ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 4 (2024). С. 77-83.

УДК 517.55

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

И.Х. МУСИН

Аннотация. С помощью семейства $\mathfrak{M} = \{M_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ раздельно радиальных выпуклых функций $M_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определено пространство $GS(\mathfrak{M})$ типа W_M, представляющее собой естественное обобщение пространства W_M, введённого в работах Б.Л. Гуревича, И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова. Каждой функции M_ν по определённому правилу ставится в соответствие неотрицательная раздельно радиальная выпуклая функция h_ν в $\mathbb{R}^n$. Свойства функций h_ν позволяют по семейству $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ образовать пространство $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ — внутренний индуктивный предел счётно–нормированных пространств $\mathbb{S}(h_\nu)$ функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с конечными нормами

$$\|f\|_{m,\nu} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{Z}_+^n,\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n : \|\alpha\|\leqslant m}} \frac{\|x^\beta (D^\alpha f)(x)\|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Рассматривается задача о нахождении условий на $\mathfrak{M}$, при выполнении которых имеют место непрерывные вложения друг в друга пространства $GS(\mathfrak{M})$ и пространства $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$.

Ключевые слова: пространства Гельфанда — Шилова типа W_M, выпуклые функции.

Mathematics Subject Classification: 46F05, 46A13, 42B10

1. Введение

1.1. Цель работы. Пусть $\mathfrak{M} = \{M_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — семейство раздельно радиальных выпуклых функций $M_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

j_1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{M_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

j_2) $\lim\limits_{x\to\infty} (M_\nu(x) - M_{\nu+1}(x)) = +\infty$.

Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ определим пространство

$$GS_m(M_\nu) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : q_{m,\nu}(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|\alpha\|\leqslant m}} \|(D^\alpha f)(x)\| e^{M_\nu(x)} < \infty \right\}.$$

Положим

$$GS(M_\nu) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+} GS_m(M_\nu).$$

Наделим $GS(M_\nu)$ топологией, определяемой семейством норм $q_{m,\nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). Введём пространство

$$GS(\mathfrak{M}) = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} GS(M_\nu).$$

I.Kh. Musin, Embedding theorems for subspaces in spaces of fast decaying functions.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1444).

Поступила 18 июля 2024 г.

С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $GS(\mathfrak{M})$ — линейное пространство. В $GS(\mathfrak{M})$ зададим топологию внутреннего индуктивного предела пространств $GS(M_\nu)$. Заметим, что пространство $GS(\mathfrak{M})$ конструктивно более общее, чем пространство W_M [1]–[5], и пространство типа W_M из [6].

По семейству $\mathfrak{M}$ образуем ещё одно семейство неотрицательных раздельно радиальных выпуклых функций h_ν в $\mathbb{R}^n$. Вначале напомним, что преобразование Юнга — Фенхеля g^* функции $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определённая по правилу $g^*(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - g(y))$ [7]. Кроме того, нам будет удобно пользоваться следующим обозначением: если u — функция на множество $X \subset \mathbb{R}^n$, содержащем множество $(0,\infty)^n$, то $u[e](x) := u(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$ для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Теперь для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ определим функции u_ν в $\mathbb{R}^n_+$ и h_ν в $\mathbb{R}^n$, полагая:

$$u_\nu(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle t, y\rangle - M^*_\nu[e](y)), \qquad t \in \mathbb{R}^n_+,$$
$$h_\nu(t) = u_\nu(\|t_1\|, \dots, \|t_n\|) - u_\nu(0), \qquad t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

В силу условия $j_1)$ функции u_ν и h_ν принимают конечные значения в $\mathbb{R}^n$ и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty,$$

а ввиду условий $j_1)$ и $j_2)$ выполнено

$$\lim_{y \to +\infty} (M^*_{\nu+1}[e](y) - M^*_\nu[e](y)) = +\infty,$$

что в свою очередь влечёт, что

$$\lim_{x \to \infty} (h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x)) = +\infty.$$

Легко проверить, что для любого $Q > 0$ найдётся число $C_Q > 0$ такое, что

$$h_\nu(x) \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \neq 0} x_j \ln \frac{x_j}{Q} + C_Q, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n.$$

Кроме того, так как функция u_ν — выпуклая и неубывающая по каждой переменной в $\mathbb{R}^n_+$, функция h_ν является выпуклой в $\mathbb{R}^n$ (например, [8, Лемма 4]). Очевидно, $h_\nu \in C(\mathbb{R}^n)$. Образуем семейство $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^\infty$.

По семейству $\mathcal{H}$ определим пространство $\mathbb{S}_\mathcal{H}$ как внутренний индуктивный предел счётно–нормированных пространств $\mathbb{S}(h_\nu)$, каждое из которых есть проективный предел пространств

$$\mathcal{S}_m(h_\nu) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,\nu} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}^n_+, \\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+ : \|\alpha\| \leqslant m}} \frac{\|x^\beta (D^\alpha f)(x)\|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}} < \infty \right\}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Пространства вида $\mathbb{S}_\mathcal{H}$ рассматривались в работе [9].

Цель данной заметки — нахождении условий на $\mathfrak{M}$, при выполнении которых имеют место непрерывные вложения друг в друга пространства $GS(\mathfrak{M})$ и пространства $\mathbb{S}_\mathcal{H}$. Изучение этой задачи может быть интересным для теории вложения пространств дифференцируемых функций.

1.2. Результаты. Во втором разделе работы с использованием вспомогательных утверждений первого раздела доказаны следующие два результата.

Теорема 1.1. *Пространство $GS(\mathfrak{M})$ непрерывно вложено в $\mathbb{S}_\mathcal{H}$.*

Теорема 1.2. *Пусть функции семейства $\mathfrak{M}$ таковы, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:*

1) *при некотором* $a_\nu > 0$

$$M^*_{\nu+1}(x) - M^*_\nu(x) \geq \sum_{j=1}^n \ln x_j - a_\nu, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in [1, \infty)^n;$$

2) *при некотором* $b_\nu > 0$

$$M_\nu(x) - M_{\nu+1}(x) \geq \sum_{j=1}^n \|x_j\| - b_\nu, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда пространство $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ *непрерывно вложено в* $GS(\mathfrak{M})$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1.2 пространства $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ и $GS(\mathfrak{M})$ совпадают.

Замечание 1.1. *Наиболее существенная часть Теоремы 4 из* [8] *соответствует частному случаю теоремы 1.2, когда функции семейства* $\mathfrak{M} = \{M_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ *удовлетворяют условию: для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *найдётся число* $C_\nu > 0$ *такое, что*

$$M_{\nu+1}(2x) \leqslant M_\nu(x) + C_\nu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Такого сорта условие характерно для всех ранее рассматривавшихся пространств типа W_M. *Также нетрудно показать, что в этом случае при некотором* $K_\nu > 0$

$$h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x) \geq \ln 2 \sum_{j=1}^n x_j - K_\nu, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+,$$

$$h_{\nu+1}(x+y) \leqslant h_\nu(x) + h_\nu(y) + K_\nu, \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+.$$

1.3. Обозначения. $\mathbb{R}^n_+ := [0, \infty)^n$. Для $t \geq 0$ полагаем $t^+ = \max(t, 1)$.

Для $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ обозначаем

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

$\|x\|$ — евклидова норма x,

$$\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Через $U(\mathbb{R}^n)$ обозначаем множество всех раздельно радиальных выпуклых функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{u(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

2. Вспомогательные результаты

По ходу доказательства теорем 1.1 и 1.2 понадобятся следующие утверждения.

Предложение 2.1. *Пусть* $g = (g_1, \ldots, g_n)$ *— вектор-функция в* $\mathbb{R}^n$ *с выпуклыми компонентами* $g_j : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *и функция* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *такова, что* $f_{|[0,\infty)^n}$ *— выпуклая и неубывающая по каждой переменной. Тогда* $f \circ g$ *— выпуклая в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство предложения 2.1 имеется, например, в [8].

Предложение 2.2. *Пусть* $u \in U(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n: \\ x_j \neq 0}} (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) = 0.$$

Предложение 2.2 доказано для функций $u \in U(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$ в [8], а в общем случае — в [10].

Предложение 2.3. *Предположим, что при некотором* $a_\nu > 0$ $(v \in \mathbb{N})$

$$M^*_{\nu+1}(x) - M^*_\nu(x) \geq \sum_{j=1}^n \ln x_j - a_\nu, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in [1, \infty)^n.$$

Тогда

$$h_{\nu+1}(x+y) \leqslant h_\nu(x) + c_\nu, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, y \in [0,1])^n, \tag{2.1}$$

где $c_\nu = u_\nu(0) - u_{\nu+1}(0) + a_\nu$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}^n_+, y \in [0,1])^n$. Тогда

$$\begin{aligned} u_{\nu+1}(x+y) &= \sup_{t \in \mathbb{R}^n_+} (\langle x+y, t\rangle - M^*_{\nu+1}[e](t)) \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}^n_+} (\langle x, t\rangle - (M^*_{\nu+1}[e](t) - M^*_\nu[e](t)) + \langle y, t\rangle - M^*_\nu[e](t)) \\ &\leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}^n_+} (\langle x, t\rangle - M^*_\nu[e](t)) + a_\nu = u_\nu(x) + a_\nu. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство 2.1. □

Предложение 2.4. *Допустим, что для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *при некотором* $b_\nu > 0$

$$M_\nu(x) - M_{\nu+1}(x) \geq \sum_{j=1}^n \|x_j\| - b_\nu, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда при всех $t \in \mathbb{R}^n_+$

$$(M^*_{\nu+1}[e])^*(t) \leqslant h_\nu(t) + d_\nu, \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.2}$$

где $d_\nu = u_\nu(0) + b_\nu$.

Доказательство. Пользуясь раздельной радиальностью функций M_ν и условием предложения 2.4, имеем

$$M^*_{\nu+1}(x) \geq M^*_\nu(x+y) - b_\nu, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \qquad y \in [0,1]^n.$$

Тогда при всех $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+$

$$\begin{aligned} (M^*_{\nu+1}[e])^*(t) &= \max\Big(\sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle t, y\rangle - M^*_{\nu+1}[e])(y)), \sup_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+} (\langle t, y\rangle - M^*_{\nu+1}[e](y))\Big) \\ &\leqslant \max\Big(\sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle t, y\rangle - M^*_{\nu+1}[e])(y)), \sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle t, y\rangle - M^*_\nu[e])(y) + b_\nu\Big) \\ &\leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}^n_+} (\langle t, y\rangle - M^*_\nu[e])(y)) + b_\nu = u_\nu(t) + b_\nu = h_\nu(t) + d_\nu. \end{aligned}$$

□

3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $f \in GS(\mathfrak{M})$. Тогда $f \in GS(M_\nu)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка с ненулевыми координатами. Тогда для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ с $\|\alpha\| \leqslant m$ имеем

$$\|(D^\alpha f)(x)\| \leqslant q_{m,\nu}(f) e^{-M_\nu[e](\ln\|x_1\|, \ldots, \ln\|x_n\|)}.$$

Так как принимающая конечные значения в $\mathbb{R}^n$ функция $M_\nu[e]$ — выпуклая в $\mathbb{R}^n$, имеем $M_\nu[e] = ((M_\nu[e])^*)^*$. Поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\|(D^\alpha f)(x)\| \leqslant q_{m,\nu}(f) e^{-\sum\limits_{j=1}^n t_j \ln\|x_j\| + (M_\nu[e])^*(t)}, \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Отсюда с помощью предложения 2.2 получим, что для всех $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$

$$\|(D^\alpha f)(x)\| \leqslant q_{m,\nu}(f)e^{-\sum\limits_{j=1}^n t_j\ln\|x_j\|+\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n:t_j\neq 0}(t_j\ln t_j-t_j)-(M_\nu^*[e])^*(t)}. \tag{3.1}$$

Так как для $t\in\mathbb{R}_+^n$

$$(M_\nu^*[e])^*(t)\geq \sup_{y\in\mathbb{R}_+^n}(\langle t,y\rangle - M_\nu^*[e])(y)) = u_\nu(t)=h_\nu(t)+u_\nu(0),$$

продолжая оценку (3.1), получим, что для любого $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$

$$\|(D^\alpha f)(x)\| \leqslant e^{-u_\nu(0)}q_{m,\nu}(f)e^{-\sum\limits_{j=1}^n t_j\ln\|x_j\|+\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n:t_j\neq 0}(t_j\ln t_j-t_j)-h_\nu(t)}.$$

В частности, для всех $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$

$$\|x^\beta(D^\alpha f)(x)\| \leqslant e^{-u_\nu(0)}q_{m,\nu}(f)e^{-h_\nu(\beta)}\prod_{1\leqslant j\leqslant n:\beta_j\neq 0}\frac{\beta_j^{\beta_j}}{e^{\beta_j}}.$$

Очевидно, это неравенство справедливо для любого $x\in\mathbb{R}^n$. Отсюда получим, что для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ с $\|\alpha\|\leqslant m$ и $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$

$$\|x^\beta(D^\alpha f)(x)\| \leqslant e^{-u_\nu(0)}q_{m,\nu}(f)\beta!e^{-h_\nu(\beta)}.$$

Следовательно,

$$\|f\|_{m,\nu}\leqslant e^{-u_\nu(0)}q_{m,\nu}(f).$$

Так как $m\in\mathbb{Z}_+$ было произвольным, имеем $f\in\mathbb{S}(h_\nu)$. И значит, $f\in\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$. Также из последнего неравенства следует непрерывность вложения пространства $GS(\mathfrak{M})$ в пространство $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$.

4. Доказательство теоремы 1.2

Пусть $f\in\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$. Тогда $f\in\mathbb{S}(h_\nu)$ для некоторого $\nu\in\mathbb{N}$. Пусть $m\in\mathbb{Z}_+$ произвольно. Тогда для всех $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ с $\|\alpha\|\leqslant m$, $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ и $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ с ненулевыми координатами

$$\|(D^\alpha f)(x)\|\leqslant \frac{\|f\|_{m,\nu}\beta!e^{-h_\nu(\beta)}}{\prod\limits_{j=1}^n\|x_j\|^{\beta_j}}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$j!\leqslant e\sqrt{2\pi(j+1)}\frac{(j^+)^j}{e^j}$$

для любого $j\in\mathbb{Z}_+$, имеем

$$\|(D^\alpha f)(x)\|\leqslant (e\sqrt{2\pi})^n\|f\|_{m,\nu}e^{-h_\nu(\beta)}\prod_{j=1}^n\frac{(\beta_j^+)^{\beta_j}}{(e\|x_j\|)^{\beta_j}}. \tag{4.1}$$

Оценим сверху

$$e^{-h_\nu(\beta)}\prod_{j=1}^n\frac{(\beta_j^+)^{\beta_j}}{(e\|x_j\|)^{\beta_j}}.$$

Для $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ пусть

$$\Omega_\beta=\{t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n:\beta_j\leqslant t_j<\beta_j+1\ (j=1,\dots,n)\}.$$

Пользуясь неубыванием h_ν по каждой переменной в $\mathbb{R}^n_+$ и предложением 2.3, для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in (0, \infty)^n$ и $t \in \Omega_\beta$ имеем

$$e^{-h_\nu(\beta)} \prod_{j=1}^n \frac{(\beta_j^+)^{\beta_j}}{\mu_j^{\beta_j}} \leqslant e^{-h_{\nu+1}(t)+c_\nu} \prod_{j=1}^n \frac{\mu_j^+ (t_j+1)^{t_j}}{\mu_j^{t_j}}.$$

Следовательно,

$$\inf_{\beta \in \mathbb{Z}^n_+} e^{-h_\nu(\beta)} \prod_{j=1}^n \frac{(\beta_j^+)^{\beta_j}}{\mu_j^{\beta_j}} \leqslant e^{c_\nu} e^{\inf\limits_{t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n_+} (\sum\limits_{j=1}^n (\ln \mu_j^+ + t_j \ln(t_j+1) - t_j \ln \mu_j) - h_{\nu+1}(t))},$$

Далее, пользуясь предложением 2.4, имеем

$$\inf_{\beta \in \mathbb{Z}^n_+} e^{-h_\nu(\beta)} \prod_{j=1}^n \frac{(\beta_j^+)^{\beta_j}}{\mu_j^{\beta_j}} \leqslant K_1 e^{\inf\limits_{t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n_+} (\sum\limits_{j=1}^n (\ln \mu_j^+ + t_j \ln(t_j+1) - t_j \ln \mu_j) - (M^*_{\nu+2}[e])^*(t))},$$

где $K_1 = e^{a_\nu + d_{\nu+1}}$. Отсюда, с помощью предложения 2.2, получим, что

$$\inf_{\beta \in \mathbb{Z}^n_+} e^{-h_\nu(\beta)} \prod_{j=1}^n \frac{(\beta_j^+)^{\beta_j}}{\mu_j^{\beta_j}} \leqslant K_1 e^n e^{\inf\limits_{t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n_+} (\sum\limits_{j=1}^n \ln \mu_j^+ - \sum\limits_{j=1}^n t_j \ln \frac{\mu_j}{e} + (M_{\nu+2}[e])^*(t))}.$$

Принимая во внимание, что функция $(M_{\nu+2}[e])^*$ принимает конечные значения на $[0, \infty)^n$ и $(M_{\nu+2}[e])^*(x) = +\infty$ для $x \notin [0, \infty)^n$, можно переписать вышеприведённое неравенство в следующей форме

$$\inf_{\beta \in \mathbb{Z}^n_+} e^{-h_\nu(\beta)} \prod_{j=1}^n \frac{(\beta_j^+)^{\beta_j}}{\mu_j^{\beta_j}} \leqslant K_1 e^n e^{-\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^n} (\sum\limits_{j=1}^n t_j \ln \frac{\mu_j}{e} - (M_{\nu+2}[e])^*(t)) + \sum\limits_{j=1}^n \ln \mu_j^+}.$$

Отметим, что по предложению 2.1 функция $M_{\nu+2}[e]$ принимает конечные значения в $\mathbb{R}^n$ и является выпуклой в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, $M_{\nu+2}[e]$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$ [7, Следствие 10.1.1]. Далее, воспользовавшись формулой обращения преобразования Юнга — Фенхеля ([7, Теор. 12.2]), получим, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n t_j \ln \frac{\mu_j}{e} - (M_{\nu+2}[e])^*(t) \right) = M_{\nu+2} \left(\frac{\mu_1}{e}, \dots, \frac{\mu_n}{e} \right).$$

Таким образом,

$$\inf_{\beta \in \mathbb{Z}^n_+} e^{-h_\nu(\beta)} \prod_{j=1}^n \frac{(\beta_j^+)^{\beta_j}}{\mu_j^{\beta_j}} \leqslant K_1 e^n e^{-M_{\nu+2}\left(\frac{\mu_1}{e}, \dots, \frac{\mu_n}{e}\right) + \sum\limits_{j=1}^n \ln \mu_j^+}.$$

Отсюда и из (4.1) получим, что

$$\|(D^\alpha f)(x)\| \leqslant K_1 2^n (e\sqrt{2\pi})^n e^n \|f\|_{m,\nu} e^{-M_{\nu+2}(x) + \sum\limits_{j=1}^n \ln(1+\|x_j\|)}.$$

Пользуясь вторым условием теоремы 1.2, получим, что при некотором $K_2 > 0$ (зависящем от ν и n) для всех $x \in \mathbb{R}^n$ с ненулевыми координатами и для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ с $\|\alpha\| \leqslant m$

$$\|(D^\alpha f)(x)\| \leqslant K_2 \|f\|_{m,\nu} e^{-M_{\nu+3}(x)}.$$

Очевидно, последнее неравенство справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, $f \in GS(M_{\nu+3})$ и

$$q_{m,\nu+3}(f) \leqslant K_2 \|f\|_{m,\nu}, \quad f \in \mathbb{S}(h_\nu).$$

Значит, $f \in GS(\mathfrak{M})$ и отображение вложения является непрерывным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Обобщенные функции (Пространства основных и обобщенных функций).* М.: Физматгиз. 1958.
2. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Обобщенные функции (Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений).* М.: Физматгиз. 1958.
3. Б.Л. Гуревич. *Новые пространства основных и обобщённых функций и проблема Коши для конечно-разностных систем* // ДАН СССР **99**:6, 893–896 (1954).
4. Б.Л. Гуревич. *Новые типы пространств основных и обобщённых функций и задачи Коши для систем дифференциально-разностных систем* // ДАН СССР **108**:6, 1001–1003 (1956).
5. Б.Л. Гуревич. *Новые типы пространств основных и обобщённых функций и проблема Коши для операторных уравнений* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1956.
6. J. Chung, S–Y. Chung, D. Kim. *Characterizations of the Gelfan — Shilov spaces via Fourier transforms* // Proc. Am. Math. Soc. **124**:7, 2101–2108 (1996).
7. Р. Рокафеллар. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.
8. I.Kh. Musin. *On a space of entire functions rapidly decreasing on* $\mathbb{R}^n$ *and its Fourier transform* // Concr. Oper. **2**:1, 120–138 (2015).
9. А.В. Луценко, И.Х. Мусин, Р.С. Юлмухаметов. *О пространствах Гельфанда — Шилова* // Уфим. мат. ж. **15**:3, 91–99 (2023).
10. И.Х. Мусин. *О гильбертовом пространстве целых функций* // Уфим. мат. ж. **9**:3, 111–118 (2017).

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru