega_{k,\varepsilon} \subset B_{R_2}(0), \qquad B_{bR_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k) \subset \Omega, \qquad k \in \mathbb{M}^\varepsilon, \\ &B_{bR_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k) \cap B_{bR_2\varepsilon}(M^\varepsilon_i) = \emptyset, \qquad i, k \in \mathbb{M}^\varepsilon, \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Для всех k и ε множества $B_{R_2}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon}$ связны.

Пусть ρ — расстояние от точки до границы $\partial\omega_{k,\varepsilon}$, измеренное в направлении внешней нормали.

A3. Существуют фиксированные константы $\rho_0 > 0$ и локальные переменные ς на $\partial\omega_{k,\varepsilon}$ такие, что переменные (ρ, ς) корректно определены по крайней мере на множествах

$$\{x : \operatorname{dist}(x, \partial\omega_{k,\varepsilon}) \leqslant \rho_0\} \setminus \omega_{k,\varepsilon} \subseteq B_{b_* R_2}(0), \qquad b_* := \frac{b+1}{2},$$

одновременно для всех $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ и на данных множествах равномерно ограничены якобианы перехода от переменных x к переменным (ρ, ς) и обратно, а также производные x по (ρ, ς) и производные (ρ, ς) по x.

A4. Существуют числа $R_3 > bR_2$, $0 < R_4 < R_5$, $R_3 < R_5$ такие, что

$$\theta^\varepsilon \subset \Xi^\varepsilon \subset \bigcup_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{D}}} B_{R_3\varepsilon}(M^\varepsilon_k) \subset \Omega^\varepsilon, \qquad \Xi^\varepsilon := \{x:\ R_4\varepsilon < \tau < R_5\varepsilon\}.$$

Через $\mathring{W}^1_2(\Omega^\varepsilon, \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}} \cup \partial\Omega \setminus S)$ обозначим подпространство функций из $W^1_2(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega \setminus S$ и $\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}}$. Решение краевой задачи (2.2) мы понимаем в обобщенном смысле. А именно, решением задачи (2.2) называется функция $u_\varepsilon \in W^1_2(\Omega^\varepsilon)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_a(u_\varepsilon, v) - \lambda(u_\varepsilon, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = (f, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

для любых $v \in \mathring{W}^1_2(\Omega^\varepsilon, \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}} \cup \partial\Omega \setminus S)$, где

$$\mathfrak{h}_a(u_\varepsilon, v) := \mathfrak{h}_0(u_\varepsilon, v) + (a(\,\cdot\,, u_\varepsilon), v)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})},$$

$$\mathfrak{h}_0(u_\varepsilon, v) := \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^n \left(A_j\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, v\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0 u_\varepsilon, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Интеграл по границе $\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}}$ понимается в смысле следов. Ниже будет показано, что след функции $a(\,\cdot\,, u_\varepsilon)$ на $\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}}$ определен корректно, см. лемму 3.8.

Предполагаем, что ε и η связаны соотношением

$$\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \to +0, \qquad \varepsilon \to +0. \tag{2.3}$$

Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$\left(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0 - \lambda\right) u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.4}$$

Эта задача является усреднённой для задачи (2.2) при выполнении условий A4 и (2.3). Её решение также понимаем в обобщенном смысле. Обобщенным решением задачи (2.4) называется функция $u_0 \in \mathring{W}^1_2(\Omega, \partial\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(u_0, v) - \lambda(u_0, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

для любых $v \in \mathring{W}^1_2(\Omega, \partial\Omega)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения A1, A2, A3, A4 и условие (2.3). Тогда существует λ_0, не зависящее от ε, η и f, такое что при $\lambda < \lambda_0$ задачи (2.2), (2.4) однозначно разрешимы для всех $f \in L_2(\Omega)$ и верно неравенство*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W^1_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\left(\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)}\right)^{\frac12} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.5}$$

где константа C не зависит от ε, η и f, но зависит от λ.

Кратко обсудим задачу и результаты. Уравнение в задаче (2.2) является линейным эллиптическим уравнением второго порядка общего вида с переменными коэффициентами. Перфорация устраивается вдоль связной компоненты границы S, данная компонента должна быть достаточно регулярной. Строгое понятие регулярности дает предположение A1.

Перфорация вдоль S производится полостями произвольной формы, их расположение также произвольно. Поэтому данная перфорация общего вида и существенно непериодическая. Требования на форму полостей и их расположение сформулированы в предположениях A2 и A3. Предположение A2 означает, что все полости примерно одинакового размера и расположены внутри области Ω. Предположение A3 означает определенную равномерную регулярность форм полостей, а именно, оно исключает нарастающие по k осцилляции их границ.

На границах полостей задается условие Дирихле или третье нелинейное краевое условие. Выбор конкретного условия для каждой полости произволен. Единственное требование — это выполнение предположения A4, которое означает, что полости с условием Дирихле должны быть расположены достаточно часто.

Основная особенность задачи состоит в том, что на границе S ставится условие Неймана. Тогда при выполнении условия (2.3) усреднённой для (2.2) оказывается задача (2.4) с условием Дирихле на границе S вместо условия Неймана. Это известный эффект, который ранее был обнаружен в работах [8]–[15], где перфорация была периодической или локально–периодической. В нашей работе показано, что такой эффект сохраняется и в случае непериодической перфорации, причем с условиями разных типов на разных полостях. Одновременно удается существенно усилить результат о сходимости, доказав равномерную по правой части f сходимость и установив операторную оценку (2.5).

3. Вспомогательные утверждения

В данном параграфе приводятся леммы, необходимые для доказательства теоремы 2.1. Первая лемма была доказана в статье [30], см. лемму 3.2 в этой работе.

Лемма 3.1. *Пусть выполнено условие A2. Тогда для всех функций $u \in \mathring{W}_2^1(B_{b_* R_2}(0) \setminus \omega_{k,\eta}, \partial B_{b_* R_2}(0))$ верны оценки:*

$$\|u\|_{L_2(B_{b_* R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta})} \leqslant C\|\nabla u\|_{L_2(B_{b_* R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta})},$$

где C — некоторая фиксированная константа, не зависящая от u, k, η и формы полостей $\omega_{k,\eta}$.

Лемма 3.2. *При выполнении условий A2, A3 для всех $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$ и всех $u \in \mathring{W}_2^1\big(B_{b_* R_2}(0) \setminus \omega_{k,\eta}, \partial B_{b_* R_2}(0)\big)$ справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\omega_{k,\eta})} \leqslant C\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{b_* R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta})},$$

где C — положительная константа, не зависящая от параметров k, ε, η и функции u.

Доказательство этой леммы приводится в работе [28], см. лемму 3.2 в этой работе.

Обозначим: $b_\dagger := (3b+1)/4$.

Лемма 3.3. *При выполнении условий A2, A3 для всех $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$ и всех $u \in W_2^1\big(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon) \setminus \omega_k^\varepsilon\big)$ справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon)} \leqslant C\Big(\varepsilon\eta\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus\omega_k^\varepsilon)} + \varepsilon^{-1}\eta^{n-1}\|u\|^2_{L_2(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_\dagger R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))}\Big),$$

где C — положительная константа, не зависящая от параметров k, ε, η и функции u.

Эта лемма была доказана в статье [28], см. лемму 3.3 в этой работе.

Лемма 3.4. *При выполнении условий A1, A2, A3 для любой функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon)$ верна оценка*

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon)} \leqslant (C\varepsilon\eta + \delta\eta^{n-1})\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + C(\delta)\eta^{n-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где $\delta > 0$ — произвольная константа, а константы C и $C(\delta)$ не зависят от параметров ε, η, функции u, а также от формы и расположения полостей ω_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$.

Доказательство этой леммы приводится в работе [28], см. лемму 3.4 в этой работе.

Лемма 3.5. *При выполнении условия A1 для любой функции $u \in W_2^2(\Omega)$ и $|\tau| \leqslant \frac{\tau_0}{3}$ верны оценки:*

$$|u|^2 \leqslant C\tau^2 \|u\|^2_{W_2^2(-\frac{\tau_0}{2},\frac{\tau_0}{2})}, \qquad |\nabla u|^2 \leqslant C\|\nabla u\|^2_{W_2^1(-\frac{\tau_0}{2},\frac{\tau_0}{2})}.$$

Эта лемма доказывается аналогично лемме 4.1 в [27].

Лемма 3.6. *При выполнении условий A2, A4 для каждой точки x из Ξ^ε число шаров $B_{R_5\varepsilon}(M_k^\varepsilon)$, $R_5 := R_3 + (b+1)R_2$, содержащих эту точку, не превосходит некоторой абсолютной величины, не зависящей от выбора точки x и параметра ε.*

Доказательство этой леммы приводится в работе [28], см. лемму 4.2 в этой работе.

Пусть $\Pi_\varepsilon := \{x : 0 < \tau < 2R_6\varepsilon\}$, где $R_6 > 0$ — некоторая константа.

Лемма 3.7. *При выполнении условий A1, A2, A4 для любой функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \setminus S \cup \theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon)$ верна оценка:*

$$\|u\|^2_{L_2(\Pi_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^2\eta^{-n+2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где константа C не зависит от функции u, параметров ε и η, формы и расположения полостей ω_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$.

Доказательство. Всюду в доказательстве через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от u, ε, η, формы и расположения полостей ω_k^ε. Функцию u доопределим нулём внутри полостей $\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon$. Через $\mathbb{M}_k^\varepsilon$ обозначим множество индексов $j \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$ таких, что

$$\overline{B_{R_3\varepsilon}(M_k^\varepsilon)} \cap \overline{B_{R_2}(M_j^\varepsilon)} \neq \emptyset.$$

В [30, §3.2] было показано, что при выполнении условий A1 и A2 функцию u можно продолжить внутрь полостей $\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$, причем верны оценки

$$\|u\|^2_{L_2(\omega_{k,\varepsilon})} \leqslant C\|u\|^2_{L_2(B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon)\setminus\omega_{k,\varepsilon})}, \qquad \|\nabla u\|^2_{L_2(\omega_{k,\varepsilon})} \leqslant C\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon)\setminus\omega_{k,\varepsilon})},$$

где C — некоторая константа, не зависящая от u, ε, η и k.

Согласно предположению A4, шары $B_{R_3\varepsilon}(M_k)$, $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ покрывают слой Ξ^ε. В силу леммы 3.6 каждая точка слоя Ξ^ε попадает лишь в конечное число множеств $B_{R_3\varepsilon}(M_k)$ и это число ограничено некоторой абсолютной константой равномерно по ε, η и точкам слоя. Ещё отметим, что растяжение введённых множеств в ε^{-1} раз относительно точек M_k^ε даёт множества $B_{R_3}(0)$. Тогда с помощью замены переменной, соответствующей такому растяжению, получим оценку:

$$\|u\|^2_{L_2(B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k))} \leqslant C\varepsilon^2\eta^{-n+2}\|\nabla v\|^2_{L_2(B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k))}.$$

Суммируя полученные неравенства по всем $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ и учитывая упомянутые выше свойства покрытия слоя Ξ^ε множествами $B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k)$, $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$, приходим к оценке

$$\|u\|^2_{L_2(\Xi^\varepsilon\setminus\theta^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^2\eta^{-n+2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.1}$$

Пусть $\chi = \chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < R_7$ и нулю при $t > R_5$, где R_7 — некоторая константа, причем $R_4 < R_7 < R_5$. Верно равенство

$$u(x) = \int\limits_{R_7\varepsilon}^{\tau} \frac{\partial}{\partial t} u(t,s)\chi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\,dt.$$

Из последнего равенства в силу неравенства Коши — Буняковского вытекает, что

$$|u(x)|^2 \leqslant C\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_{R_7\varepsilon}^{R_5\varepsilon} |u(\tau,s)|^2\,d\tau + \varepsilon\int\limits_{0}^{R_6\varepsilon} \left|\frac{\partial u}{\partial\tau}(\tau,s)\right|^2\,dt\right).$$

Интегрируя последнюю оценку по Π^ε и учитывая неравенство (3.1), приходим к утверждению леммы. □

Лемма 3.8. *Для произвольной функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega \setminus S)$ функция $a(x, u(x))$ имеет след на θ^ε, который является элементом $L_2(\partial\theta^\varepsilon)$.*

Доказательство. Так как $u \in W_2^1(\Omega)$, то существует последовательность функций $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $n = 1, 2, 3\ldots$, сходящаяся в норме $W_2^1(\Omega)$ к функции u. Верна оценка

$$\|u_n - u_m\|_{L_2(S)} \leqslant C\|u_n - u_m\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{3.2}$$

где константа C не зависит от n и m. Из условия (2.1) следуют неравенства

$$|a(x, u_n)| \leqslant C|u_n|, \qquad |a(x, u_n) - a(x, u_m)|^2 \leqslant C|u_n - u_m|^2, \tag{3.3}$$

где константа C не зависит от n и m. Так как функция u_n является интегрируемой на S, то из первого неравенства в (3.3) и кусочной непрерывности $a(x, u))$ следует, что функция $a(x, u_n(x))$ также является интегрируемой и принадлежит $L_2(S)$. Интегрируя вторую оценку в (3.3) по S и учитывая неравенство (3.2), получим

$$\|a(\,\cdot\,, u_n) - a(\,\cdot\,, u_m)\|^2_{L_2(S)} \leqslant C\|u_n - u_m\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от n и m. Правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Это означает, что последовательность $a(x, u_n(x))$ является фундаментальной в $L_2(S)$. Так как пространство $L_2(S)$ полное, то последовательность $a(x, u_n(x))$ сходится в $L_2(S)$ к некоторому пределу.

Стандартным образом, см. [33, §5, п.1], показывается, что этот предел не зависит от выбора последовательности u_n и именно этот предел и называется следом функции $a(x, u(x))$ на S. Лемма доказана. □

4. Сходимость решений

В данном параграфе мы доказываем теорему 2.1.

Лемма 4.1. *Существует λ_0 такое, что при $\lambda < \lambda_0$ задача (2.2) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ для всех ε и $f \in L_2(\Omega)$.*

Доказательство леммы проводится аналогично доказательствам леммы 5.1 из [28] и леммы 9 из [29].

Лемма 4.2. *Верна оценка*

$$\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.1}$$

где константа C не зависит от f.

Доказательство. Задача (2.4) однозначно разрешима в $\mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega \setminus S)$ для произвольной правой части f уравнения, причем данное уравнение линейно. Поэтому верна оценка

$$\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где константа C не зависит от f. Используя теперь стандартные теоремы о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач, получаем оценку (4.1). □

Пусть $\chi_1 = \chi_1(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$. Рассмотрим функцию $v_\varepsilon = u_\varepsilon - (1 - \chi^\varepsilon)u_0$, где χ^ε определяется следующим образом:

$$\chi^\varepsilon(x) = \begin{cases} \chi_1\left(\frac{|\tau|}{R_6\varepsilon}\right) & \text{при } x \in \Sigma, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Sigma. \end{cases}$$

Эта функция принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}} \cup \partial\Omega \setminus S)$ и выполнено равенство:

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon \qquad \text{на} \qquad \partial\theta^\varepsilon. \tag{4.2}$$

Выпишем для задачи (2.2) интегральное тождество с пробной функцией v_ε:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\left(u_\varepsilon, A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0 u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &- \lambda(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (a(\cdot, u_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})} = (f, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из равенства(4.2) следует, что граничный член в левой части последнего равенства можно переписать в виде

$$(a(\cdot, u_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})} = (a(\cdot, v_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}.$$

Функцию $(1-\chi^\varepsilon)v_\varepsilon$ доопределим нулём внутри множества θ^ε. Запишем интегральное тождество для задачи (2.4), взяв $(1-\chi^\varepsilon)v_\varepsilon \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega \setminus S)$ в качестве пробной функции. В результате получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial(1-\chi^\varepsilon)u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial(1-\chi^\varepsilon)u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)} \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\left((1-\chi^\varepsilon)u_0, A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + (A_0 u_0(1-\chi^\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} \\ &+ \lambda(u_0(1-\chi^\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f(1-\chi^\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - K_\varepsilon, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} K_\varepsilon := &-\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}u_0\frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\left(A_j u_0\frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - \sum_{j=1}^{n}\left(u_0\frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_j}, A_j v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Вычислим разность (4.3) и (4.4):

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\left(v_\varepsilon, A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0 v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &+ (a(\cdot, v_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})} + \lambda(v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = (\chi^\varepsilon f, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + K_\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Аналогично из [28, Нерав. (2.7)] выводится оценка

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\left(v_\varepsilon, A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0 v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &+ (a(\cdot, v_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})} + \lambda(v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \geqslant C\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где константа C не зависит от v_ε.

Далее основная цель — оценить правую часть равенства (4.5). Все дальнейшие вычисления следуют схеме доказательства теоремы 2.1 из [28]. Ниже мы приводим основные этапы вычислений.

Применяя лемму 3.7, оценим первое слагаемое в правой части равенства (4.5)

$$|(\chi_1^\varepsilon f, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}| \leqslant C\frac{\varepsilon}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.7}$$

Из лемм 3.5, 3.7 и неравенства (4.1) следуют оценки

$$\left|\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right| \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.8}$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}u_0\frac{\partial \chi_1^\varepsilon}{\partial x_i}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right| \leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^n\left(A_j u_0\frac{\partial \chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - \sum_{j=1}^n\left(u_0\frac{\partial \chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, A_j v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right|&\\ \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac32}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.&\end{aligned} \tag{4.10}$$

Используя неравенства (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) и (4.10), выводим оценку для v_ε

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\left(\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}}\right)^{\frac12}\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.11}$$

Теперь оценим норму разности $u_\varepsilon - u_0$. Для этого представим эту разность в виде

$$u_\varepsilon - u_0 = u_\varepsilon - (1-\chi^\varepsilon)u_0 + u_0\chi^\varepsilon = v_\varepsilon + u_0\chi^\varepsilon.$$

Из лемм 3.5 и неравенства (4.1) вытекает оценка для $u_0\chi_1^\varepsilon$

$$\|u_0\chi_1^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac32}\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.12}$$

Аналогично выводим оценку для $\nabla(u_0\chi^\varepsilon)$

$$\|\nabla u_0\chi^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C(\|\nabla u_0\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{-1}\|u_0\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}) \leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.13}$$

Используя неравенства (4.11), (4.12) и (4.13) получим оценку (2.5). Теорема 2.1 доказана.

Благодарности

Автор благодарна Г.А. Чечкину за обсуждение, которое мотивировало данную работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Г. Беляев. *Усреднение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в области, перфорированной вдоль границы* // Усп. мат. наук **45**:4, 123 (1990).
2. M. Lobo, O.A. Oleinik, M.E. Pérez, T.A. Shaposhnikova. *On homogenizations of solutions of boundary value problems in domains, perforated along manifolds* // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. **25**:3–4, 611–629 (1997).
3. М. Лобо, М.Е. Перес, В.В. Сухарев, Т.А. Шапошникова. *Об усреднении краевой задачи в области, перфорированной вдоль $(N-1)$–мерного многообразия с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей* // Докл. акад. наук **436**:2, 163–167 (2011).

4. D. Gómez, M.E. Pérez, T.A. Shaposhnikova. *On homogenization of nonlinear Robin type boundary conditions for cavities along manifolds and associated spectral problems* // Asymptotic Anal. **80**:3–4, 289–322 (2012).
5. D. Gómez, M. Lobo, M.E. Pérez, T.A. Shaposhnikova. *Averaging of variational inequalities for the Laplacian with nonlinear restrictions along manifolds* // Appl. Anal. **92**:2, 218–237 (2013).
6. Y. Amirat, O. Bodart, G.A. Chechkin, A.L. Piatnitski. *Asymptotics of a spectral-sieve problem* // J. Math. Anal. Appl. **435**:2, 1652–1671 (2016).
7. М.Н. Зубова, Т.А. Шапошникова. *Усреднение уравнения диффузии в области, перфорированной вдоль $(n-1)$-мерного многообразия с динамическими краевыми условиями на границе перфораций: критический случай* // Докл. акад. наук **486**:1, 12–19 (2019).
8. G.A. Chechkin, Yu.O. Koroleva, A. Meidell, L.–E. Persson. *On the Friedrichs inequality in a domain perforated aperiodically along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics for parabolic problems* // Russ. J. Math. Phys. **16**:1, 1–16 (2009).
9. G.A. Chechkin, T.A. Chechkina, C. D'Apice, U. De Maio. *Homogenization in domains randomly perforated along the boundary* // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B **12**:4, 713–730 (2009).
10. Р.Р. Гадыльшин, Ю.О. Королева, Г.А. Чечкин. *О собственном значении Лапласиана в области, перфорированной вдоль границы* // Докл. акад. наук **432**:1, 7–11 (2010).
11. Р.Р. Гадыльшин, Ю.О. Королева, Г.А. Чечкин. *О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы* // Диффер. уравн. **46**:5, 665–677 (2010).
12. Р.Р. Гадыльшин, Ю.О. Королева, Г.А. Чечкин. *Об асимптотике простого собственного значения краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы* // Диффер. уравн. **47**:6, 819–828 (2011).
13. G.A. Chechkin, Yu.O. Koroleva, L.–E. Persson, P. Wall. *A new weighted Friedrichs–type inequality for a perforated domain with a sharp constant* // Eurasian Math. J. **2**:1, 81–103 (2011).
14. Р.Р. Гадыльшин, Д.В. Кожевников, Г.А. Чечкин. *О спектральной задаче в области, перфорированной вдоль границы. Возмущение кратного собственного значения* // Пробл. мат. анал. 73, 31–45 (2013).
15. G.A. Chechkin. *The Meyers estimates for domains perforated along the boundary* // Mathematics **9**:23, 3015 (2021).
16. В.В. Жиков, С.Е. Пастухова. *Об операторных оценках в теории усреднения* // Усп. мат. наук **71**:3, 27–12 (2014).
17. Т.А. Суслина. *Теоретико–операторный подход к усреднению уравнений типа Шредингера с периодическими коэффициентами* // Усп. мат. наук **78**:6, 47–178 (2023).
18. D. Borisov, G. Cardone. *Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions* // J. Phys. A, Math. Theor. **42**:36, 365–205 (2009).
19. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone. *On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition* // Ann. Henri Poincaré **11**:8, 1591–1627 (2010).
20. D. Borisov, R.Bunoiu, G. Cardone. *On a waveguide with an infinite number of small windows* // C.R., Math., Acad. Sci. Paris **349**:1, 53–56 (2011).
21. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone. *Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows* // J. Math. Sci. **176**:6, 774–785 (2011).
22. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone. *Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics* // Z. Angew. Math. Phys. **64**:3, 439–472 (2013).
23. D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, C. Perugia. *Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary* // J. Differ. Equations **255**:12, 4378–4402 (2013).
24. Т.Ф. Шарапов. *О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усреднённого условия Дирихле* // Мат. сб. **205**:10, 1492–1527 (2014).
25. Д.И. Борисов, Т.Ф. Шарапов. *О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае третьего усреднённого условия* // Пробл. мат. анал. 83, 3–40 (2015).

26. Т.Ф. Шарапов. *О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий: критический случай* // Уфим. мат. ж. **8**:2, 66–96 (2016).
27. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante. *Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve* // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. **146**:6, 1115–1158 (2016).
28. Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова. *Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле* // Мат. сб. **212**:8, 33–88 (2021).
29. Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова. *Равномерная сходимость для задач с перфорацией вдоль заданного многообразия и третьим нелинейным краевым условием на границах полостей* // Алгебра анал. **35**, 20–78 (2023).
30. D.I. Borisov, J. Kříž. *Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: vanishing limit* // Anal. Math. Phys. **13**:1, 5 (2023).
31. D. I. Borisov. *Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: strange term* // Math. Methods Appl. Sci. **47**:6, 4122–4164 (2024).
32. D. I. Borisov. *Operator estimates for non-periodically perforated domains: disappearance of cavities* // Appl. Anal. (2024) **103**:5, 859–873 (2024).
33. В.П. Михайлов. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М: Наука. 1976.

Альбина Ишбулдовна Мухаметрахимова,
Башкирский государственный педагогический университитет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450077, г. Уфа, Россия

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: albina8558@yandex.ru