ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 4 (2024). С. 40-52.

УДК 517.544

ЭФФЕКТИВНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ МАТРИЦ–ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С.Н. КИЯСОВ

Аннотация. Рассмотрена однородная задача линейного сопряжения на простом гладком замкнутом контуре, разделяющем плоскость комплексного переменного на две области, для трехмерного кусочно–аналитического вектора. Каждому решению задачи ставится в соответствие тройка функций, являющихся отношениями предельных значений на контуре из соответствующих областей компонент этого решения. Указаны соотношения, связывающие элементы H-непрерывной матрицы–функции задачи линейного сопряжения, обеспечивающие существование двух ее решений, для которых соответствующие компоненты троек пропорциональны, а сама задача допускает решение в замкнутой форме.

Ключевые слова: матрица–функция, задача линейного сопряжения, факторизация.

Mathematics Subject Classification: 30-XX

1. Введение

Качественная теория задачи линейного сопряжения для кусочно–аналитического вектора (векторно–матричная краевая задача Римана, граничная задача Гильберта, краевая задача Римана — Гильберта для нескольких неизвестных функций) при различных предположениях относительно гладкости контура уже к концу прошлого века приняла вполне законченный вид. Теория задачи в классах гельдеровских функций, причем любой размерности, изложена в монографии [1]. Однако, имеется сравнительно немного примеров матриц–функций, для которых решение задачи линейного сопряжения может быть записано в замкнутой форме — запись решения задачи в интегралах типа Коши и решения определенного числа линейных алгебраических систем.

Однородная задача линейного сопряжения в классе гельдеровских функций для трехмерного вектора ставится следующим образом.

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- ($0 \in D^+$, $\infty \in D^-$),

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) \\ g_{31}(t) & g_{32}(t) & g_{33}(t) \end{pmatrix}, \qquad \Delta(t) = \det G(t) \neq 0, \qquad t \in \Gamma, \tag{1.1}$$

— H-непрерывная на Γ матрица–функция третьего порядка.

Требуется найти кусочно–аналитическую вектор–функцию $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), w^3(z))$ конечного порядка на бесконечности с H-непрерывными на Γ предельными значениями

S.N. Kiyasov, Effective factorization of third order Hölder matrix function in some classes.

© Киясов С.Н. 2024.

Поступила 5 апреля 2024 г.

$\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^{+}(t) = G(t)\mathbf{w}^{-}(t) \tag{1.2}$$

или в скалярной форме — условиями

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}(t)w^{1-}(t) + g_{12}(t)w^{2-}(t) + g_{13}(t)w^{3-}(t), \\ w^{2+}(t) &= g_{21}(t)w^{1-}(t) + g_{22}(t)w^{2-}(t) + g_{23}(t)w^{3-}(t), \\ w^{3+}(t) &= g_{31}(t)w^{1-}(t) + g_{32}(t)w^{2-}(t) + g_{33}(t)w^{3-}(t). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Отметим, что даже в случае трех нулевых элементов матрицы–функции (1.1) если только она не является треугольной или не приводится к ней перестановкой строк и столбцов, получить решение задачи в замкнутой форме не удается. В работе автора [2] показано, что в случае произвольной размерности n при наличии $n-1$ частного решения задачи линейного сопряжения (1.2), каноническая система решений задачи может быть построена в замкнутой форме (матрица–функция (1.1) допускает эффективную факторизацию). Отметим, что подобного рода результат, основанный на «операторном подходе» к исследованию задачи, получен в работе [3]. Для трехмерной задачи линейного сопряжения соответствующее утверждение работы [2] можно сформулировать следующим образом.

Пусть

$$\mathbf{w}_i(z) = \left(w_i^1(z), w_i^2(z), w_i^3(z)\right), \quad i = 1, 2 \tag{1.4}$$

— два решения задачи (1.3) без конечных полюсов некоторых порядков на бесконечности (положительный порядок означает порядок полюса). Обозначим через $\Omega^k(z)$ матрицу–функцию второго порядка, получаемую из прямоугольной матрицы–функции $\Omega(z) = ||w_i^j(z)||$, $j = 1,2,3$, $i = 1,2$, столбцами которой служат компоненты вектор–функций (1.4), полученные вычеркиванием строки с номером k. Пусть при некоторых значениях индексов k и s, $k, s = 1,2,3$ определитель матрицы–функции $\Omega^k(z)$ не обращается в нуль в $D^+ \cup \Gamma$, а определитель матрицы–функции $\Omega^s(z)$ не имеет нулей в $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$. Тогда каноническая система решений задачи (1.2) может быть построена в замкнутой форме. Так, например, пусть определитель $\Delta_3^+(z) = \det \Omega^{3+}(z)$ не имеет нулей в $D^+ \cup \Gamma$, а определитель $\Delta_3^-(z) = \det \Omega^{3-}(z)$ не имеет нулей на Γ и в конечной части области D^-. Искомую каноническую систему решений задачи обозначим

$$\mathbf{v_i}(z) = \left(v_i^1(z), v_i^2(z), v_i^3(z)\right), \quad i = 1, 2, 3$$

($\mathbf{v_i}(z)$ имеет на бесконечности порядок $(-\varkappa_i)$). Целые числа $\varkappa_i$ — частные индексы матрицы–функции (1.1) будем считать упорядоченными по убыванию $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \varkappa_3$ ($\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = \varkappa = \operatorname{ind} \det G(t)$ — суммарный индекс матрицы–функции (1.1)). Тогда компоненты первой вектор–функции канонической системы решений (их предельные значения на Γ) определяются формулами

$$\begin{aligned} v_1^{1+} &= w_1^{1+}\left(P[M] + c^1\right) + w_2^{1+}\left(-P[M_1] + c^2\right), \\ v_1^{2+} &= w_1^{2+}\left(P[M] + c^1\right) + w_2^{2+}\left(-P[M_1] + c^2\right), \\ v_1^{3+} &= \left(p_1\Delta^+ - v_1^{1+}\Delta_1^+ - v_1^{2+}\Delta_2^+\right)/\Delta_3^+; \\ v_1^{1-} &= w_1^{1-}\left(-Q[M] + c^1\right) + w_2^{1-}\left(Q[M_1] + c^2\right), \\ v_1^{2-} &= w_1^{2-}\left(-Q[M] + c^1\right) + w_2^{2-}\left(Q[M_1] + c^2\right), \\ v_1^{3-} &= \left(p_1\Delta^- - v_1^{1-}\Delta_1^- - v_1^{2-}\Delta_2^-\right)/\Delta_3^-, \end{aligned}$$

в которых $P = (I+S)/2$, $Q = (I-S)/2$ (I — единичный, S — сингулярный операторы), p_1 — неопределенный полином, для степени которого указана оценка сверху, c^1 и c^2 — постоянные, $\Delta(t) = \det G(t) = \Delta^+(t)/\Delta^-(t)$, $\Delta_1^{\pm}(t)$ — предельные значения на Γ

определителя матрицы–функции $\Omega^1(z)$, $\Delta_2^{\pm}(t)$ — предельные значения на Γ определителя матрицы-функции $\Omega^2(z)$, взятого со знаком «минус», а

$$M = \frac{p_1\Delta^-}{\Delta_3^+\Delta_3^-}\left(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+}\right), \qquad M_1 = \frac{p_1\Delta^-}{\Delta_3^+\Delta_3^-}\left(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+}\right).$$

Коэффициенты полинома $p_1(z)$ и постоянные c^1, c^2 подбираются так, чтобы вектор–функция $\mathbf{v_1}(z)$ имела самый низкий из возможных порядок $(-\varkappa_1)$ на бесконечности. Вектор–функция $\mathbf{v_2}(z)$, порядка $-\varkappa_2 \geqslant -\varkappa_1$ на бесконечности и отличная от вектор–функции $\mathbf{v_1}(z)$, умноженной на некоторый полином, определяется теми же формулами, в которых полином $p_1(z)$ следует заменить на полином $p_2(z)$, для степени которого, а также степеней полиномов $c^1(z)$, $c^2(z)$ даны оценки сверху. Вектор–функция $\mathbf{v_3}(z)$ ищется аналогично как имеющая на бесконечности порядок $-\varkappa_3 = \varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa$ и не связанная с $\mathbf{v_1}(z)$ и $\mathbf{v_2}(z)$ никакой линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами.

2. Предварительные сведения

Приведем для удобства основные понятия и утверждения из работ [4]–[6] которыми будем пользоваться и в данной статье.

Определение 2.1. *Пусть* $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), w^3(z))$ *— кусочно–мероморфное решение задачи* (1.3). *Будем называть его решением с тройкой* $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, *если на* Γ

$$\frac{w^{1+}(t)}{w^{1-}(t)} = \lambda_1(t), \qquad \frac{w^{2+}(t)}{w^{2-}(t)} = \lambda_2(t), \qquad \frac{w^{3+}(t)}{w^{3-}(t)} = \lambda_3(t). \tag{2.1}$$

Полагается, что компонента тройки λ_k равна нулю, неограничена или является неопределенной, что обозначается 0, ∞, $0/0$, если соответственно

$$w^{k+}(t) \equiv 0, \quad w^{k-}(t) \equiv 0, \quad w^{k\pm}(t) \equiv 0; \quad k = 1,2,3, \quad t \in \Gamma.$$

Тройка с компонентами, отличными от 0, ∞, $0/0$. названа невырожденной.

В предположении существования у задачи (1.3) двух решений $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ с одинаковой невырожденной тройкой (2.1) таких, что $\mathbf{w}_2(z) \not\equiv r(z)\mathbf{w}_1(z)$, где $r(z)$ — рациональная функция, в работе [4] были получены ограничения на элементы матрицы–функции (1.1), обеспечивающие существование таких решений, а сами эти решения были записаны явно, что позволяет, согласно приведенному выше утверждению, построить в замкнутой форме каноническую систему решений задачи.

В работе [5] показано, что аналогичный результат может быть получен, если потребовать совпадения у решений задачи двух компонент тройки (2.1), а в работе [6] обоснована возможность построения в замкнутой форме канонической системы решений в предположении существования у задачи (1.3) двух решений с одинаковым значением лишь одной из компонент тройки (2.1).

Пусть для решения $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), w^3(z))$ задачи (1.3) $w^{1\pm}(z) \not\equiv 0$. Рассмотрим определенные в соответствующих областях отношения

$$\Phi(z) = \frac{w^2(z)}{w^1(z)}, \qquad \Psi(z) = \frac{w^3(z)}{w^1(z)}. \tag{2.2}$$

Из краевых условий (1.3) следует, что пары функций $(\Phi^{\pm}(t), \Psi^{\pm}(t))$ являются предельными значениями на Γ кусочно–мероморфного решения $(\Phi(z), \Psi(z))$ системы двух задач дробно–линейного сопряжения

$$\Phi^+ = \frac{g_{21} + g_{22}\Phi^- + g_{23}\Psi^-}{g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-}, \qquad \Psi^+ = \frac{g_{31} + g_{32}\Phi^- + g_{33}\Psi^-}{g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-}. \tag{2.3}$$

Обратно, если пара кусочно–мероморфных функций $(\Phi(z), \Psi(z))$ является решением системы задач (2.3), то, переписав эти равенства в виде

$$g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^- = \frac{\Phi^-}{\Phi^+}\left(g_{22} + g_{21}\frac{1}{\Phi^-} + g_{23}\frac{\Psi^-}{\Phi^-}\right),$$
$$g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^- = \frac{\Psi^-}{\Psi^+}\left(g_{33} + g_{31}\frac{1}{\Psi^-} + g_{32}\frac{\Phi^-}{\Psi^-}\right)$$

и, учитывая (2.2), получим, что вектор–функция $\mathbf{w}(z)$, у которой на Γ предельные значения компонент определяются условиями

$$g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^- = \frac{w^{1+}}{w^{1-}}, \qquad w^{2\pm} = \Phi^{\pm}w^{1\pm}, \qquad w^{3\pm} = \Psi^{\pm}w^{1\pm}, \tag{2.4}$$

будет решением задачи линейного сопряжения (1.3).

Определение 2.2. *Две невырожденные тройки определенных на Γ функций $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ и $(\tilde\lambda_1(t), \tilde\lambda_2(t), \tilde\lambda_3(t))$ назовем подобными, если их соответствующие компоненты пропорциональны:*

$$\frac{\lambda_1(t)}{\tilde\lambda_1(t)} = \frac{\lambda_2(t)}{\tilde\lambda_2(t)} = \frac{\lambda_3(t)}{\tilde\lambda_3(t)}, \quad t \in \Gamma.$$

3. Основные результаты. Вспомогательные конструкции

В данной статье показана возможность построения канонической системы решений, в предположении существования двух решений задачи линейного сопряжения (1.2) с подобными тройками. Сначала будут приведены необходимые условия существования у задачи (1.2) двух таких решений, а затем будут указаны дополнительные требования на элементы матрицы–функции (1.1), обеспечивающие возможность эффективного построение ее канонической системы решений.

Пусть $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ — два решения задачи (1.2) с подобными тройками $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ и $(\tilde\lambda_1(t), \tilde\lambda_2(t), \tilde\lambda_3(t))$. Тогда соответствующие отношения (2.2) определят два кусочно-мероморфных решения $(\Phi_1(z), \Psi_1(z))$ и $(\Phi_2(z), \Psi_2(z))$ системы задач дробно–линейного сопряжения (2.3). Из условия подобия троек, согласно определению 2.1, нетрудно заключить, что эти решения связаны соотношениями

$$\Phi_2(z) = r_1(z)\Phi_1(z), \qquad \Psi_2(z) = r_2(z)\Psi_1(z), \tag{3.1}$$

в которых $r_1(z)$ и $r_2(z)$ — рациональные функции. Таким образом, для предельных значений функций (3.1) на Γ, в силу (2.3), придем к необходимости выполнения системы равенств

$$\begin{aligned}
&g_{11}\Phi_1^+ + g_{12}\Phi_1^+\Phi_1^- + g_{13}\Phi_1^+\Psi_1^- = g_{21} + g_{22}\Phi_1^- + g_{23}\Psi_1^-,\\
&g_{11}\Psi_1^+ + g_{12}\Psi_1^+\Phi_1^- + g_{13}\Psi_1^+\Psi_1^- = g_{31} + g_{32}\Phi_1^- + g_{33}\Psi_1^-,\\
&r_1g_{11}\Phi_1^+ + r_1^2g_{12}\Phi_1^+\Phi_1^- + r_1r_2g_{13}\Phi_1^+\Psi_1^- = g_{21} + r_1g_{22}\Phi_1^- + r_2g_{23}\Psi_1^-,\\
&r_2g_{11}\Psi_1^+ + r_1r_2g_{12}\Psi_1^+\Phi_1^- + r_2^2g_{13}\Psi_1^+\Psi_1^- = g_{31} + r_1g_{32}\Phi_1^- + r_2g_{33}\Psi_1^-.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Исключая из равенств (3.2) произведения $\Phi_1^+(t)\Phi_1^-(t)$ и $\Psi_1^+(t)\Phi_1^-(t)$, а затем произведения $\Phi_1^+(t)\Psi_1^-(t)$ и $\Psi_1^+(t)\Psi_1^-(t)$, при $r_1(t) \neq r_2(t)$ приходим на Γ к равенствам

$$\begin{aligned}
&r_1\Phi_1^+\left[(r_1-1)g_{11} + (r_1-r_2)g_{13}\Psi_1^-\right] = (r_1^2-1)g_{21} + r_1(r_1-1)g_{22}\Phi_1^- + (r_1^2-r_2)g_{23}\Psi_1^-,\\
&r_2\Psi_1^+\left[(r_1-1)g_{11} + (r_1-r_2)g_{13}\Psi_1^-\right] = (r_1r_2-1)g_{31} + r_1(r_2-1)g_{32}\Phi_1^- + r_2(r_1-1)g_{33}\Psi_1^-,\\
&r_1\Phi_1^+\left[(r_2-1)g_{11} + (r_2-r_1)g_{12}\Phi_1^-\right] = (r_1r_2-1)g_{21} + r_1(r_2-1)g_{22}\Phi_1^- + r_2(r_1-1)g_{23}\Psi_1^-,\\
&r_2\Psi_1^+\left[(r_2-1)g_{11} + (r_2-r_1)g_{12}\Phi_1^-\right] = (r_2^2-1)g_{31} + (r_2^2-r_1)g_{32}\Phi_1^- + r_2(r_2-1)g_{33}\Psi_1^-.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Введем на Γ следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&(r_1-1)g_{11}+(r_1-r_2)g_{13}\Psi_1^- = \phi_1^+/\phi_1^-,\\
&(r_2-1)g_{11}+(r_2-r_1)g_{12}\Phi_1^- = \phi_2^+/\phi_2^-,\\
&\Phi_1^\pm\phi_1^\pm=\phi_3^\pm, \qquad \Psi_1^\pm\phi_1^\pm=\phi_4^\pm,\\
&\Phi_1^\pm\phi_2^\pm=\phi_5^\pm, \qquad \Psi_1^\pm\phi_2^\pm=\phi_6^\pm.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Обозначения (3.4) позволяют записать полученные выше нелинейные условия для предельных значений на Γ функций $\Phi_1^\pm(t)$, $\Psi_1^\pm(t)$ в виде задачи линейного сопряжения

$$\begin{aligned}
\phi_1^+ &= (r_1-1)g_{11}\phi_1^- + (r_1-r_2)g_{13}\phi_4^-,\\
\phi_2^+ &= (r_2-1)g_{11}\phi_2^- + (r_2-r_1)g_{12}\phi_5^-,\\
\phi_3^+ &= \frac{(r_1^2-1)}{r_1}g_{21}\phi_1^- + (r_1-1)g_{22}\phi_3^- + \frac{(r_1^2-r_2)}{r_1}g_{23}\phi_4^-,\\
\phi_4^+ &= \frac{(r_1r_2-1)}{r_2}g_{31}\phi_1^- + \frac{r_1(r_2-1)}{r_2}g_{32}\phi_3^- + (r_1-1)g_{33}\phi_4^-,\\
\phi_5^+ &= \frac{(r_1r_2-1)}{r_1}g_{21}\phi_2^- + (r_2-1)g_{22}\phi_5^- + \frac{r_2(r_1-1)}{r_1}g_{23}\phi_6^-,\\
\phi_6^+ &= \frac{(r_2^2-1)}{r_2}g_{31}\phi_2^- + \frac{(r_2^2-r_1)}{r_2}g_{32}\phi_5^- + (r_2-1)g_{33}\phi_6^-.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Решения полученной задачи линейного сопряжения, согласно (3.4), должны удовлетворять условиям

$$\frac{\phi_3^\pm(t)}{\phi_1^\pm(t)} = \frac{\phi_5^\pm(t)}{\phi_2^\pm(t)}, \qquad \frac{\phi_4^\pm(t)}{\phi_1^\pm(t)} = \frac{\phi_6^\pm(t)}{\phi_2^\pm(t)}, \qquad t\in\Gamma. \tag{3.6}$$

Обратно, если известно решение задачи линейного сопряжения (3.5), удовлетворяющее условиям (3.6), то переписав краевые условия (3.5) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_1^+}{\phi_1^-} &= (r_1-1)g_{11} + (r_1-r_2)g_{13}\frac{\phi_4^-}{\phi_1^-},\\
\frac{\phi_2^+}{\phi_2^-} &= (r_2-1)g_{11} + (r_2-r_1)g_{12}\frac{\phi_5^-}{\phi_2^-},\\
\frac{\phi_3^+}{\phi_1^+}\frac{\phi_1^+}{\phi_1^-} &= \frac{(r_1^2-1)}{r_1}g_{21} + (r_1-1)g_{22}\frac{\phi_3^-}{\phi_1^-} + \frac{(r_1^2-r_2)}{r_1}g_{23}\frac{\phi_4^-}{\phi_1^-},\\
\frac{\phi_4^+}{\phi_1^+}\frac{\phi_1^+}{\phi_1^-} &= \frac{(r_1r_2-1)}{r_2}g_{31} + \frac{r_1(r_2-1)}{r_2}g_{32}\frac{\phi_3^-}{\phi_1^-} + (r_1-1)g_{33}\frac{\phi_4^-}{\phi_1^-},\\
\frac{\phi_5^+}{\phi_2^+}\frac{\phi_2^+}{\phi_2^-} &= \frac{(r_1r_2-1)}{r_1}g_{21} + (r_2-1)g_{22}\frac{\phi_5^-}{\phi_2^-} + \frac{r_2(r_1-1)}{r_1}g_{23}\frac{\phi_6^-}{\phi_2^-},\\
\frac{\phi_6^+}{\phi_2^+}\frac{\phi_2^+}{\phi_2^-} &= \frac{(r_2^2-1)}{r_2}g_{31} + \frac{(r_2^2-r_1)}{r_2}g_{32}\frac{\phi_5^-}{\phi_2^-} + (r_2-1)g_{33}\frac{\phi_6^-}{\phi_2^-}
\end{aligned}$$

и, полагая

$$\Phi_1^\pm(t) = \frac{\phi_3^\pm(t)}{\phi_1^\pm(t)} = \frac{\phi_5^\pm(t)}{\phi_2^\pm(t)}, \qquad \Psi_1^\pm(t) = \frac{\phi_4^\pm(t)}{\phi_1^\pm(t)} = \frac{\phi_6^\pm(t)}{\phi_2^\pm(t)}, \qquad t\in\Gamma, \tag{3.7}$$

получим, что функции $(\Phi_1(z), \Psi_1(z))$ и функции (3.1) удовлетворяют условиям (3.3), а, значит, и условиям (3.2).

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи линейного сопряжения (1.3), позволяющие записать решение задачи линейного сопряжения (3.5) в замкнутой форме.

Предположим, что элементы матрицы–функции (1.1) удовлетворяют условиям

$$g_{12}(t) \neq 0, \quad g_{13}(t) \neq 0, \quad g_{21}(t) \neq 0, \quad g_{33}(t) \neq 0, \quad g_{11}(t) \equiv 0, \quad g_{23}(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma. \tag{3.8}$$

Определитель матрицы–функции задачи линейного сопряжения (3.5) в этом случае равен

$$\begin{aligned}\Delta_1 =& \frac{(r_1 r_2 - 1)}{r_1 r_2}(r_2 - r_1)^2 (r_1 - 1)(r_2 - 1) g_{12} g_{13} g_{21} g_{33} \\ & \cdot \left[(r_1 + 1)(r_2 - 1) g_{21} g_{32} - (r_1 r_2 - 1) g_{22} g_{31}\right].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Будем считать, что этот определитель не обращается в нуль и бесконечность на Γ. В условиях (3.8) задача линейного сопряжения (3.5) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
\phi_1^+ &= (r_1 - r_2) g_{13} \phi_4^-, \\
\phi_2^+ &= (r_2 - r_1) g_{12} \phi_5^-, \\
\phi_3^+ &= \frac{(r_1^2 - 1)}{r_1} g_{21} \phi_1^- + (r_1 - 1) g_{22} \phi_3^-, \\
\phi_4^+ &= \frac{(r_1 r_2 - 1)}{r_2} g_{31} \phi_1^- + \frac{r_1 (r_2 - 1)}{r_2} g_{32} \phi_3^- + (r_1 - 1) g_{33} \phi_4^-, \\
\phi_5^+ &= \frac{(r_1 r_2 - 1)}{r_1} g_{21} \phi_2^- + (r_2 - 1) g_{22} \phi_5^-, \\
\phi_6^+ &= \frac{(r_2^2 - 1)}{r_2} g_{31} \phi_2^- + \frac{(r_2^2 - r_1)}{r_2} g_{32} \phi_5^- + (r_2 - 1) g_{33} \phi_6^-.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Из первых двух краевых условий находим

$$\phi_1^+ = (r_1 - r_2) g_{13}^+, \qquad \phi_4^- = \frac{1}{g_{13}^-}, \qquad \phi_2^+ = (r_2 - r_1) g_{12}^+, \qquad \phi_5^- = \frac{1}{g_{12}^-}, \tag{3.11}$$

в которых здесь и ниже при $g_{ij}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ полагаем $g_{ij}(t) = g_{ij}^+(t) g_{ij}^-(t)$, $i, j = 1, 2, 3$ — факторизации на Γ соответствующих элементов матрицы–функции (1.1). Тогда из последних двух краевых условий (3.10) найдем

$$\begin{aligned}
\phi_5^+ &= \frac{(r_1 r_2 - 1)}{r_1} g_{21}^+ \left(P[K] + R\right), & \phi_2^- &= \frac{1}{g_{21}^-} \left(-Q[K] + R\right), \\
\phi_6^+ &= (r_2 - 1) g_{33}^+ \left(P[K_1] + R_1\right), & \phi_6^- &= \frac{1}{g_{33}^-} \left(-Q[K_1] + R_1\right).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь R, R_1 — рациональные функции, а функции K и K_1 определены формулами

$$K = \frac{r_1 (r_2 - 1)}{(r_1 r_2 - 1)} \frac{g_{22}}{g_{21}^+ g_{12}^-}, \qquad K_1 = \frac{(r_2^2 - r_1)}{r_2 (r_2 - 1)} \frac{g_{32}}{g_{33}^+ g_{12}^-} + \frac{(r_2 + 1)}{r_2} \frac{g_{31}}{g_{33}^+ g_{21}^-} \left(-Q[K] + R\right). \tag{3.13}$$

Определить на Γ компоненты $\phi_3^{\pm}(t)$, а также $\phi_4^+(t)$ и $\phi_1^-(t)$ решения задачи линейного сопряжения (3.10) в данном случае (без дополнительных ограничений на элементы матрицы–функции (1.1) не представляется возможным. Однако для того, чтобы функции $\Phi_1^{\pm}(t)$, $\Psi_1^{\pm}(t)$ удовлетворяли соответствующим равенствам (3.2) ($g_{11}(t) \equiv 0$, $g_{23}(t) \equiv 0$), они должны удовлетворять равенствам (3.7), согласно которым и формулам (3.11)–(3.13), получим

$$
\begin{aligned}
\Phi_1^+ &= \frac{\phi_5^+}{\phi_2^+} = \frac{(r_1r_2-1)}{r_1(r_2-r_1)}\frac{g_{21}^+}{g_{12}^+}\left(P[K]+R\right),\\
\phi_3^+ &= \phi_1^+\Phi_1^+ = -\frac{(r_1r_2-1)}{r_1}\frac{g_{13}^+g_{21}^+}{g_{12}^+}\left(P[K]+R\right),\\
\Phi_1^- &= \frac{\phi_5^-}{\phi_2^-} = \frac{g_{21}^-}{g_{12}^-\left(-Q[K]+R\right)},\\
\Psi_1^+ &= \frac{\phi_6^+}{\phi_2^+} = \frac{(r_2-1)g_{33}^+}{(r_2-r_1)g_{12}^+}\left(P[K_1]+R_1\right),\\
\phi_4^+ &= \phi_1^+\Psi_1^+ = -\frac{(r_2-1)g_{13}^+g_{33}^+}{g_{12}^+}\left(P[K_1]+R_1\right),\\
\Psi_1^- &= \frac{\phi_6^-}{\phi_2^-} = \frac{g_{21}^-\left(-Q[K_1]+R_1\right)}{g_{33}^-\left(-Q[K]+R\right)},\\
\phi_1^- &= \frac{\phi_4^-}{\Psi_1^-} = \frac{g_{33}^-\left(-Q[K]+R\right)}{g_{13}^-g_{21}^-\left(-Q[K_1]+R_1\right)},\\
\phi_3^- &= \phi_1^-\Phi_1^- = \frac{g_{33}^-}{g_{12}^-g_{13}^-\left(-Q[K_1]+R_1\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Подставляя значения $\phi_1^-(t)$, $\phi_3^\pm(t)$, $\phi_4^\pm(t)$ в третье и четвертое краевые условия (3.10), придем к требованию выполнения на Γ тождеств

$$
\begin{aligned}
&(r_1r_2-1)g_{13}g_{21}g_{12}^-\left(P[K]+R\right)\left(-Q[K_1]+R_1\right)\\
&\qquad+(r_1^2-1)g_{12}g_{21}g_{33}^-\left(-Q[K]+R\right)+r_1(r_1-1)g_{22}g_{12}^+g_{21}^-g_{33}^-\equiv 0,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_2(r_2-1)g_{13}g_{33}^+g_{12}^-g_{21}^-\left(P[K_1]+R_1\right)\left(-Q[K_1]+R_1\right)\\
&\qquad+(r_1r_2-1)g_{12}g_{31}g_{33}^-\left(-Q[K]+R\right)\\
&\qquad+r_2(r_1-1)g_{12}g_{33}g_{21}^-\left(-Q[K_1]+R_1\right)+r_1(r_2-1)g_{32}g_{12}^+g_{21}^-g_{33}^-\equiv 0.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Коэффициенты скалярных задач Римана для определения первых компонент $w_1^1(z)$ и $w_2^1(z)$ решений (1.4) по найденным решениям (3.14) (при условии выполнения тождеств (3.15), (3.16)) определяются первой формулой (2.4) и соответственно равны

$$
\frac{g_{21}^-\left(g_{12}^+g_{33}^-+g_{13}\left(-Q[K_1]+R_1\right)\right)}{g_{33}^-\left(-Q[K]+R\right)},
\tag{3.17}
$$

$$
\frac{g_{21}^-\left(r_1g_{12}^+g_{33}^-+r_2g_{13}\left(-Q[K_1]+R_1\right)\right)}{g_{33}^-\left(-Q[K]+R\right)}.
\tag{3.18}
$$

Вычисляя определитель введенной выше в соответствующих областях матрицы–функции $\Omega^3(z)$, получим

$$
\det\Omega^3(z) = (r_1(z)-1)\Phi_1(z)w_1^1(z)w_2^1(z).
\tag{3.19}
$$

4. Первый основной результат

Теорема 4.1. *Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- ($0 \in D^+$, $\infty \in D^-$), $G(t)$ — H–непрерывная на Γ матрица–функция третьего порядка ($\det G(t) \neq 0$). Если элементы матрицы–функции (1.1) удовлетворяют условиям (3.8) и связаны тождествами (3.15), (3.16), в которых для рациональных функций $r_1 \neq 1$ — постоянная, r_2, R, R_1, определитель (3.9) и функции (3.17), (3.18) не обращаются в нуль и бесконечность на Γ, функции*

$\Psi_1^{\pm}(z)$, *определенные в* (3.13), (3.14) *не имеют конечных полюсов, а функция* $\Phi_1^{\pm}(z)$ *и функции* (3.19) *не имеют нулей и полюсов в области* D^+, *на* Γ *и в конечной части области* D^-. *Тогда каноническая система решений задачи линейного сопряжения* (1.2) *может быть построена эффективно.*

Доказательство. Если условия теоремы выполнены, то функции $\Phi_1^{\pm}(t)$, $\Psi_1^{\pm}(t)$, определенные в (3.13), (3.14), и функции (3.1) удовлетворяют на Γ соответствующим равенствам (3.2). Проверка этого проводится непосредственно, если выразить произведения $(P[K]+R)\,(-Q[K_1]+R_1)$ и $(P[K_1]+R_1)\,(-Q[K_1]+R_1)$ из тождеств (3.15), (3.16) и учесть свойство операторов P и Q $(P+Q=I)$. Определяя компоненты $w_1^1(z)$ и $w_2^1(z)$ как решения соответствующих однородных скалярных задач Римана с коэффициентами (3.17), (3.18) в классе функций без нулей в областях D^+ и D^-, допускающих полярную особенность лишь на бесконечности (канонические функции этих задач), остальные две компоненты решений (1.4) получим по второй и третьей формулам (2.4). Это позволит получить два решения задачи линейного сопряжения (1.2), для которых определители (3.19) матрицы–функции $\Omega^3(z)$ не имеют конечных нулей, что позволяет, согласно предложенному в работе [2] алгоритму, построить эффективно каноническую систему решений задачи. $\square$

Заметим, что в силу ограниченности операторов $P[K]$ и $Q[K]$, можно взять R постоянной и за счет выбора этой постоянной добиться того, чтобы входящие в определения функций $\Phi_1^{\pm}(z)$ выражения $P[K]+R$ и $-Q[K]+R$ не обращались в нуль на Γ и в соответствующих областях D^+ и D^-.

Если допустить наличие нулей определителей (3.19) в конечном числе точек плоскости, то предложенный в [2] алгоритм построения канонической системы решений задачи (1.2) может быть также реализован, учитывая результаты работы [7].

Замечание 4.1. *Обозначим через* $F_{(i,j,k)}$ *матрицу перестановок третьего порядка, компоненты индекса которой* $i\neq j\neq k$ *принимают значения* 1, 2, 3, *а ее ненулевыми элементами в первой, второй и третьей строках являются соответственно элементы* $f_{1i}=f_{2j}=f_{3k}=1$. *При умножении матрицы–функции* $G(t)$ *на матрицу* $F_{(i,j,k)}$ *слева, первой становится строка матрицы–функции* $G(t)$ *с номером* i, *второй — с номером* j, *а третьей — с номером* k. *При умножении же на* $F_{(i,j,k)}$ *справа, первым становится столбец, номер которого определяется номером компоненты индекса, равной* 1, *вторым — столбец, номер которого определяется номером компоненты индекса равной* 2, *и третьим — столбец, номер которого определяется номером компоненты индекса равной* 3. *Обратная к* $F_{(i,j,k)}$ *матрица совпадает с транспонированной:* $F^{-1}_{(i,j,k)}=F'_{(i,j,k)}$. *Записывая для матриц–функций* $F_{(i,j,k)}G(t)$, $G(t)F_{(i,j,k)}$, $F_{(i,j,k)}G(t)F_{(i_1,j_1,k_1)}$ *соответствующие условия теоремы* 4.1, *придем к другим случаям эффективной факторизации матрицы–функции* (1.1).

Пример 1. Пусть выполнены условия (3.8) и соответствующие тождества (3.15), (3.16):

$$g_{13}g_{21}g_{12}^{-}P\left[\frac{g_{22}}{g_{21}^{+}g_{12}^{-}}\right]Q\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^{+}g_{12}^{-}}\right]+2g_{12}g_{21}g_{33}^{-}Q\left[\frac{g_{22}}{g_{21}^{+}g_{12}^{-}}\right]-g_{22}g_{12}^{+}g_{21}^{-}g_{33}^{-}\equiv 0,$$

$$9g_{13}g_{33}^{+}g_{12}^{-}g_{21}^{-}P\left[\frac{g_{32}}{g_{21}^{+}g_{12}^{-}}\right]Q\left[\frac{g_{32}}{g_{21}^{+}g_{12}^{-}}\right]+8g_{12}g_{31}g_{33}^{-}Q\left[\frac{g_{22}}{g_{21}^{+}g_{12}^{-}}\right]$$
$$+9g_{12}g_{33}g_{21}^{-}Q\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^{+}g_{12}^{-}}\right]-8g_{32}g_{12}^{+}g_{21}^{-}g_{33}^{-}\equiv 0,$$

в которых

$$r_1=-2,\qquad r_2=-1,\qquad R=R_1=0$$

— постоянные. Если определитель (3.9), равный $\Delta_1 = 3g_{12}g_{13}g_{21}g_{33}(g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31})$, не обращается в нуль на Γ, то соответствующие функции (3.7), согласно (3.14), имеют вид

$$\Phi_1^+ = -\frac{2g_{21}^+}{g_{12}^+}P\left[\frac{g_{22}}{g_{21}^+g_{12}^-}\right], \qquad \Phi_1^- = -g_{21}^-/4g_{12}^-Q\left[\frac{g_{22}}{g_{21}^+g_{12}^-}\right],$$
$$\Psi_1^+ = -\frac{3g_{33}^+}{g_{12}^+}P\left[\frac{g_{32}}{g_{21}^+g_{12}^-}\right], \qquad \Psi_1^- = 3g_{21}^-Q\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^+g_{12}^-}\right]/8g_{33}^-Q\left[\frac{g_{22}}{g_{21}^+g_{12}^-}\right].$$

Проверка того, что функции $\Phi_1^\pm$, $\Psi_1^\pm$ и $\Phi_2^\pm = -2\Phi_1^\pm$, $\Psi_2^\pm = -\Psi_1^\pm$, удовлетворяют соответствующим условиям (2.3), проверяется непосредственно с учетом приведенных выше тождеств.

Коэффициенты скалярных однородных задач Римана $w_i^{1+}(t) = G_i(t)w_i^{1-}(t)$, $i = 1,2$ ($G_i(t)$ H-непрерывные на Γ функции) для определения первых компонент искомых решений $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ задачи (1.3) соответственно равны

$$G_1 = -g_{21}^-\left(2g_{12}^+g_{33}^- - 3g_{13}Q\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^+g_{12}^-}\right]\right)/8g_{33}^-Q\left[\frac{g_{22}}{g_{21}^+g_{12}^-}\right],$$
$$G_2 = g_{21}^-\left(4g_{12}^+g_{33}^- - 3g_{13}Q\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^+g_{12}^-}\right]\right)/8g_{33}^-Q\left[\frac{g_{22}}{g_{21}^+g_{12}^-}\right].$$

Если эти коэффициенты не обращаются в нуль и бесконечность на Γ, функции Φ_1^-, Ψ_1^- не имеют конечных полюсов, а функция Φ_1^+ не обращается в нуль, то определяя первые компоненты решений (1.4) $w_i^{1\pm}(z)$, $i = 1,2$ согласно ([8]), получим, что определители (3.19) не будут иметь нулей на Γ и в соответствующих областях конечной плоскости, а, значит, каноническая система решений соответствующей задачи (1.3) может быть построена эффективно.

Рассмотрим теперь случай существования у задачи линейного сопряжения (1.3) двух решений с подобными тройками, для которых в равенствах (3.1) $r_1(z) = r_2(z) = r(z)$, $r(t) \neq 1$, $t \in \Gamma$. Краевые условия (3.2) в этом случае перепишутся в виде

$$\begin{aligned}
&g_{11}\Phi_1^+ + g_{12}\Phi_1^+\Phi_1^- + g_{13}\Phi_1^+\Psi_1^- = g_{21} + g_{22}\Phi_1^- + g_{23}\Psi_1^-,\\
&g_{11}\Psi_1^+ + g_{12}\Psi_1^+\Phi_1^- + g_{13}\Psi_1^+\Psi_1^- = g_{31} + g_{32}\Phi_1^- + g_{33}\Psi_1^-,\\
&rg_{11}\Phi_1^+ + r^2g_{12}\Phi_1^+\Phi_1^- + r^2g_{13}\Phi_1^+\Psi_1^- = g_{21} + rg_{22}\Phi_1^- + rg_{23}\Psi_1^-,\\
&rg_{11}\Psi_1^+ + r^2g_{12}\Psi_1^+\Phi_1^- + r^2g_{13}\Psi_1^+\Psi_1^- = g_{31} + rg_{32}\Phi_1^- + rg_{33}\Psi_1^-,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

а из условий (3.3) остается лишь два условия

$$\begin{aligned}
&r(r-1)g_{11}\Phi_1^+ = (r^2-1)g_{21} + r(r-1)g_{22}\Phi_1^- + r(r-1)g_{23}\Psi_1^-,\\
&r(r-1)g_{11}\Psi_1^+ = (r^2-1)g_{31} + r(r-1)g_{32}\Phi_1^- + r(r-1)g_{33}\Psi_1^-,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

при выполнения которых не следует выполнение равенств (4.1).

Вводя обозначения

$$(r-1)g_{11} = \phi_1^+/\phi_1^-, \qquad \Phi_1^\pm\phi_1^\pm = \phi_2^\pm, \qquad \Psi_1^\pm\phi_1^\pm = \phi_3^\pm, \tag{4.3}$$

согласно (4.2) и обозначениям (4.3), придем к задаче линейного сопряжения

$$\begin{aligned}
\phi_1^+ &= (r-1)g_{11}\phi_1^-,\\
\phi_2^+ &= \frac{(r^2-1)}{r}g_{21}\phi_1^- + (r-1)g_{22}\phi_2^- + (r-1)g_{23}\phi_3^-,\\
\phi_3^+ &= \frac{(r^2-1)}{r}g_{31}\phi_1^- + (r-1)g_{32}\phi_2^- + (r-1)g_{33}\phi_3^-.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Определитель матрицы–функции задачи линейного сопряжения (4.4) равен

$$\Delta_2(t) = (r(t)-1)^3 g_{11}(t)(g_{22}(t)g_{33}(t) - g_{23}(t)g_{32}(t)).$$

Будем считать, что этот определитель не обращается в нуль и бесконечность на Γ. Предположим, что элементы матрицы–функции (1.1) удовлетворяют условиям

$$g_{11}(t)\neq 0,\qquad g_{22}(t)\neq 0,\qquad g_{33}(t)\neq 0,\qquad g_{23}(t)\equiv 0,\quad t\in\Gamma \tag{4.5}$$

($\Delta_2(t)\neq 0$). Тогда частное кусочно–мероморфное решение соответствующей задачи линейного сопряжения (4.4) (его предельные значения на Γ) запишем по формулам

$$\phi_1^+ = (r-1)g_{11}^+,\qquad \phi_1^- = \frac{1}{g_{11}^-},$$

$$\phi_2^+ = (r-1)g_{22}^+\left(P[K]+R\right),\qquad \phi_2^- = \frac{1}{g_{22}^-}\left(-Q[K]+R\right),$$

$$\phi_3^+ = (r-1)g_{33}^+\left(P[K_1]+R_1\right),\qquad \phi_3^- = \frac{1}{g_{33}^-}\left(-Q[K_1]+R_1\right),$$

в которых R, R_1 — рациональные функции, а K, K_1 определены формулами

$$K = \frac{(r+1)}{r}\frac{g_{21}}{g_{22}^+g_{11}^-},\qquad K_1 = \frac{(r+1)}{r}\frac{g_{31}}{g_{33}^+g_{11}^-} + \frac{g_{32}}{g_{33}^+g_{22}^-}(-Q[K]+R). \tag{4.6}$$

Тогда, в силу обозначений (4.3), функции

$$\begin{aligned}
\Phi_1^+ &= \frac{g_{22}^+}{g_{11}^+}\left(P[K]+R\right), & \Phi_1^- &= \frac{g_{11}^-}{g_{22}^-}\left(-Q[K]+R\right);\\
\Psi_1^+ &= \frac{g_{33}^+}{g_{11}^+}\left(P[K_1]+R_1\right), & \Psi_1^- &= \frac{g_{11}^-}{g_{33}^-}\left(-Q[K_1]+R_1\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

должны быть предельными значениями на Γ кусочно–мероморфного решения системы задач дробно–линейного сопряжения (2.3), которую, согласно (4.5), перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&g_{11}\Phi^+ + g_{12}\Phi^+\Phi^- + g_{13}\Phi^+\Psi^- = g_{21} + g_{22}\Phi^-,\\
&g_{11}\Psi^+ + g_{12}\Psi^+\Phi^- + g_{13}\Psi^+\Psi^- = g_{31} + g_{32}\Phi^- + g_{33}\Psi^-.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Подставляя функции (4.7) в краевые условия (4.8), придем к необходимости выполнения на Γ системы тождеств

$$\begin{aligned}
&g_{12}\frac{g_{22}^+g_{11}^-}{g_{11}^+g_{22}^-}\left(P[K]+R\right)\left(-Q[K]+R\right) + g_{13}\frac{g_{22}^+g_{11}^-}{g_{11}^+g_{33}^-}\left(P[K]+R\right)\left(-Q[K_1]+R_1\right) \equiv -\frac{g_{21}}{r},\\
&g_{12}\frac{g_{33}^+g_{11}^-}{g_{11}^+g_{22}^-}\left(P[K_1]+R_1\right)\left(-Q[K]+R\right) + g_{13}\frac{g_{33}^+g_{11}^-}{g_{11}^+g_{33}^-}\left(P[K_1]+R_1\right)\left(-Q[K_1]+R_1\right) \equiv -\frac{g_{31}}{r}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Будем рассматривать равенства (4.9) как линейную алгебраическую систему для определения элементов $g_{12}(t)$ и $g_{13}(t)$ матрицы–функции (1.1). Так как определитель этой системы равен тождественному нулю, то для ее совместности необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы был равен рангу расширенной матрицы, что приводит к условию

$$g_{21}g_{33}^+\left(P[K_1]+R_1\right) - g_{31}g_{22}^+\left(P[K]+R\right) \equiv 0. \tag{4.10}$$

Непосредственной проверкой нетрудно показать, что из (4.10) и условия выполнения одного из соотношений (4.9) следует справедливость и другого соотношения. Таким образом, функции (4.7) определят решение системы задач дробно–линейного сопряжения (4.8), если потребовать, например, выполнения на Γ первого тождества (4.9) и тождества (4.10).

Полученным условиям можно придать другую форму. Действительно, согласно (4.10) и свойства операторов P и Q, первое тождество (4.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\left(g_{12}g_{21}g_{33}+g_{13}g_{22}g_{31}-g_{13}g_{21}g_{32}\right)g_{22}^{+}g_{11}^{-}\left(P[K]+R\right)^{2}\\&\quad+\frac{(r+1)}{r}\left(g_{13}g_{21}^{2}g_{32}-g_{12}g_{13}g_{21}g_{31}-g_{12}g_{21}^{2}g_{33}\right)\left(P[K]+R\right)+\frac{1}{r}g_{21}^{2}g_{33}g_{11}^{+}g_{22}^{-}=0.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Поэтому, выполнение первого тождества (4.9) и тождества (4.10) сводится к условию существования корня квадратного уравнения (4.11), мероморфным образом продолжимого в область D^{+}.

Проверим теперь, что функции

$$\Phi_2(z)=r(z)\Phi_1(z),\qquad \Psi_2(z)=r(z)\Psi_1(z),$$

где $(\Phi_1(z),\Psi_1(z))$ — решение системы задач (4.8), также определяют решение этой задачи. Действительно, из формул (4.6), (4.7) следует, что

$$g_{11}\Phi_1^{+}-g_{22}\Phi_1^{-}=\frac{(r+1)}{r}g_{21}.$$

Поэтому, согласно первому условию (4.8), приходим к равенству

$$g_{12}\Phi_1^{+}\Phi_1^{-}+g_{13}\Phi_1^{+}\Psi_1^{-}=-\frac{g_{21}}{r}.$$

Аналогично, из формул (4.6), (4.7) следует, что

$$g_{11}\Psi_1^{+}-g_{33}\Psi_1^{-}-g_{32}\Phi_1^{-}=\frac{(r+1)}{r}g_{31},$$

а из второго условия (4.8) получим

$$g_{12}\Psi_1^{+}\Phi_1^{-}+g_{13}\Psi_1^{+}\Psi_1^{-}=-\frac{g_{31}}{r}.$$

Подставляя функции $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ в (4.8) и учитывая полученные соотношения, придем к соответствующим тождествам.

Коэффициенты скалярных задач Римана для определения первых компонент $w_1^1(z)$ и $w_2^1(z)$ решений (1.4) по найденным решениям задачи (2.3) определяются первыми формулами (2.4), в которых слагаемое $g_{12}\Phi_1^{-}+g_{13}\Psi_1^{-}$ выражено из полученного выше равенства и соответственно равны

$$g_{11}-\frac{g_{21}}{r}\frac{g_{11}^{+}}{g_{22}^{+}\left(P[K]+R\right)}\qquad\text{и}\qquad g_{11}-\frac{g_{21}g_{11}^{+}}{g_{22}^{+}\left(P[K]+R\right)}.\tag{4.12}$$

Если эти коэффициенты не обращаются в нуль и бесконечность на Γ, то определяя компоненты $w_1^1(z)$ и $w_2^1(z)$ как решения соответствующих однородных скалярных задач Римана в классе функций без нулей в областях D^{+} и D^{-}, допускающих полярную особенность лишь на бесконечности (канонические функции этих задач), остальные две компоненты решений (1.4) получим по второй и третьей формулам (2.4).

Вычисляя определители матрицы–функции $\Omega^3(z)$, получаемой из определенной выше прямоугольной матрицы–функции $\Omega(z)=||w_i^j(z)||$, $j=1,2,3$, $i=1,2$, вычеркиванием третьей строки, получим

$$\det\Omega^3(z)=(r(z)-1)\Phi_1(z)w_1^1(z)w_2^1(z).\tag{4.13}$$

5. Второй основной результат

Теорема 5.1. *Пусть* Γ — *простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области* D^+ *и* D^- $(0 \in D^+, \infty \in D^-)$, $G(t)$ — H*–непрерывная на* Γ *матрица–функция третьего порядка* $(\det G(t) \neq 0)$. *Если элементы матрицы–функции* (1.1) *удовлетворяют условиям* (4.5) *и связаны одним из тождеств* (4.9) *и тождеством* (4.10), *в которых* $r \neq 1$ — *постоянная, а* R, R_1 — *полиномы, функции* (4.12) *не обращаются в нуль и бесконечность на* Γ, *а функции* $\Phi_1^{\pm}(z)$, *определенные в* (4.6), (4.7) *и функции* (4.13) *не имеют нулей в области* D^+ *на* Γ *и в конечной части области* D^-; *выполнены перечисленные условия для матрицы–функции* (1.1), *умноженной слева и (или) справа на матрицы перестановок третьего порядка.*

Тогда каноническая система решений задачи линейного сопряжения (1.2) *может быть построена эффективно.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1.

Пример 2. Пусть выполняются условия (4.5) и элементы матрицы–функции (1.1) связаны первым тождеством (4.9) и тождеством (4.10):

$$g_{12}\frac{g_{22}^{+}g_{11}^{-}}{g_{11}^{+}g_{22}^{-}} - g_{13}\frac{g_{22}^{+}g_{11}^{-}}{g_{11}^{+}g_{33}^{-}}Q\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^{+}g_{22}^{-}}\right] \equiv g_{21},$$

$$g_{21}g_{33}^{+}P\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^{+}g_{22}^{-}}\right] - g_{31}g_{22}^{+} \equiv 0,$$

в которых

$$r \equiv -1, \qquad R \equiv 1, \qquad R_1 \equiv 0, \qquad K \equiv 0, \qquad K_1 = \frac{g_{32}}{g_{33}^{+}g_{22}^{-}}.$$

Тогда формулы

$$\Phi_1^{+} = \frac{g_{22}^{+}}{g_{11}^{+}}, \qquad \Phi_1^{-} = \frac{g_{11}^{-}}{g_{22}^{-}}, \qquad \Phi_2^{\pm} = -\Phi_1^{\pm};$$

$$\Psi_1^{+} = \frac{g_{33}^{+}}{g_{11}^{+}}P\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^{+}g_{22}^{-}}\right], \qquad \Psi_1^{-} = -\frac{g_{11}^{-}}{g_{33}^{-}}Q\left[\frac{g_{32}}{g_{33}^{+}g_{22}^{-}}\right], \qquad \Psi_2^{\pm} = -\Psi_1^{\pm}$$

определят решения системы задач дробно–линейного сопряжения (4.8), удовлетворяющие условиям теоремы 5.1. Проверка этого осуществляется непосредственной подстановкой в (4.8) выражений для $\Phi_1^{\pm}(t)$ и $\Psi_1^{\pm}(t)$, в которых значения на Γ операторов $P[K_1]$ и $Q[K_1]$ взяты из приведенных тождеств (при условии аналитической продолжимости полученных выражений в соответствующие области). В рассматриваемом случае $(r \equiv -1,\ R \equiv 1)$ уравнение (4.11) запишется в виде

$$(g_{12}g_{21}g_{33} + g_{13}g_{22}g_{31} - g_{13}g_{21}g_{32})\,g_{22}^{+}g_{11}^{-} = g_{21}^{2}g_{33}g_{11}^{+}g_{22}^{-},$$

а само уравнение имеет корни 1 и -1.

Функции (4.12) принимают на Γ вид

$$\frac{g_{11}g_{22}^{+} + g_{21}g_{11}^{+}}{g_{22}^{+}}, \qquad \frac{g_{11}g_{22}^{+} - g_{21}g_{11}^{+}}{g_{22}^{+}}.$$

Если эти функции не обращаются в нуль на Γ, то, определяя первые компоненты $w_1^1(z)$ и $w_2^1(z)$ решений (1.4) как решения соответствующих однородных скалярных задач Римана в классе функций без нулей в областях D^+ и конечной части области D^- и учитывая, что функции $\Phi_1^{\pm}(z)$ не обращаются в нуль в соответствующих областях конечной плоскости получим, что определитель для решений (2.4) в формуле (4.13) удовлетворяет условиям теоремы 5.1 , а каноническая система решений соответствующей задачи линейного сопряжения может быть построена эффективно.

Подставляя различные (допустимые) значения определенных выше рациональных функций в условия теоремы 4.1 и теоремы 5.1, выделим классы задач линейного сопряжения (1.3), разрешимых в замкнутой форме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.П. Векуа. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* М.: Наука. 1970.
2. С.Н. Киясов. *Об одном дополнении к общей теории задачи линейного сопряжения для кусочно аналитического вектора* // Сиб. мат. ж. **59**:2, 369–377 (2018).
3. M.C. Camara, L. Rodman, I.M. Spitkovsky. *One sided invertibility of matrices over commutative rings. corona problems. and Toeplitz operators with matrix symbols* // Linear Algebra Appl. **459**, 58–82 (2014).
4. С.Н. Киясов. *Некоторые классы задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме* // Сиб. мат. ж. **56**:2, 389–408 (2015).
5. С.Н. Киясов. *К вопросу разрешимости в замкнутой форме некоторых задач линейного сопряжения для трехмерного кусочно–аналитического вектора* // Изв. Высш. Учебн. Завед., Мат. 2, 22–28 (2020).
6. С.Н. Киясов. *Разрешимость в замкнутой форме одной задачи линейного сопряжения для трехмерного кусочно–аналитического вектора* // Изв. Высш. Учебн. Завед., Мат. 10, 65–72 (2020).
7. В.М. Адуков. *Факторизация Винера — Хопфа мероморфных матриц–функций* // Алгебра Анал. **4**:1, 54–74 (1992).
8. Ф.Д. Гахов. *Краевые задачи.* М.: Наука. 1977.

Сергей Николаевич Киясов,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия, РТ
E-mail: Sergey.Kijasov@kpfu.ru