ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 4 (2024). С. 22-39.

УДК 517.5

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОРЕЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПАРАМЕТРИЗОВАННОГО СЕМЕЙСТВА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Рассматриваются гильбертовы пространства целых функций

$$P_\beta(D)=\left\{F\in H(\mathbb{C}):\ \|F\|^2:=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{|F(re^{i\varphi})|^2drd\Delta(\varphi)}{K(re^{i\varphi})r^{2\beta}}<\infty\right\},$$

где D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости,

$$K(\lambda)=\|e^{\lambda z}\|^2_{L_2(D)}=\int_D|e^{\lambda z}|^2dm(z),\quad \lambda\in\mathbb{C},$$
$$h(\varphi)=\max_{z\in\overline{D}}\operatorname{Re} ze^{i\varphi},\quad \varphi\in[0;2\pi],$$
$$\Delta(\varphi)=h(\varphi)+\int_0^\varphi h(\theta)d\theta,\quad \varphi\in[0;2\pi].$$

Интерес к этим пространствам вызван тем, что $P_0(D)$ — это пространство преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на пространстве Бергмана $B_2(D)$, а $P_{\frac12}(D)$ — пространство преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на пространстве Смирнова $E_2(D)$. В статье для параметров $\beta\in\left(-\frac12;\frac32\right)$ дано полное описание пространств преобразований Бореля функций из пространств $P_\beta(D)$. Таким образом, пространства Бергмана и Смирнова вкладываются в шкалу гильбертовых пространств, что, по мнению авторов, должно позволить применить теорию гильбертовых шкал для исследования задач в этих пространствах.

Ключевые слова: шкала гильбертовых пространств, преобразование Бореля, пространство Бергмана, пространство Смирнова.

Mathematics Subject Classification: 46E20, 30D15

1. Введение

Пусть D — ограниченная выпуклая область на плоскости. Пространства Бергмана $B_2(D)$ и Смирнова $E_2(D)$ достаточно хорошо изучены в силу их важности в задачах комплексного анализа. Напомним, что $B_2(D)=H(D)\cap L_2(D)$, где $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D и $L_2(D)$ — пространство функций с суммируемым в квадрате модулем. В частности, в работах [1], [2] установлено, что преобразование Лапласа

K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, Borel transforms of functions in parametrized family of Hilbert spaces.

Исследование первого автора (§2-3) выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1444). Работа второго автора (§4) выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Поступила 27 июня 2024 г.

линейных непрерывных функционалов $\mathcal{L} : S \longrightarrow \widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z})$ осуществляет изоморфизм сопряженного к $E_2(D)$ пространства на пространство

$$\widehat{E}_2(D) = \left\{ F \in H(\mathbb{C}) : \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2 dr d\Delta(\varphi)}{K_1(re^{i\varphi})} < \infty \right\},$$

где $h(\varphi)$ — опорная функция этой области, то есть

$$h(\varphi) = \max_{z \in \overline{D}} \operatorname{Re} ze^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0; 2\pi],$$

$$\Delta(\varphi) = h(\varphi) + \int^{\varphi} h(\theta) d\theta, \quad \varphi \in [0; 2\pi],$$

$$K_1(\lambda) = \|e^{\lambda z}\|^2_{L_2(\partial D)} = \int_D |e^{\lambda z}|^2 ds(z), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

и $ds(z)$ — элемент длины дуги границы D. В работе [3] показано, что преобразование Лапласа осуществляет изоморфизм сопряженного к $B_2(D)$ пространства на пространство

$$\widehat{B}_2(D) = \left\{ F \in H(\mathbb{C}) : \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2 dr d\Delta(\varphi)}{K(re^{i\varphi})} < \infty \right\},$$

где

$$K(\lambda) = \|e^{\lambda z}\|^2_{L_2(D)} = \int_D |e^{\lambda z}|^2 dm(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Учитывая, что $K_1(\lambda) \cong |\lambda| K(\lambda)$, $|\lambda| \to \infty$, для $\beta \in \mathbb{R}$ естественно рассмотреть пространства

$$P_\beta(D) = \left\{ F \in H(\mathbb{C}) : \ \|F\|^2 := \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2 dr d\Delta(\varphi)}{K(re^{i\varphi}) r^{2\beta}} < \infty \right\}.$$

Пространства $P_\beta(D)$ образуют непрерывную шкалу гильбертовых пространств, причем, как говорилось выше $\widehat{P}_0(D)$ изоморфно $B_2(D)$ и $\widehat{P}_{\frac{1}{2}}(D)$ изоморфно $E_2(D)$. Таким образом, пространства Бергмана и Смирнова вкладываются в шкалу гильбертовых пространств, что, по мнению авторов, должно позволить применить теорию гильбертовых шкал для исследования задач в этих пространствах.

Функцией, ассоциированной по Борелю с целой функцией F экспоненциального типа σ называется функция

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{z^{k+1}}, \quad |z| > \sigma.$$

Пусть $H_0(D)$ — пространство функций, аналитических в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и исчезающих в бесконечности. Для $\alpha > 0$ положим

$$G^\alpha(D) = \left\{ h(\zeta) \in H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) : \ \|h\|^2 := \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |h''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2\alpha}(D, \zeta) dm(\zeta) < \infty \right\}.$$

В данной работе мы намерены доказать следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть F — целая функция с индикаторной диаграммой D, γ — функция, ассоциированная с F по Борелю и $\beta \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Для некоторых констант $c(\beta, D), C(\beta, D) > 0$, зависящих от области D и параметра β, выполняется соотношение*

$$c(\beta, D) \|\gamma\|^2_{G^{\beta+1}} \leqslant \|F\|_{P_\beta} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi}) r^{2\beta}} d\Delta(\varphi) dr \leqslant C(\beta, D) \|\gamma\|^2_{G^{\beta+1}}.$$

Интерес к этим пространствам вызван тем, что у авторов есть обоснованное предположение, что пространства $P_\beta(D)$ допускают безусловные базисы из воспроизводящих ядер (см. [4]–[8]). Соответственно, будет обнаружена шкала гильбертовых пространств функций, аналитических в выпуклой области D, допускающих безусловные базисы из экспонент.

В первых двух параграфах будут доказаны подготовительные теоремы. В первом параграфе мы оценим интеграл

$$\int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2 dr}{K(re^{i\varphi})r^{2\beta}}$$

при $\beta > -\frac{1}{2}$, а во втором параграфе будет обоснована локализация нормы в пространствах G^α.

2. Подготовительные утверждения. Оценка интеграла по радиусу

Для фиксированного $\varphi \in [0; 2\pi]$ с помощью отображения $z \to w = ze^{i\varphi} - h(\varphi)$ преобразуем область D в область D_φ, которая располагается в левой полуплоскости и касается оси ординат. Для $t < 0$ через $s(t, \varphi)$ обозначим площадь пересечения области D_φ с полосой $\{z = x + iy : \ t < x < 0\}$.

Теорема 2.1. *Пусть F — целая функция, удовлетворяющая условию: для некоторых $\beta \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $\varphi \in [0; 2\pi]$*

$$I_\varphi = \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})r^{2\beta}} dr < \infty,$$

и γ — преобразование Бореля функции F. Тогда для некоторых постоянных $a(\beta)$, $A(\beta)$, зависящих только от параметра β (см. замечание в конце параграфа), выполняются оценки

$$a(\beta)I_\varphi \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - (x+iy)))|^2 |x|^{2\beta+3}}{s(x,\varphi)} dxdy \leqslant A(\beta)I_\varphi.$$

Доказательство по существу основано на рассуждениях §1 в работе [3]. Поэтому мы постарались сохранить соответствующие обозначения. На полуплоскости

$$P_\varphi = \{\zeta : \ \operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi} > h(\varphi)\}$$

функция γ восстанавливается по формуле

$$\gamma(\zeta) = \int_0^\infty F(re^{i\varphi})e^{-\zeta re^{i\varphi}} e^{i\varphi} dr.$$

Точки этой полуплоскости представим в виде $\zeta = (h(\varphi) - \xi)e^{-i\varphi}$, где ξ изменяется в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\xi < 0$. Тогда

$$\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - \xi)) = \int_0^\infty \left(F(re^{i\varphi})r^2 e^{3i\varphi} e^{-h(\varphi)r}\right) e^{\xi r} dr. \tag{2.1}$$

Воспользуемся теоремой из работы [9].

Теорема 2.2. *Пусть $v(t)$ — выпуклая функция, заданная на интервале I, и $\tilde{v}$ — функция, сопряженная по Юнгу с v:*

$$\tilde{v}(x) = \sup_{t \in I}(xt - v(t)).$$

Положим

$$J = \{x \in \mathbb{R} : \ \tilde{v}(x) < \infty\},$$

$$K_0(x) = \int_I e^{2xt - 2v(t)} dt, \quad x \in J.$$

Тогда для любой функции g на I, для которой конечен интеграл

$$\|g\|^2 = \int_I |g(t)|^2 e^{-2v(t)} dt,$$

функция

$$\widehat{g}(z) = \int_I \overline{g}(t) e^{zt-2v(t)} dt$$

удовлетворяет неравенствам

$$a\|g\|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \int_J \frac{\widehat{g}(x+iy)|^2}{K_0(x)} d\widetilde{v}'(x) dy \leqslant A\|g\|^2,$$

где $a, A > 0$ — абсолютные постоянные, не зависящие от функции g и веса v.

Пусть

$$\eta(r) = \frac{e^{2h(\varphi)r}}{K(re^{i\varphi})}, \quad u(r) = \frac{1}{2}\ln\frac{\eta(r)}{r^4}, \quad v(r) = u(r) - \beta \ln r.$$

С помощью этих функций формулу (2.1) запишем в виде

$$\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi)-\xi)) = \int_0^{\infty} \frac{F(re^{i\varphi})e^{3i\varphi}e^{h(\varphi)r}}{r^{2+2\beta}K(re^{i\varphi})} e^{\xi r - 2v(r)} dr.$$

Далее мы намерены применить теорему 2.2, полагая $I = (0; +\infty)$,

$$g(r) = \frac{\overline{F}(re^{i\varphi})e^{-3i\varphi}e^{h(\varphi)r}}{r^{2+2\beta}K(re^{i\varphi})},$$

и, беря в качестве весовой функции $v(t)$. Для этого нужно убедиться в том, что функция $v(t)$ — выпукла.

Лемма 2.1. *Верны следующие утверждения.*

1) *Функция v выпукла на $I = (0; +\infty)$ и*

$$\left(\frac{1}{2} + \beta\right)\frac{1}{r^2} \leqslant v''(r) \leqslant (2+\beta)\frac{1}{r^2}, \quad r > 0;$$

2) *Если $\widetilde{v}(x) = \sup_{r>0}(xr - v(r))$, $x \in J = (-\infty; 0)$, — функция, сопряженная по Юнгу с функцией v, то*

$$\frac{(1+2\beta)^2}{4(2+\beta)}\frac{1}{x^2} \leqslant \widetilde{v}''(x) \leqslant \frac{2(2+\beta)^2}{1+2\beta}\frac{1}{x^2}, \quad x < 0.$$

Доказательство. В первом пункте Леммы 1 в работе [3] доказаны оценки

$$\frac{1}{2}\frac{1}{r^2} \leqslant u''(r) \leqslant \frac{2}{r^2}, \quad r > 0,$$

из которых следуют оценки пункта 1). Докажем второй пункт. В доказательстве Леммы 1 в [3] показано (см. (5))

$$-\frac{2}{r} \leqslant u'(r) \leqslant -\frac{1}{2r}, \quad r > 0,$$

значит,

$$-(2+\beta)\frac{1}{r} \leqslant v'(r) \leqslant -\left(\frac{1}{2} + \beta\right)\frac{1}{r}. \tag{2.2}$$

Там же доказаны соотношения

$$u(r) \to -\infty, \quad \left|\frac{u(r)}{\ln r}\right| = O(1), \text{когда } r \to +\infty, \quad \lim_{r\to 0+} u(r) = +\infty,$$

поэтому функция $\widetilde{v}(x)$ определена на $(-\infty; 0)$ и

$$\lim_{r\to 0+}(xr - v(r)) = \lim_{r\to +\infty}(xr - v(r)) = -\infty.$$

Таким образом, супремум в определении функции $\widetilde{v}$ достигается в единственной стационарной точке $r = r(x) > 0$, такой, что $v'(r) = x$. Из оценок (2.2) получим

$$-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\frac{1}{x} \leqslant r(x) \leqslant -(2+\beta)\frac{1}{x}. \tag{2.3}$$

По определению функции $\widetilde{v}(x)$ имеем тождество

$$\widetilde{v}(x) \equiv xr(x) - v(r(x)), \quad x < 0,$$

или

$$\widetilde{v}(v'(r)) \equiv v'(r)r - u(r), \quad r > 0.$$

Продифференцируем дважды последнее тождество:

$$\widetilde{v}''(v'(r))v''(r) \equiv 1, \quad r > 0.$$

Отсюда с учетом (2.3) и утверждения 1) доказываемой леммы получим

$$\frac{(1+2\beta)^2}{4(2+\beta)}\frac{1}{x^2} \leqslant \widetilde{v}''(x) = \frac{1}{v''(r(x))} \leqslant \frac{2(2+\beta)^2}{1+2\beta}\frac{1}{x^2}, \quad x < 0.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Применим теорему 2.2 к функции

$$g(r) = \frac{\overline{F}(re^{i\varphi})e^{-3i\varphi}e^{h(\varphi)r}}{r^{2+2\beta}K(re^{i\varphi})}.$$

Из нее следует, что величина

$$\|g\|^2 = \int_0^\infty |g(r)|^2 e^{-2v(r)}dr = \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2 dr}{K(re^{i\varphi})r^{2\beta}} = I_\varphi$$

сравнима с интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi)-(x+iy)))|^2}{K_0(x,\varphi)} d\widetilde{v}'(x)dy.$$

Оценивая $d\widetilde{v}'(x)$ по п. 2) леммы 2.1, получим

$$\frac{(1+2\beta)^2}{4(2+\beta)}aI_\varphi \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi)-(x+iy)))|^2}{K_0(x,\varphi)x^2} d\widetilde{v}'(x)dy \leqslant \frac{2(2+\beta)^2}{1+2\beta}AI_\varphi. \tag{2.4}$$

Для завершения доказательства теоремы 2.1 нам потребуется еще одна лемма.

Лемма 2.2. *Для любых $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\beta \in (-\frac{1}{2}; \infty)$ имеет место соотношение*

$$2^{-(2\beta+5)}a_0(\beta)\frac{s(t,\varphi)}{|t|^{2\beta+5}} \leqslant K_0(t,\varphi) \leqslant a_0(\beta)\left(1+\frac{a_+(\beta)}{a_-(\beta)}\right)\frac{s(t,\varphi)}{|t|^{2\beta+5}},$$

где

$$a_0(\beta) = \int_0^\infty t^{2\beta+4}e^{-2t}dt, \quad a_-(\beta) = \int_0^1 \frac{tdt}{(1+t)^{2\beta+5}}, \quad a_+(\beta) = \int_1^\infty \frac{tdt}{(1+t)^{2\beta+5}}.$$

Доказательство. Область D_φ представим в виде

$$D_\varphi = \{z = x + iy : \ f_1(x) < y < f_2(x), \ R_\varphi < x < 0\}.$$

Тогда $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ — неотрицательная вогнутая функция на $[-R_\varphi; 0]$ и для $t < 0$

$$K_0(t,\varphi) = \int_0^\infty e^{2tr-2v(r)}dr = \int_0^\infty e^{2rt}\frac{r^{2\beta+4}dr}{\eta(r)} = \int_0^\infty e^{2xr}r^{2\beta+4}K(re^{i\varphi})e^{-2rh(\varphi)}dr$$

$$= \int_0^\infty e^{2rt}r^{2\beta+4}\left(\int_{D_\varphi} e^{2rx}dxdy\right)dr = \int_{D_\varphi}\left(\int_0^\infty e^{2r(x+t)}r^{2\beta+4}dr\right)dxdy.$$

Значит,

$$K_0(t,\varphi) = a_0(\beta)\int_{D_\varphi}\frac{dxdy}{|x+t|^{2\beta+5}},$$

где

$$a_0(\beta) = \int_0^\infty e^{-2\tau}\tau^{2\beta+4}d\tau.$$

1. Пусть $t \leqslant -D_\varphi$, тогда в интервале интегрирования $|t| \leqslant |t+x| \leqslant 2|t|$, поэтому

$$\frac{a_0(\beta)2^{-(2\beta+5)}}{t^{2\beta+5}}|D_\varphi| \leqslant K_0(t,\varphi) \leqslant \frac{a_0(\beta)}{t^{2\beta+5}}|D_\varphi|,$$

где $|D_\varphi|$ — площадь области D_φ. Утверждение леммы верно, поскольку в этом случае $s(t,\varphi) = |D_\varphi|$.

2. Пусть $0 \geqslant t > -D_\varphi$ и $p = f(t)$. Из вогнутости функции f имеем

$$f(x) \leqslant \frac{p}{t}x, \qquad -R_\varphi \leqslant x \leqslant t, \qquad f(x) \geqslant \frac{p}{t}x, \qquad t \leqslant x \leqslant 0,$$

поэтому

$$\int_{-R_\varphi}^t \frac{f(x)dx}{|t+x|^{2\beta+5}} \leqslant \frac{p}{|t|}\int_{|t|}^\infty \frac{rdr}{(r+|t|)^{2\beta+5}} = \frac{a_+(\beta)p}{|t|^{2\beta+4}}, \qquad a_+(\beta) = \int_1^\infty \frac{\tau d\tau}{(1+\tau)^{2\beta+5}},$$

$$\int_t^0 \frac{f(x)dx}{|t+x|^{2\beta+5}} \geqslant \frac{p}{|t|}\int_0^{|t|} \frac{rdr}{(r+|t|)^{2\beta+5}} = \frac{a_-(\beta)p}{|t|^{2\beta+4}}, \qquad a_-(\beta) = \int_0^1 \frac{\tau d\tau}{(1+\tau)^{2\beta+5}},$$

тем самым,

$$K_0(t,\varphi) = a_0(\beta)\int_{-R_\varphi}^0 \frac{f(x)dx}{|t+x|^{2\beta+5}} \leqslant a_0(\beta)\left(1+\frac{a_+(\beta)}{a_-(\beta)}\right)\int_t^0 \frac{f(x)dx}{|x+t|^{2\beta+5}}$$

$$\leqslant a_0(\beta)\left(1+\frac{a_+(\beta)}{a_-(\beta)}\right)\frac{1}{|t|^{2\beta+5}}\int_t^0 f(x)dx = a_0(\beta)\left(1+\frac{a_+(\beta)}{a_-(\beta)}\right)\frac{s(t,\varphi)}{|t|^{2\beta+5}}.$$

Оценка снизу очевидна:

$$K_0(t,\varphi) \geqslant a_0(\beta)\int_t^0 \frac{f(x)dx}{|t+x|^{2\beta+5}} \geqslant \frac{2^{-(2\beta+5)}a_0(\beta)}{|t|^{2\beta+5}}\int_t^0 f(x)dx = \frac{2^{-(2\beta+5)}a_0(\beta)}{|t|^{2\beta+5}}s(t,\varphi).$$

Лемма 2.2 доказана. □

Для завершения доказательства теоремы 2.1 достаточно оценки леммы 2.2 подставить в соотношение (2.4).

Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. *В качестве постоянных в теореме 2.1 можно взять*

$$a(\beta) = aa_0(\beta)2^{-(2\beta+5)}\frac{(1+2\beta)^2}{4(2+\beta)}, \quad A(\beta) = Aa_0(\beta)\frac{2(2+\beta)^2}{(1+2\beta)}\left(1+\frac{a_+(\beta)}{a_-(\beta)}\right),$$

где $a_0(\beta)$, $a_\pm(\beta)$ определены в лемме 2.2 и a, A — абсолютные постоянные из теоремы 2.2.

3. Подготовительные утверждения. Локализация нормы в G^α

Основная теорема этого раздела позволяет локализовать интегралы по $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$ на интегралы по множеству $\Omega\setminus\overline{D}$, где Ω — произвольная окрестность $\overline{D}$.

Через $B(z,\varepsilon)$ будем обозначать круг с центром в точке z с радиусом ε, если $z=0$, то его не будем указывать. Положим $D(\varepsilon)=D+B(\varepsilon)$ и пусть

$$R(D)=\inf\{R>0:\quad D\subset\overline{B(R)}\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $\gamma\in G^\alpha$ и $\alpha\in[0;\frac{3}{2})$. Тогда для любого $\varepsilon\in(0;R(D))$*

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}}|\gamma''(\zeta)|^2\operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta)\leqslant(1+B_0(\alpha))(1+B(\alpha,D))\int\limits_{D(\varepsilon)\setminus\overline{D}}|\gamma''(\zeta)|^2\operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta),$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}}|\gamma''(\zeta)|^2\operatorname{dist}^{2\alpha+1}(\zeta)\,dm(\zeta)$$

$$\leqslant(1+5R(D)B_1(\alpha))(1+5RR(D)B(\alpha,D))\int\limits_{D(\varepsilon)\setminus\overline{D}}|\gamma''(\zeta)|^2\operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta),$$

где

$$B_0(\alpha)=4^{2\alpha}(4^{(2-\alpha)}-1)^{-1},\quad B_1(\alpha)=4^{2\alpha}(2^{(3-2\alpha)}-1)^{-1},$$
$$B(\alpha,D)=256\frac{(20R)^{2\alpha}(|\partial D|+\pi\varepsilon)^2}{\pi^2\varepsilon^{2(\alpha+1)}}.$$

Если $\alpha\in[\frac{3}{2};\frac{5}{2})$, то эти же оценки выполняются при дополнительном условии $\lim_{|z|\to\infty}|z||\gamma(z)|=0$ с заменой констант B_0, B_1 соответственно на

$$B_0'(\alpha)=4^{2\alpha}(2^{(3-\alpha)}-1)^{-1},\qquad B_1'(\alpha)=4^{2\alpha}(2^{(5-2\alpha)}-1)^{-1}.$$

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Доказательство проведем в два этапа: на первом этапе (лемма 3.1) интеграл от $|\gamma''(\zeta)|$ по внешности круга $\overline{B(4R(D))}$ оценим сверху интегралом по множеству $B(4R(D))\setminus\overline{D}$. Затем (лемма 3.2) интеграл по $B(4R(D))\setminus\overline{D}$ оценим сверху интегралом по $D(\varepsilon)\setminus\overline{D}$.

Число $R(D)$ сокращенно будем обозначать через R.

Лемма 3.1. *Пусть $\gamma\in G^\alpha$ и $\alpha\in[0;\frac{3}{2})$. Имеют место соотношения*

$$\int\limits_{|\zeta|\geqslant 4R}|\gamma''(\zeta)|^2\operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta)\leqslant B_0(\alpha)\int\limits_{B(4R)\setminus\overline{D}}|\gamma''(\zeta)|^2\operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta)$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}}|\gamma''(\zeta)|^2\operatorname{dist}^{2\alpha+1}(\zeta)\,dm(\zeta)\leqslant 5RB_1(\alpha)\int\limits_{D(\varepsilon)\setminus\overline{D}}|\gamma''(\zeta)|^2\operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta).$$

Если $\alpha\in[\frac{3}{2};\frac{5}{2})$, то эти же оценки выполняются при дополнительном условии $\lim_{|z|\to\infty}|z||\gamma(z)|=0$ с заменой B_0, B_1 на B_0', B_1'.

Доказательство. Представим функцию $\gamma(\zeta)$ в виде ряда Лорана

$$\gamma(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\zeta^{k+1}},\quad|\zeta|>R.$$

По условиям леммы этот ряд, как и ряд

$$\gamma''(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)\gamma_k}{\zeta^{k+3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k''}{\zeta^{k+3}}, \quad |\zeta| > R,$$

сходится равномерно на множестве $\mathbb{C} \setminus B(2R)$.

Возьмем некоторое число $t \in [0;2)$. Для ζ, $|\zeta| \geqslant 4R$, имеем $\operatorname{dist}(\zeta) \leqslant |\zeta| + R < 2|\zeta|$, поэтому

$$\int\limits_{|\zeta|\geqslant 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta) \leqslant 2^{2t} \int\limits_{|\zeta|\geqslant 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 |\zeta|^{2t}\, dm(\zeta).$$

Переходя в последнем интеграле к полярным координатам и учитывая ортогональность системы $e^{ik\varphi}$ относительно меры $d\varphi$ по $[0;2\pi]$, получим

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\zeta|\geqslant 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta) &\leqslant 2^{2t+1}\pi \int\limits_{4R}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2 r^{2t+1}\, dr}{r^{2(k+3)}} \\ &= 2^{2t+1}\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{2(k+2-t)(4R)^{2(k+2-t)}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Снова с помощью ряда Лорана, учитывая, что $\operatorname{dist}(\zeta) \geqslant \frac{1}{2}|\zeta|$ при $|\zeta| \geqslant 2R$, оценим снизу интеграл по кольцу $B(4R) \setminus B(2R)$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{2R\leqslant|\zeta|<4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta) &\geqslant 2^{-2t} \int\limits_{2R\leqslant|\zeta|<4R} |\gamma''(\zeta)|^2 |\zeta|^{2t}\, dm(\zeta) \\ &= 2^{-2t+1}\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{2(k+2-t)(4R)^{2(k+2-t)}} (2^{2(k+2-t)} - 1), \end{aligned} \tag{3.2}$$

значит,

$$\int\limits_{2R\leqslant|\zeta|<4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant 2^{-2t+1} \left(2^{2(2-t)} - 1\right) \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{2(k+2-t)(4R)^{2(k+2-t)}}. \tag{3.3}$$

Отсюда и из (3.1) вытекает оценка

$$\int\limits_{|\zeta|\geqslant 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta) \leqslant 2^{4t} \left(2^{2(2-t)} - 1\right)^{-1} \int\limits_{2R\leqslant|\zeta|<4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta).$$

Полагая $t = \alpha < \frac{3}{2}$, получим первую оценку в первой части леммы, полагая $t = \alpha + \frac{1}{2} < 2$ и учитывая, что $\operatorname{dist}(\zeta) \leqslant 5R$ для $|\zeta| \leqslant 4R$, получим вторую оценку в первой части леммы.

Если $\lim_{|z|\to\infty} |z||\gamma(z)| = 0$, то $\gamma_k'' = 0$ и суммирование в соотношениях (3.1), (3.2) ведется по $k \geqslant 1$, соответственно, вместо оценки (3.3) получим соотношение

$$\int\limits_{2R\leqslant|\zeta|<4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant 2^{-2t+1} \left(2^{2(3-t)} - 1\right) \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{2(k+2-t)(4R)^{2(k+2-t)}}$$

верное для всех $t \in [0;3)$. Отсюда и из соотношения (3.1), в котором $\gamma_0'' = 0$, имеем

$$\int\limits_{|\zeta|\geqslant 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta) \leqslant 2^{4t} \left(2^{2(3-t)} - 1\right)^{-1} \int\limits_{2R\leqslant|\zeta|<4R} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2t}(\zeta)\, dm(\zeta).$$

Полагая $t = \alpha$, получим первую оценку во второй части леммы, вторую оценку получим, полагая $t = \alpha + \frac{1}{2}$ и учитывая, что $\operatorname{dist}(\zeta) \leqslant 5R$ для $|\zeta| \leqslant 4R$.

Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Если* $\gamma \in G^\alpha$, $\alpha > 0$, *то*

$$\int\limits_{B(4R)\setminus\overline{D}(\varepsilon)} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta)\, dm(\zeta) \leqslant 256\frac{(20R)^{2\alpha}(|\partial D| + \pi\varepsilon)^2}{\pi^2\varepsilon^{2(\alpha+1)}} \int\limits_{D(\varepsilon)\setminus\overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta)\, dm(\zeta).$$

Доказательство. Пусть $\zeta \notin \overline{D}(\varepsilon)$. Поскольку

$$\operatorname{dist}(\zeta, D) \leqslant \operatorname{dist}(\zeta, D(\varepsilon)) + \varepsilon, \quad |\partial D(\varepsilon)| = |\partial D| + 2\pi\varepsilon,$$

то по формуле Коши имеем оценку сверху

$$|\gamma''(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{\partial D(\varepsilon/2)} \frac{\gamma''(z)\, dz}{z-\zeta} \right| \leqslant \frac{|\partial D(\varepsilon/2)|}{2\pi \operatorname{dist}(\zeta, D(\varepsilon/2))} \max_{z\in\partial D(\varepsilon/2)} |\gamma''(z)|$$

$$\leqslant \frac{|\partial D| + \pi\varepsilon}{2\pi(\operatorname{dist}(\zeta, D) - \varepsilon/2)} \max_{z\in\partial D(\varepsilon/2)} |\gamma''(z)|.$$

Очевидно, что для $\zeta \notin \overline{D}(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\operatorname{dist}(\zeta, D) \geqslant \varepsilon$, и $\frac{x}{x-\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant 2$ при $x \geqslant \varepsilon$. Кроме того, $\operatorname{dist}(\zeta) \leqslant 5R$ для $\zeta \in B(4R)$, значит, для $\zeta \in B(4R) \setminus \overline{D}(\varepsilon)$

$$|\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2\alpha}(\zeta) \leqslant \frac{5^{2\alpha}R^{2(\alpha-1)}(|\partial D| + \pi\varepsilon)^2}{\pi^2} \max_{z\in\partial D(\varepsilon/2)} |\gamma''(z)|^2. \tag{3.4}$$

Если $z \in \partial D(\varepsilon/2)$, то круг $B(z, \varepsilon/4)$ лежит в области $D(3\varepsilon/4) \setminus \overline{D}$. Кроме того, если $w \in \partial B(z, \frac{\varepsilon}{4})$, то $\operatorname{dist}(w) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Пользуясь субгармоничностью функции $|\gamma''(z)|^2$, получим оценку сверху

$$|\gamma''(z)|^2 \leqslant \frac{16}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{B(z,\varepsilon/4)} |\gamma''(w)|^2\, dm(w)$$

$$\leqslant \frac{16}{\pi\varepsilon^2}\Big(\sup_{B(z,\varepsilon/4)} \operatorname{dist}^{-2\alpha}(w)\Big) \int\limits_{B(z,\varepsilon/4)} |\gamma''(w)|^2 \operatorname{dist}^{2\alpha}(w)\, dm(w)$$

$$\leqslant \frac{4^{2(\alpha+1)}}{\pi\varepsilon^{2(\alpha+1)}} \int\limits_{D(\varepsilon)\setminus\overline{D}} |\gamma''(w)|^2 \operatorname{dist}^{2\alpha}(w)\, dm(w).$$

Подставив эту оценку в (3.4) и проинтегрировав по $B(4R) \setminus \overline{D}(\varepsilon)$, получим утверждение леммы 3.2.

Лемма 3.2 доказана. □

Оценки в теореме 3.1 непосредственно следуют из соотношений лемм 3.1, 3.2.

Теорема 3.1 доказана.

4. Доказательство основной теоремы

Основную теорему достаточно доказать для областей, не содержащих на своей границе прямолинейных отрезков и углов. Это следует из того, что постоянные $c(\beta, D)$, $C(\beta, D)$ непрерывно (рационально) зависят от D. Действительно, допустим, что теорема доказана с указанными дополнительными условиями на область.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Впишем в множество $D(\varepsilon)$ выпуклый многоугольник, содержащий D. Затем заменим каждую сторону этого многоугольника на дугу достаточно большой окружности так, чтобы полученная область D' оставалась бы выпуклой и содержалась бы в области $D(2\varepsilon)$. На границе D' нет прямолинейных участков, но есть углы.

Чтобы от них избавиться, перейдем к области $D' + B(0,\varepsilon)$. Таким образом, получим область без углов и отрезков на границе, содержащую D и содержащуюся в $D(3\varepsilon)$.

Поскольку $P_\beta(D) \subset P_\beta(D(\varepsilon))$, то для функций $F \in P_\beta(D)$ можно будет применить основную теорему в пространствах $P_\beta(D(\varepsilon))$ и затем перейти к пределу по $\varepsilon \to 0$.

Для дальнейшего нам потребуются некоторые геометрические объекты. Через $s(x,\varphi)$ мы обозначали площадь части области

$$D_\varphi = \{w = x + iy : \ f_1(x) < y < f_2(x), \ -R_\varphi < x < 0\},$$

отсекаемой прямой $\operatorname{Re} w = x$. Область D_φ получается из области D после преобразования $w = ze^{i\varphi} - h(\varphi)$. Тем самым, R_φ — это расстояние между опорными прямыми $L(\varphi)$ и $L(\varphi+\pi)$. Через $l(x,\varphi)$ обозначим длину части границы D_φ, отсекаемой той же прямой, а через $u(x,\varphi)$ — длину хорды, отсекаемой областью D_φ на этой прямой. Положим

$$\sigma(D) = \inf_{\varphi\in[0;2\pi]} R_\varphi.$$

Ясно, что $\sigma(D)$ — «наименьшая» ширина области.

По теореме 2.1 норма $\|F\|$ целой функции F, определенная в основной теореме, эквивалентна тройному интегралу

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi)-(x+iy)))|^2|x|^{2\beta+3}}{s(x,\varphi)} dxdyd\Delta(\varphi).$$

В этом интеграле сделаем замену переменных

$$\zeta = e^{-i\varphi}(h(\varphi) - x - iy), \quad \theta = \varphi.$$

Опишем геометрический смысл новых и прежних переменных. Через $l(\varphi)$ всюду в дальнейшем будем обозначать направленную прямую $\{te^{i\varphi}, \ -\infty < t < \infty\}$. На границе области D выберем направление против часовой стрелки. Тем самым, все касательные прямые к границе получают направление. Через $L(\varphi)$ обозначим касательную прямую, параллельную и сонаправленную к прямой $l(\frac{\pi}{2}-\varphi)$. Если точка $te^{-i\varphi}$ — точка пересечения прямых $L(\varphi)$ и $l(-\varphi)$, то, как нетрудно проверить, $h(\varphi) = t$. Если заданы переменные $\varphi \in [0;2\pi)$, $x < 0$, y, то ζ — это точка плоскости, которая в системе координат, образованной прямыми $l(-\varphi)$ (ось абсцисс) и $l(\frac{\pi}{2}-\varphi)$ (ось ординат), имеет координаты $(h(\varphi)-x; -y)$. При этом условие $x < 0$ означает, что опорная прямая $L(\varphi)$ отделяет точку ζ от области D. Определим область изменения переменных θ и ζ. Точка ζ очевидно лежит вне $\overline{D}$. При фиксированном $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}$ угол θ должен быть таким, чтобы опорная прямая $L(\theta)$ отделяла точку ζ от области D. Проведем две касательные прямые из точки ζ к границе области D. Пусть они сонаправлены с прямыми $l(\varphi_1)$ и $l(\varphi_2)$, причем $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2$. Тогда угол θ меняется от $\varphi_-(\zeta) = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$ до $\varphi_+(\zeta) = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$. Якобиан перехода от переменных φ, x, y к переменным ζ, θ равен тождественно 1 и $x = h(\theta) - \operatorname{Re}\zeta e^{i\theta}$.

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi)-\xi))|^2|x|^{2\beta+3}}{s(x,\varphi)} dxdyd\Delta(\varphi)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 \left(\int\limits_{\varphi_-(\zeta)}^{\varphi_+(\zeta)} \frac{(\operatorname{Re}\zeta e^{i\theta} - h(\theta))^{2\beta+3}}{s(h(\theta) - \operatorname{Re}\zeta e^{i\theta},\theta)} d\Delta(\theta) \right) dm(\zeta).$$

Внутренний интеграл в правой части обозначим через $p(\zeta)$. Нами доказана

Теорема 4.1. *Пусть $F = B(\gamma)$ — целая функция, удовлетворяющая условию*

$$\|F\|^2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})r^{2\beta}}\,drd\Delta(\varphi) < \infty$$

и

$$p(\zeta) = \int\limits_{\varphi_-(\zeta)}^{\varphi_+(\zeta)} \frac{(\operatorname{Re}\zeta e^{i\theta} - h(\theta))^{2\beta+3}}{s(h(\theta) - \operatorname{Re}\zeta e^{i\theta}, \theta)}\,d\Delta(\theta).$$

Тогда

$$a(\beta)\|F\|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 p(\zeta)\,dm(\zeta) \leqslant A(\beta)\|F\|^2,$$

где постоянные $a(\beta), A(\beta)$ зависят только от параметра β (см. Замечание 2.1).

Лемма 4.1. *Пусть*

$$p_0(\zeta) = \int\limits_{\varphi_-(\zeta)}^{\varphi_+(\zeta)} \frac{(\operatorname{Re}\zeta e^{i\theta} - h(\theta))^{2\beta+2}}{u(h(\theta) - \operatorname{Re}\zeta e^{i\theta}, \theta)}\,d\Delta(\theta).$$

Тогда

1. *Для точек ζ таких, что $\operatorname{dist}(\zeta) \leqslant \sigma(D)/2$,*
$$\frac{2}{3}p_0(\zeta) \leqslant p(\zeta) \leqslant 2p_0(\zeta).$$
2. *Если же $\operatorname{dist}(\zeta) > \sigma(D)/2$, то через I_0 обозначим часть интервала $(\varphi_-(\zeta);\ \varphi_+(\zeta))$, на которой выполняется условие*
$$\operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi} - h(\varphi) \geqslant \frac{\sigma(D)}{2},$$
и пусть I — остальная часть указанного интервала. Тогда
$$p(\zeta) \leqslant \frac{4\operatorname{diam}^2(D)|\partial D|}{\sigma^2(D)|D|}\operatorname{dist}^{2\beta+3}(\zeta) + 2\int\limits_I \frac{(\operatorname{Re}\zeta e^{i\theta} - h(\theta))^{2\beta+2}}{u(h(\theta) - \operatorname{Re}\zeta e^{i\theta}, \theta)}\,d\Delta(\theta).$$

Доказательство. 1. Отметим, что по определению функции $h(\varphi)$

$$\operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi} - h(\varphi) = \min_{z\in\overline{D}}(\operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi} - \operatorname{Re} z e^{i\varphi}) \leqslant \min_{z\in\overline{D}}|\zeta - z| = \operatorname{dist}(\zeta), \tag{4.1}$$

поэтому для точек ζ с условием $\operatorname{dist}(\zeta) < \sigma(D)/2$ при любых $\varphi \in (\varphi_-(\zeta);\ \varphi_+(\zeta))$ для оценки величины $s(h(\varphi) - \operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi},\ \varphi)$ можно применить п. 1) Утверждения 2 в работе [3], из которого немедленно следуют оценки в первой части леммы.

2. Если же интервал I_0 оказался непустым, то для $\theta \in I_0$ применим последнюю оценку в утверждении 2 ([3]):

$$s(h(\theta) - \operatorname{Re}\zeta e^{i\theta}, \theta) \geqslant \frac{\sigma^2(D)|D|}{4\operatorname{diam}^2(D)}.$$

Отсюда, учитывая (4.1) и геометрический смысл функции $\Delta(\theta)$, получим п. 2 леммы.

Лемма 4.1 доказана. □

Опишем интеграл в определении функции $p_0(\zeta)$ в геометрических терминах. Интервал интегрирования $(\varphi_-(\zeta); \varphi_+(\zeta))$ состоит из углов φ, таких, что $\operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi} - h(\varphi) \geqslant 0$. Другими словами, это те направления φ, для которых опорная прямая $L(\varphi)$ отделяет точку ζ от области D. При этом величина $\operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi} - h(\varphi)$ — это расстояние от точки ζ до опорной прямой

$L(\varphi)$. Если эту опорную прямую параллельно себе перенесем на расстояние $\operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi}-h(\varphi)$, то на полученной прямой область D отсечет хорду, длину которой мы обозначили через $u(h(\varphi)-\operatorname{Re}\zeta e^{i\varphi},\varphi)$. Наконец, геометрический смысл функции $\Delta(\varphi)$ заключается в том, что разность $\Delta(\varphi_1)-\Delta(\varphi_2)$ при $\varphi_1\geqslant\varphi_2$ равна длине дуги границы D от точки касания опорной прямой $L(\varphi_1)$ до точки касания опорной прямой $L(\varphi_2)$.

Данное описание не связано с системой координат. Далее мы выберем систему координат с началом в фиксированной точке ζ, область D частично опишем как надграфик некоторой выпуклой функции f и попробуем интеграл в определении функции $p_0(\zeta)$ написать в терминах f.

За начало координат возьмем точку ζ. На границе D существует единственная точка z_0 такая, что

$$\operatorname{dist}(\zeta)=\inf_{z\in\partial D}|z-\zeta|=|z_0-\zeta|.$$

Ось ординат направим от точки ζ к точке z_0. В этой системе координат область D является частью надграфика некоторой выпуклой функции $f(x)$, определенной на интервале $(X_1;X_2)$, где

$$X_1=h(\pi),\quad X_2=h(0).$$

Углы изменяются, естественно, в новой системе координат. Углы наклона к оси абсцисс двух касательных к области D, проходящих через начало координат, обозначим через φ_1 и φ_2, причем $\varphi_1\leqslant\varphi_2$. Тогда интеграл в определении p_0 вычисляется от $\varphi_-=\frac{\pi}{2}-\varphi_2$ до $\varphi_+=\frac{\pi}{2}-\varphi_1$. Расстояние от точки ζ до области D в этой системе координат выражается как $f(0)$ или $-h(\pi/2)$.

Мы считаем, что граница области D не содержит углов и прямолинейных отрезков (см. замечание в начале в параграфа). Для функции f это значит, что производная f' является строго возрастающей непрерывной функцией.

Если переменная θ меняется от φ_- до φ_+, то величина $\frac{\pi}{2}-\theta$ монотонно меняется от φ_2 до φ_1, то есть от угла наклона касательной к графику функции f в точке X_1 до угла наклона касательной в точке X_2. Следовательно, если определим точку $x(\theta)$ из равенства

$$f'(x(\theta))=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{ctg}(\theta),\tag{4.2}$$

то точка $x(\theta)$ будет монотонно меняться от X_1 до X_2, причем точка $(x(\theta);\ f(x(\theta)))$ является точкой опоры опорной прямой $L(\theta)$. Из указанного выше геометрического смысла функции $\Delta(\theta)$ получим

$$d\Delta(\theta)=d\left(\int^{x(\theta)}\sqrt{1+f'(s)^2}\,ds\right)=\sqrt{1+f'(x(\theta))^2}\,dx(\theta)=\frac{1}{|\sin\theta|}\,dx(\theta).$$

Таким образом, для функции p_0 имеем следующее представление

$$p_0(\zeta)=\int_{\varphi_-}^{\varphi_+}\frac{|h(\theta)|^{2\beta+2}}{u(h(\theta),\theta)}\frac{1}{|\sin\theta|}\,dx(\theta),\tag{4.3}$$

где величины в интеграле в правой части выражены в системе координат, связанной с точкой ζ.

Далее нам необходимо оценить функцию $u(h(\theta),\theta)$ в терминах функции f. Для этого введем следующие функции. Возьмем любую точку $x_0\in[X_1;\ X_2]$ и положительное число

δ. Положим

$$\rho_+(f,x_0,\delta)=\sup\left\{\rho:\ \rho\leqslant X_2-x_0,\ \int\limits_0^\rho (f'(x_0+y)-f'(x_0))\,dy\leqslant\delta\right\},$$

$$\rho_-(f,x_0,\delta)=\sup\left\{\rho:\ \rho\leqslant x_0-X_1,\ \int\limits_0^\rho (f'(x_0)-f'(x_0-y))\,dy\leqslant\delta\right\},$$

$$\widetilde{\rho}(f,x_0,\delta)=\rho_-(f,x_0,\delta)+\rho_+(f,x_0,\delta).$$

Пусть

$$g(t)=\sup_{x\in[X_1;X_2]}(xt-f(t)$$

— сопряженная по Юнгу к функции f. Если $T_1=f'(X_1)$, $T_2=f'(X_2)$, то супремум в определении g достигается в единственной стационарной точке $x=x(t)$, определяемой условием $f'(x)=t$, то есть $g(t)\equiv x(t)t-f(x(t))$, $t\in[T_1;T_2]$. Дифференцируя это тождество получим $g'(t)\equiv x(t)$ или $g'(f'(x))\equiv x$. Полагая $x=x(\theta)$ из (4.2) имеем

$$x(\theta)=g'(\operatorname{ctg}(\theta)). \tag{4.4}$$

Для любого положительного числа δ определим величину $\rho=\rho(g,t_0,\delta)$ из условия

$$\rho=\sup\left\{s>0:\ \int\limits_{-s}^{s}|g'(t_0+t)-g'(t_0)|\,dt\leqslant\delta\right\}.$$

Из леммы 4.1 и представлений (4.3), (4.4) данной работы и Лемм 3, 4 в работе [3] получим следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Для точек ζ таких, что $\operatorname{dist}(\zeta)\leqslant\sigma(D)/2$, выполняются неравенства*

$$p(\zeta)\geqslant\frac{2}{9}\int\limits_{\varphi_-}^{\varphi_+}|h(\theta)|^{2\beta+1}|\sin\theta|\rho\left(g,\operatorname{ctg}\theta,\frac{|h(\theta)|}{|\sin\theta|}\right)\,dg'(\operatorname{ctg}\theta),$$

$$p(\zeta)\leqslant\frac{48\operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2}\int\limits_{\varphi_-}^{\varphi_+}|h(\theta)|^{2\beta+1}|\sin\theta|\rho\left(g,\operatorname{ctg}\theta,\frac{|h(\theta)|}{|\sin\theta|}\right)\,dg'(\operatorname{ctg}\theta).$$

Если $\operatorname{dist}(\zeta)>\sigma(D)/2$, то через I_0 обозначим часть интервала $(\varphi_-;\ \varphi_+)$, на которой выполняется условие

$$-h(\theta)>\frac{\sigma(D)}{2},$$

и пусть I — остальная часть указанного интервала. Тогда

$$p(\zeta)\leqslant\frac{4\operatorname{diam}^2(D)|\partial D|}{\sigma^2(D)|D|}\operatorname{dist}^{2\beta+3}(\zeta)$$
$$+\frac{48\operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2}\int\limits_I|h(\theta)|^{2\beta+1}|\sin\theta|\rho\left(g,\operatorname{ctg}\theta,\frac{|h(\theta)|}{|\sin\theta|}\right)\,dg'(\operatorname{ctg}\theta).$$

В интегралах сделаем замену переменных $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ и положим

$$p_1(\zeta)=\int\limits_{\theta_-}^{\theta_+}\left|h\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right|^{2\beta+1}|\cos\varphi|\rho\left(g,\operatorname{tg}\varphi,\frac{|h(\frac{\pi}{2}-\varphi)|}{\cos\varphi}\right)\,dg'(\operatorname{tg}\varphi), \tag{4.5}$$

где $\theta_\pm = \frac{\pi}{2} - \varphi$ — углы наклона к оси абсцисс касательных к графику функции $f(x)$, проходящих через начало координат. В этой системе координат расстояние $\operatorname{dist}(\zeta)$ равно $-h(\frac{\pi}{2})$. Обозначим это расстояние через d.

Определим точку $x = x(\varphi) \in [X_1;\ X_2]$ из условия

$$f'(x(\varphi)) = \operatorname{tg}\varphi.$$

Тогда $x(\varphi)$ — точка достижения супремума $\sup_x(xt - f(x))$ для $t = \operatorname{tg}\varphi$, значит,

$$g(\operatorname{tg}\varphi) = \operatorname{tg}\varphi \cdot x(\varphi) - f(x(\varphi)). \tag{4.6}$$

С другой стороны, опорная прямая $L(\varphi)$ к области D есть касательная к функции $f(x)$ в точке $x(\varphi)$, а $-h(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ — это расстояние от этой касательной до начала координат. Легко видеть, что при этом число $-h(\frac{\pi}{2} - \varphi)/\cos\varphi$ равно ординате точки пересечения опорной прямой с осью ординат. Уравнение касательной, проведенной в точке $x(\varphi)$, имеет вид

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot (x - x(\varphi)) + f(x(\varphi)),$$

поэтому

$$\frac{-h(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos\varphi} = f(x(\varphi)) - \operatorname{tg}\varphi \cdot x(\varphi).$$

Учитывая (4.6), получим

$$\frac{-h(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos\varphi} = -g(\operatorname{tg}\varphi).$$

Таким образом, когда φ монотонно возрастает от 0 до θ_+ или убывает от 0 до θ_-, значение $-g(\operatorname{tg}\varphi)$ монотонно убывает от d до 0. Положим $\varphi_0 = 0$ и определим углы φ_n из условий

$$\frac{-h(\frac{\pi}{2} - \varphi_n)}{\cos\varphi_n} = \frac{d}{2^{|n|}}$$

или, что тоже самое, из равенств $-g(\operatorname{tg}\varphi_n) = 2^{-|n|}d$.

Весь интервал интегрирования разбивается на интервалы $(\varphi_n;\ \varphi_{n+1}]$, $n \in \mathbb{Z}$, и сам интеграл в (4.5) может быть представлен в виде суммы интегралов по этим интервалам. Заметим, что величина $\rho(g,t,\delta)$ не убывающая по переменной δ, поэтому при $\varphi \in (\varphi_n;\ \varphi_{n+1}]$ имеем

$$\rho(g, \operatorname{tg}\varphi, 2^{-n-1}d) \leqslant \rho\left(g, \operatorname{tg}\varphi, \frac{-h(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos\varphi}\right) \leqslant \rho(g, \operatorname{tg}\varphi, 2^{-n}d), \quad n \geqslant 0,$$
$$\rho(g, \operatorname{tg}\varphi, 2^{-|n|}d) \leqslant \rho\left(g, \operatorname{tg}\varphi, \frac{-h(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos\varphi}\right) \leqslant \rho(g, \operatorname{tg}\varphi, 2^{-|n|+1}d), \quad n < 0.$$

Таким образом, после замены переменных $t = \operatorname{tg}\varphi$ получаем

$$\begin{aligned} p_1(\zeta) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{2^n}\right)^{2\beta+1} \int\limits_{\tan\varphi_n}^{\tan\varphi_{n+1}} \rho\left(g, t, \frac{d}{2^n}\right)\, dg'(t) \\ + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{d}{2^{|n|-1}}\right)^{2\beta+1} \int\limits_{\tan\varphi_n}^{\tan\varphi_{n+1}} \rho\left(g, t, \frac{d}{2^{|n|-1}}\right)\, dg'(t), \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$p_1(\zeta) \geqslant \left(\frac{d}{2}\right)^{2\beta+1} \int\limits_{\tan\varphi_{-1}}^{\tan\varphi_1} \frac{1}{(1+t^2)^{\beta+1}} \rho\left(g, t, \frac{d}{2}\right)\, dg'(t). \tag{4.8}$$

Займемся верхними оценками для $p_1(\zeta)$. Положим

$$t_n = \frac{\operatorname{tg}\varphi_n + \operatorname{tg}\varphi_{n+1}}{2}.$$

Тогда при $n \geqslant 0$, очевидно,

$$g(t_n) \geqslant g(\operatorname{tg}\varphi_n) = -\frac{d}{2^n},$$

а при $n < 0$,

$$g(t_n) \geqslant g(\operatorname{tg}\varphi_{n+1}) = -\frac{d}{2^{|n|-1}}.$$

Поэтому

$$g(\operatorname{tg}\varphi_n) + g(\operatorname{tg}\varphi_{n+1}) - 2g(t_n) \leqslant -\frac{d}{2^{n+1}} - \frac{d}{2^n} + \frac{2d}{2^n} = \frac{d}{2^{n+1}} < \frac{d}{2^n}, \quad n \geqslant 0,$$
$$g(\operatorname{tg}\varphi_n) + g(\operatorname{tg}\varphi_{n+1}) - 2g(t_n) \leqslant \frac{d}{2^{|n|}} < \frac{d}{2^{|n|-1}}, \quad n \leqslant 0.$$

Сравнив эти оценки с определением величины $\rho(g,t,\delta)$, получим, что

$$\operatorname{tg}\varphi_{n+1} - t_n = t_n - \operatorname{tg}\varphi_n < \rho(g,t_n,\frac{d}{2^n}), \quad n \geqslant 0,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_{n+1} - t_n = t_n - \operatorname{tg}\varphi_n < \rho(g,t_n,\frac{d}{2^{|n|-1}}), \quad n < 0.$$

Введем обозначения

$$\rho_n = \rho\left(g,t_n,\frac{d}{2^n}\right), \quad n \geqslant 0, \quad \rho_n = \rho\left(g,t_n,\frac{d}{2^{|n|-1}}\right), \quad n < 0.$$

Теперь соотношение (4.7) дает оценку

$$p_1(\zeta) \leqslant \sum_0^\infty \left(\frac{d}{2^n}\right)^{2\beta+1} \int\limits_{t_n-\rho_n}^{t_n+\rho_n} \rho\left(g,t,\frac{d}{2^n}\right) dg'(t) + \sum_{-1}^{-\infty}\left(\frac{d}{2^{|n|-1}}\right)^{2\beta+1} \int\limits_{t_n-\rho_n}^{t_n+\rho_n} \rho\left(g,t,\frac{d}{2^{|n|-1}}\right) dg'(t).$$

По п.3 Леммы 5 в работе [3] получим

$$p_1(\zeta) \leqslant \sum_0^\infty \left(\frac{d}{2^n}\right)^{2\beta+1} \cdot \frac{4d}{2^n} + \sum_{-1}^{-\infty}\left(\frac{d}{2^{|n|-1}}\right)^{2\beta+1} \cdot \frac{4d}{2^{|n|-1}} = 2\frac{4^{\beta+2}}{4^{\beta+1}-1}\operatorname{dist}^{2\beta+2}(\zeta).$$

Пусть $I' = \{\frac{\pi}{2} - \theta,\ \theta \in I\}$, где интервал $I \subset (\varphi_-;\varphi_+)$ определен в лемме 4.2. Тогда $I' \subset (\theta_-;\theta_+)$ и

$$\int\limits_I |h(\theta)|^{2\beta+1}|\sin\theta|\rho\left(g,\operatorname{ctg}\theta,\frac{|h(\theta)|}{|\sin\theta|}\right) dg'(\operatorname{ctg}\theta)$$
$$= \int\limits_{I'} \left|h\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right|^{2\beta+1} |\cos\varphi|\rho\left(g,\operatorname{tg}\varphi,\frac{|h(\frac{\pi}{2}-\varphi)|}{|\cos\varphi|}\right) dg'(\operatorname{tg}\varphi)$$
$$\leqslant p_1(\zeta) \leqslant 2\frac{4^{\beta+2}}{4^{\beta+1}-1}\operatorname{dist}^{2\beta+2}(\zeta).$$

Подставив последние две оценки в верхние оценки в лемме 4.2, получим верхние оценки для функции $p(\zeta)$: если $\operatorname{dist}(\zeta) \leqslant \frac{\sigma(D)}{2}$, то

$$p(\zeta) \leqslant \frac{48\operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2}p_1(\zeta) \leqslant \frac{6\cdot 4^{\beta+4}\operatorname{diam}^4(D)}{(4^{\beta+1}-1)|D|^2}\operatorname{dist}^{2\beta+2}(\zeta), \tag{4.9}$$

и если $\operatorname{dist}(\zeta) > \frac{\sigma(D)}{2}$, то

$$p(\zeta) \leqslant \frac{4\operatorname{diam}^2(D)|\partial D|}{\sigma^2(D)|D|}\operatorname{dist}^{2\beta+3}(\zeta) + \frac{6\cdot 4^{\beta+4}\operatorname{diam}^4(D)}{(4^{\beta+1}-1)|D|^2}\operatorname{dist}^{2\beta+2}(\zeta). \tag{4.10}$$

Далее на основе соотношения (4.8) займемся нижними оценками функции $p_1(\zeta)$ и, соответственно, функции $p(\zeta)$. Не уменьшая общности, будем считать, что

$$\min(-\operatorname{tg}\varphi_{-1}, \operatorname{tg}\varphi_1) = \operatorname{tg}\varphi_1.$$

Для сокращения записи введем обозначение $\rho = \rho(g, 0, \frac{d}{2})$. По определению величины $\rho(g, 0, \frac{d}{2})$ имеем

$$g(\rho) + g(-\rho) - 2g(0) = \frac{d}{2},$$

с другой стороны,

$$g(0) = \max_{X_1 \leqslant x \leqslant X_2}(-f(x)) = -\min_{X_1 \leqslant x \leqslant X_2} f(x) = -f(0) = -d.$$

Поэтому должно выполняться равенство

$$g(\rho) + g(-\rho) = -\frac{3}{2}d.$$

По определению углов $\varphi_{\pm 1}$ имеем

$$g(\operatorname{tg}\varphi_1) + g(-\operatorname{tg}\varphi_1) = -\frac{d}{2} + g(-\operatorname{tg}\varphi_1) \geqslant -\frac{d}{2} + g(0) = -\frac{3}{2}d.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \geqslant \rho = \rho\left(g, 0, \frac{d}{2}\right).$$

Отсюда и из (4.8) получим

$$p_1(\zeta) \geqslant \left(\frac{d}{2}\right)^{2\beta+1} \int\limits_{-\operatorname{tg}\varphi_1}^{\operatorname{tg}\varphi_1} \frac{1}{(1+t^2)^{\beta+1}} \rho\left(g, t, \frac{d}{2}\right) dg'(t)$$

$$\geqslant \left(\frac{d}{2}\right)^{2\beta+1} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\ \varphi_1)^{\beta+1}} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \rho\left(g, t, \frac{d}{2}\right) dg'(t).$$

Теперь можем воспользоваться Утверждением 3 (см. [3]) для оценки сверху $\operatorname{tg}\varphi_1$ и п.3 Леммы 5 (см. [3]) для оценки снизу интеграла:

$$p_1(\zeta) \geqslant \left(\frac{d}{2}\right)^{2\beta+1} \cdot \left(1 + \frac{25\operatorname{diam}^2(D)}{4\sigma^2(D)}\right)^{-(\beta+1)} \cdot \frac{d}{2}$$

$$= 4^{-(\beta+1)} \left(1 + \frac{25\operatorname{diam}^2(D)}{4\sigma^2(D)}\right)^{-(\beta+1)} \operatorname{dist}^{2\beta+2}(\zeta).$$

Эта оценка вместе с соотношениями (4.9), (4.10) позволяет вывести из Кеммы 4.2 следующую лемму.

Лемма 4.3. *Для точек ζ таких, что* $\operatorname{dist}(\zeta) \leqslant \sigma(D)/2$, *выполняются неравенства*

$$m(\beta, D)\operatorname{dist}^{2\beta+2}(\zeta) \leqslant p(\zeta) \leqslant M(\beta, D)\operatorname{dist}^{2\beta+2}(\zeta),$$

и для точек ζ таких, что $\operatorname{dist}(\zeta) > \sigma(D)/2$,

$$p(\zeta) \leqslant M_0(\beta, D)\operatorname{dist}^{2\beta+3}(\zeta) + M(\beta, D)\operatorname{dist}^{2\beta+2}(\zeta),$$

где

$$m(\beta, D) = \frac{2}{9} \cdot 4^{-(\beta+1)} \left(1 + \frac{25 \operatorname{diam}^2(D)}{4\sigma^2(D)}\right)^{-(\beta+1)},$$

$$M(\beta, D) = \frac{6 \cdot 4^{\beta+4} \operatorname{diam}^4(D)}{(4^{\beta+1}-1)|D|^2}, \quad M_0(\beta, D) = \frac{4 \operatorname{diam}^2(D)|\partial D|}{\sigma^2(D)|D|},$$

$\sigma(D)$ — наименьшая ширина области D по направлениям, $\operatorname{dist}(\zeta)$ — расстояние от точки ζ до области D, $|D|$ — площадь D, $|\partial D|$ — длина границы D и, наконец, $\operatorname{diam}(D)$ — диаметр D.

Для окончания доказательства основной теоремы нам остается собрать воедино все доказанные оценки.

1. Пусть $\beta \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

1.1. Докажем нижнюю оценку в основной теореме. По теореме 4.1 и лемме 4.3

$$\|F\|^2 \geqslant \frac{1}{A(\beta)} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 p(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant \frac{m(\beta, D)}{A(\beta)} \int\limits_{D(\sigma(D)/2)\setminus\overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2(\beta+1)} dm(\zeta),$$

далее применим п.1 теоремы 3.1 с $\varepsilon = \sigma(D)/2$ и $\alpha = \beta + 1 \in [0; \frac{3}{2})$:

$$\|F\|^2_{P_\beta} \geqslant \frac{m(\beta, D)}{A(\beta)} (1 + B_0(\beta, D))^{-1} (1 + B(\beta, D))^{-1} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2(\beta+1)} dm(\zeta).$$

Таким образом, левое неравенство в основной теореме в этом случае доказано с константой

$$c(\beta, D) = \frac{m(\beta, D)}{A(\beta)} (1 + B_0(\beta, D))^{-1} (1 + B(\beta, D))^{-1}.$$

1.2. Для доказательства верхней оценки применим теорему 4.1:

$$\|F\|^2_{P_\beta} \leqslant \frac{1}{a(\beta)} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 p(\zeta)\, dm(\zeta).$$

Применим вторую оценку в лемме 4.3:

$$\|F\|^2_{P_\beta} \leqslant \frac{M(\beta, D)}{a(\beta)} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2(\beta+1)}(\zeta)\, dm(\zeta)$$
$$+ \frac{M_0(\beta, D)}{a(\beta)} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus D(\sigma(D)/2)} |\gamma''(\zeta)|^2 \operatorname{dist}^{2\beta+3}(\zeta)\, dm(\zeta).$$

Второй интеграл оценим по второму неравенству п.1 теоремы 3.1 при $\alpha = \beta + 1 \in [0; \frac{3}{2})$. Правое неравенство в основной теореме в этом случае доказано с константой

$$C(\beta, D) = \frac{M(\beta, D)}{a(\beta)} + \frac{M_0(\beta, D)}{a(\beta)} (1 + 5RB_0(\beta+1, D))(1 + B(\beta+1, D))^{-1}.$$

2. Пусть $\beta \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$. Если $F \in P_\beta(D)$, то из определения $\|F\|$ при $\beta \geqslant \frac{1}{2}$ следует, что

$$F(0) = \lim_{|z|\to\infty} |z||\gamma(z)| = 0,$$

поэтому можем пользоваться п.2 теоремы 3.1. В результате оценки основной теоремы будут доказаны с такими же константами, как в случае $\beta < \frac{1}{2}$ с заменой постоянной $B_0(\beta+1, D)$ на $B_0'(\beta+1, D)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б.Я. Левин, Ю.И. Любарский. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. акад. наук СССР, сер. мат. **39**:3, 657–702 (1975).
2. В.И. Луценко, Р.С. Юлмухаметов. *Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова* // Тр. мат. инст. Стеклова **200**, 245–254 (1991).
3. К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов. *Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана* // Изв. росс. акад. наук сер. мат. **68**:1, 5–42 (2004).
4. A. Borichev, Yu. Lyubarskii. *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // J. Inst. Math. Jussieu **9**:3, 449–461 (2010).
5. A. Baranov, Yu. Belov, A. Borichev. *Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces* // Stud. Math. **236**:2, 127–142 (2017).
6. К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов. *Безусловные базисы в радиальных гильбертовых пространствах* // Изв. росс. акад. наук сер. мат. **86**:1, 160–179 (2022).
7. K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov. *On a criterion for the existence of unconditional bases of reproducing kernels in Fock spaces with radial regular weight* // J. Math. Anal. Appl. **519**:2, 126839, 17 p. (2023).
8. K.P. Isaev, A.V. Lutsenko, R.S. Yulmukhametov. *On a sufficient condition for the existence of unconditional bases of reproducing kernels in Fock type spaces with nonradial weights* // Anal. Math. Phys. **13**:6, 83, 11 p. (2023).
9. В.И. Луценко, Р.С. Юлмухаметов. *Обобщение теоремы Пэли — Винера на весовые пространства* // Мат. заметки **48**:5, 80–87 (1990).

Исаев Константин Петрович,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `orbit81@list.ru`

Юлмухаметов Ринад Салаватович,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `yulmukhametov@mail.ru`