ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 4 (2024). С. 14-21.

УДК 517.53+517.537.72

УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ТИПА ПОЛИА ДЛЯ РЯДА ДИРИХЛЕ, СХОДЯЩЕГОСЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Т.И. БЕЛОУС, А.М. ГАЙСИН, Р.А. ГАЙСИН

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение ряда Дирихле с положительными показателями, сходящегося в левой полуплоскости, на дуге ограниченного наклона, оканчивающейся на прямой сходимости. В статье получены условия, при выполнении которых для суммы ряда Дирихле выполняется асимптотическое равенство типа Полиа на множестве, верхняя плотность которого равна единице.

В 2023 году нами были получены результаты, относящиеся к двойственным случаям. Было показано, что равенство типа Полиа справедливо на асимптотическом множестве положительной верхней плотности, зависящей от коэффициента наклона (постоянной Липшица) дуги.

В настоящей статье доказана единая теорема, охватывающая оба эти случая, причем показано, что асимптотическое множество имеет верхнюю плотность, в точности равную единице.

Ключевые слова: ряд Дирихле, полуплоскость сходимости, максимальный член ряда, кривая ограниченного наклона, равенство типа Полиа.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Статья посвящена задачам о регулярности роста суммы ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{1.1}$$

сходящегося лишь в левой полуплоскости

$$\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\},$$

на дуге γ ограниченного наклона, $\gamma \subset \Pi_0$, которая оканчивается на мнимой оси. Регулярность роста суммы ряда (1.1) характеризуется выполнением соотношения типа Полиа

$$\ln M_F(\sigma) \sim \ln |F(s)|, \quad s \in \gamma, \quad \sigma \to 0-, \quad \sigma \notin \mathrm{e}, \tag{1.2}$$

где $\mathrm{e} \subset [-1, 0)$ некоторое исключительное множество, например, нулевой нижней плотности, $M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$.

Для получения оценок для относительной линейной меры

$$\frac{\mathrm{mes}(\mathrm{e} \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}$$

T.I. Belous, A.M. Gaisin, R.A. Gaisin, Specification of asymptotic Pólya type estimate for Dirichlet series converging in half–plane.

Поступила 16 июня 2024 г.

при $\sigma \to 0-$ обычно предполагают выполнения одной из следующих оценок роста максимального члена $\mu(\sigma) = \max_{n\geqslant 1}\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\}$ ряда (1.1) снизу:

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\dfrac{1}{|\sigma|}\right)} > 0 \quad \text{или} \quad \underline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\dfrac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

где Φ, $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, — некоторая фиксированная непрерывная мажоранта, $\Phi(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$. Оценки a) и b) вполне естественны и неоднократно встречались в подобных задачах и ранее (см., например, [1]–[4]).

В отличие от случая произвольных кривых, для дуг ограниченного наклона (дуг Липшица) можно получить более сильные оценки, а именно — асимптотические равенства типа Полиа (1.2), которые справедливы всюду на полуинтервале $[-1, 0)$ вне исключительного множества малой относительной меры. Эти задачи рассматривались в недавних работах [3], [4], однако, как выяснилось, результаты этих работ допускают усиление. Об этом и пойдет речь в настоящей заметке.

Вкратце остановимся на истории вопроса, а также введем необходимые определения и сформулируем предшествующие результаты.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

Будем использовать следующие обозначения для функций распределения точек $\lambda \in \Lambda$:

$$n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1, \quad N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x}dx.$$

Через L обозначим класс всех положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций, а через W — класс сходимости, т.е. множество функций $w \in L$, таких, что $w(x)(1 + x^2)^{-1}$ принадлежит $L^1(\mathbb{R}_+)$. Далее, для каждой функции $\Phi \in L$ через φ обозначим функцию, обратную к ней, и рассмотрим следующие классы функций:

$$W_\varphi = \left\{w \in W : \lim_{t\to\infty} \varphi(t)J(t; w) = 0\right\},$$

$$\underline{W}_\varphi = \left\{w \in W : \underline{\lim_{t\to\infty}} \varphi(t)J(t; w) = 0\right\},$$

где

$$J(t; w) = \int_t^\infty \frac{w(x)}{x^2}dx$$

— остаток сходящегося интеграла $J(1; w)$.

Пусть дуга $\gamma = \{z = x + iy : y = g(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ имеет ограниченный наклон, т.е.

$$\sup_{x_1\neq x_2} \left|\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_2 - x_1}\right| = K < \infty. \tag{1.3}$$

Условие (1.3) означает, что функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|.$$

Поэтому дугу ограниченного наклона будем называть дугой Липшица. Геометрически условие (1.3) характеризуется тем, что тангенсы углов всех хорд дуги по модулю не превосходят K. По этой причине γ называется дугой K–ограниченного наклона.

Приведем результаты, полученные в работах [3], [4].

Теорема 1.1 ([3]). *Пусть $\Phi \in L$, $w \in W_\varphi$, где $w(x) = N(ex)$. Предположим, что максимальный член ряда (1.1) удовлетворяет условию*

$$\varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0. \tag{1.4}$$

Пусть, далее, для некоторой функции $w_0 \in W_\varphi$ выполняются оценки

$$q(\lambda_n) \leqslant w_0(\lambda_n), \quad n \geqslant 1, \tag{1.5}$$

где

$$q(\lambda_n) = -\ln |Q'(\lambda_n)|, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{{\lambda_n}^2}\right).$$

Тогда для любой дуги γ K–ограниченного наклона, заданной уравнением $y = g(x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, при $s \in \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ по асимптотическому множеству $A \subset [-1, 0)$, верхняя плотность DA которого удовлетворяет неравенству

$$DA = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\operatorname{mes}(\mathrm{A} \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+K^2}},$$

справедливо соотношение

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(s)|, \quad s \in \gamma, \quad s = \sigma + it. \tag{1.6}$$

Отметим, что в условиях теоремы 1.1 функции φ и w согласованы, т.е. $\varphi(x)w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Это следует из того, что $w \in W_\varphi$.

В [4] доказан следующий двойственный к теореме 1.1 результат.

Теорема 1.2 ([4]). *Пусть $\Phi \in L$, $w \in \underline{W}_\varphi$, где $w(x) = N(ex)$. Если φ и w согласованы, максимальный член ряда (1.1) удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0, \tag{1.7}$$

а для некоторой функции $w_0 \in W_\varphi$ выполняются оценки (1.5), то для любой дуги γ K–ограниченного наклона, заданной на отрезке $[-1, 0]$, при $s \in \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ по асимптотическому множеству $A \subset [-1, 0)$,

$$DA \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+K^2}},$$

справедливо равенство типа Полиа (1.6).

Цель настоящей статьи — показать, что в обеих теоремах соотношение (1.6) на самом деле имеет место на множестве A, верхняя плотность DA которого равна единице.

2. Леммы. Основной результат

Доказательство основной теоремы опирается на следующие леммы, которые позволяют осуществлять единый поход к указанным двойственным задачам.

Лемма 2.1. *Пусть функция $g(z)$ аналитична в круге*

$$D(0, R) = \{z : |z| < R\},$$

причем $|g(0)| \geqslant 1$. Если $0 < r < 1 - N_0^{-1}$, $N_0 > 1$, то существует не более чем счетное множество кружков

$$V_n = \{z : |z - z_n| \leqslant \rho_n\}, \quad \sum_n \rho_n \leqslant Rr^{N_0}(1 - r),$$

таких, что в круге $\{z : |z| \leqslant rR\}$, *но вне множества* $\bigcup\limits_n V_n$, *справедлива оценка*

$$\ln|g(z)| \geqslant \frac{R-|z|}{R+|z|}\ln|g(0)| - 5N_0L_0, \tag{2.1}$$

где

$$L_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|g(Re^{i\theta})|d\theta - \ln|g(0)|. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1 доказана в [5].

Нам понадобится также следующая лемма типа Бореля — Неванлинны, фактически доказанная в [1, леммы 4, 5]. Ее мы сформулируем здесь подходящим образом.

Лемма 2.2. *Пусть* $u(t)$ *— непрерывная неубывающая на* $[-1,0)$ *функция,* $u(t) \to \infty$ *при* $t \to 0-$. *Через* $v = v(t)$ *обозначим решение уравнения*

$$w(v) = e^{u(\sigma)}, \tag{2.3}$$

где w *— какая-то функция из класса* W.

Если при $t \to 0-$ *вне некоторого множества* $\mathrm{e}_0 \subset [-1,0)$, $\mathrm{mes}(\mathrm{e}_0 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$ *для некоторой последовательности* $\{\tau_j\}$, $\tau_j \uparrow 0$,

$$\frac{w(v(t))}{|t|v(t)} = o(1),$$

а также выполняется условие

$$\lim_{\tau_j \to 0-} \frac{1}{|\tau_j|} J(v_j; w) = 0, \quad v_j = v(\tau_j),$$

то при $\sigma \to 0-$ *вне исключительного множества* $\mathrm{e} \subset [-1,0)$, *для которого*

$$\mathrm{mes}(\mathrm{e} \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|), \quad \tau_j \to 0-,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$u\left(t + \frac{w(v(t))}{v(t)}\right) = u(t) + o(1).$$

Эта лемма является более общей, чем соответствующая лемма из [6] (лемма 3.2)[1], где $\mathrm{e}_0 = \varnothing$.

Основным в статье является следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1 или теоремы 1.2. Тогда для любой дуги* γ *ограниченного наклона, заданной на отрезке* $[-1,0]$, *при* $s \in \gamma$, $\mathrm{Re}\, s = \sigma \to 0-$ *по асимптотическому множеству* $A \subset [-1,0)$, $DA = 1$, *справедливо равенство типа Полиа (1.6).*

3. Доказательство теоремы 2.1

Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Положим $w_1(x) = w(x) + w_0(x)$, где $w(x) = N(ex)$, $w_0(x)$ — мажоранта из условия (1.5). Так как $w \in W_\varphi$, тогда и $w_1 \in W_\varphi$. Следовательно, функции φ и w_1 согласованы, т.е.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)w_1(x)}{x} = 0.$$

Тогда существует функция $w^*(x) = \beta(x)w_1(x)$, $\beta \in L$, $1 \leqslant \beta(x)$, также принадлежащая W_φ. Поэтому $\varphi(x)w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

[1]В доказательстве теоремы 1.1 из [3] неверная ссылка: вместо леммы 2.2 указана лемма 3.2 из [6].

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения
$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma). \tag{3.1}$$
Очевидно, $v(\sigma)\uparrow\infty$ при $\sigma\uparrow 0-$. Далее, уравнение (3.1) можно записать в виде
$$w^*(v) = e^{u(\sigma)}, \quad u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln\mu(\sigma). \tag{3.2}$$
Поскольку $w^*\in W_\varphi$, то
$$\lim_{v\to\infty}\varphi(v)J(v;w^*) = 0, \tag{3.3}$$
где $v = v(\sigma)\to\infty$ при $\sigma\to 0-$. Из оценки снизу (1.4) для $\ln\mu(\sigma)$, учитывая равенство (3.1), получаем, что для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$, $\tau_j\uparrow 0$,
$$w^*(v(\tau_j)) = 3\ln\mu(\tau_j) > \nu_0\Phi\left(\frac{1}{|\tau_j|}\right), \quad \nu_0 > 0.$$
Поскольку $w^*(x) = o(x)$ при $x\to\infty$, то отсюда получаем, что
$$\frac{1}{|\tau_j|}\leqslant\varphi(v_j), \quad v_j = v(\tau_j), \quad j\geqslant j_0.$$ [1]

Следовательно, из (3.3) и условия согласованности функций φ и w^* будем иметь:

a) Выполняется условие
$$\lim_{\tau_j\to 0-}\frac{1}{|\tau_j|}J(v_j;w^*) = 0, \quad v_j = v(\tau_j).$$

b) Для всех σ из $[-1,0)$, но вне некоторого множества e_0,
$$\operatorname{mes}(\mathrm{e}_0\cap[\tau_j,0)) = o(|\tau_j|),$$
справедливо соотношение (см. [1], лемма 4)
$$\frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma|v(\sigma)} = o(1).$$

Если же выполнены условия теоремы 1.2, то $w^*\in \underline{W}_\varphi$ (функция w^* формально та же, что и в теореме 1.1), причем $\varphi(x)w^*(x) = o(x)$ при $x\to\infty$ (по условию теоремы 1.2, функции φ и w согласованы). Поскольку $w^*\in\underline{W}_\varphi$, то найдется последовательность $\{\tau_j\}$, $\tau_j\uparrow 0$ (мы сохраним то же обозначение для этой последовательности, хотя она выбирается несколько иначе), такая, что
$$\lim_{v_j\to\infty}\varphi(v_j)J(v_j;w^*) = 0, \quad v_j = v(\tau_j). \tag{3.4}$$
Далее, из условия (1.7) с учетом (3.1) получаем: при $\sigma'\leqslant\sigma<0$ справедливо неравество
$$w^*(v(\sigma)) > \mu_0\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right), \quad \mu_0 > 0.$$
Отсюда при $\sigma'<\sigma''<\sigma<0$
$$\frac{1}{|\sigma|}\leqslant\varphi(v), \quad v = v(\sigma).$$

Следовательно, если учесть (3.4) и условие согласованности функций φ и w^*, вновь приходим к условиям a) и b).

Таким образом, в обоих случаях — и в теореме 1.1, и в теореме 1.2 — все сводится к соотношениям a) и b). При этом последовательности $\{\tau_j\}$, $\tau_j\uparrow 0$, в каждой из теорем, вообще говоря, разные (в теореме 1.1 она выбирается из условия (1.4), а в теореме 1.2 — из

[1] В [1] эта оценка получена в предположении: существует постоянная $C\in(0,\infty)$, такая, что $\varphi(2t)\leqslant C\varphi(t)$, $t>0$. Это ограничение излишне.

условия (3.4)). Дальнейшие рассуждения одни и те же для обеих теорем, и они опираются на единую лемму 2.2 типа Бореля — Неванлинны и лемму 2.1 типа Н.В. Говорова.

Применяя лемму 2.2, в [3], [4] показано, что при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества e_1, $\mathrm{e}_0 \subset \mathrm{e}_1 \subset [-1,0)$, $\mathrm{mes}(\mathrm{e}_1 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, $\tau_j \to 0-$, справедливы следующие ключевые оценки:

$$\mu(\sigma) \leqslant M_F(\sigma) \leqslant M_F(\sigma + 2h^*) < \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \tag{3.5}$$

где

$$h^* = h^*(\sigma) = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)},$$

и

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leqslant \max_{|\xi-\alpha|\leqslant h^{(1)}} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{3.6}$$

где

$$|\xi^* - \alpha| \leqslant h^{(1)}, \qquad \alpha = \sigma + it \in \gamma, \qquad h^{(1)} = h^{(1)}(\sigma) = \frac{h^*(\sigma)}{\sqrt{\beta(v)}}, \qquad v = v(\sigma).$$

Наши уточнения касаются последующих оценок, полученных в тех же работах [3], [4]. Подробно приведем соответствующие выкладки и рассуждения.

Обозначим $B = [-1,0)\backslash \mathrm{e}_1$, $h = \frac{w_1(v)}{v}$, $v = v(\sigma)$, где $w_1(x) = w(x) + w_0(x)$ — функция из класса W_φ (в теореме 1.1) или класса $\underline{W}_\varphi$ (в теореме 1.2). Обозначения функций w и w_0 те же, что и в теореме 1.1.

Существует последовательность

$$\{\sigma_j\}, \quad \sigma_j \in B, \quad \sigma_j \uparrow 0, \quad \sigma_j + h_j \leqslant \sigma_{j+1}, \quad j \geqslant 1,$$

такая, что (см. [1])

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [\sigma_j - h_j, \sigma_j + h_j], \qquad h_j = \frac{w_1(v_j)}{v_j},$$

где $v_j = v(\sigma_j)$, $j = 1, 2, \ldots$.

Положим $g(z) = F(z + \xi^*)$. Как видно из (3.6),

$$|g(0)| > 1 \quad \text{при} \quad \sigma' < \sigma'' \leqslant \sigma_0 < \sigma < 0 \quad \text{вне} \quad \mathrm{e}_1.$$

Согласно лемме 2.1, при подходящем подборе R, r, $0 < r < 1$, в круге $\{z : |z| \leqslant rR\}$, но вне множества исключительных кружков малой меры будет иметь место оценка (2.1). Тогда эта оценка будет верна и на соответствующей поддуге $\gamma' \subset \gamma$ за исключением какой-то ее порции также малой суммарной длины. Наша задача — найти точный количественный размер этой порции.

Для того, чтобы применить к функции $g(z)$ лемму 2.1, в (3.6) положим

$$\alpha = \alpha_j = \sigma_j + it_j, \qquad \xi^* = \xi_j^*, \qquad h^{(1)} = h^{(1)}(\sigma_j) = \frac{w_1(v_j)}{v_j}\sqrt{\beta(v_j)},$$

а в самой лемме возьмем

$$N_0 = 4, \qquad r = r(j) = \frac{1}{\sqrt{\beta(v_j)}}, \qquad R = R_j = 2h_j^*, \qquad h_j^* = \frac{w^*(v_j)}{v_j}, \qquad j \geqslant j_1.$$

Здесь номер j_1 выбирается так, чтобы при $j \geqslant j_1$ выполнялось условие $r = r(j) < 1 - N_0^{-1} = \frac{3}{4}$. Тогда, поскольку $rR = 2h_j^{(1)}$, по лемме 2.1, в круге $\{z : |z| \leqslant 2h_j^{(1)}\}$, но вне исключительных кружков V_{nj} с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке

$$\sum_n \rho_{nj} \leqslant R_j r_j^{N_0}(1 - r_j) < \frac{2h_j}{\beta_j}, \quad h_j = \frac{w_1(v_j)}{v_j}, \quad \beta_j = \beta(v_j), \quad v_j = v(\sigma_j) \quad j \geqslant j_1, \tag{3.7}$$

для функции $g(z) = F(z + \xi_j^*)$ выполняется оценка снизу (2.1).

Пусть γ_j — часть дуги γ, соединяющая вертикальные прямые, проходящие через концы отрезка $\Delta_j = [\sigma_j - h_j, \sigma_j + h_j]$, $j \geqslant j_1$. Так как дуга γ имеет K-наклон, то γ_j содержится в прямоугольнике

$$P_j = \Delta_j \times [c_j, d_j], \quad d_j - c_j \leqslant 2Kh_j,$$

с центром в точке $\alpha_j = \sigma_j + it_j$ и соединяет его вертикальные стороны.

Пусть P_j^* — сдвиг P_j на вектор $a_j = -\xi_j^*$. Поскольку $\beta_j = \beta(v_j) \geqslant 1$, то P_j^*, очевидно, содержится в круге $\{z : |z| < 2h_j^{(1)}\}$. Поэтому оценка (2.1) будет выполняться всюду в прямоугольнике P_j^* за исключением кружков V_{nj} с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке (3.7), т.е. для всех $z \in P_j^* \setminus \cup_n V_{nj}$ при $j \to \infty$

$$\ln|g(z)| \geqslant \left[1 + o(1) - \frac{20L_0}{\ln|g(0)|}\right] \ln|g(0)|. \tag{3.8}$$

Так как

$$|g(0)| = |F(\xi^*)| \leqslant M_F(\sigma + h^{(1)}) \leqslant M_F(\sigma + 2h^*),$$

а $\sigma_j \in B$, $L_0 > 0$, оценка (3.5) показывает, что при $j \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|g(Re^{i\theta})|d\theta \sim \ln|g(0)|.$$

Следовательно, из (3.8) получаем, что для всех z из прямоугольника $P_j^* = P_j + a_j$ (P_j^* — сдвиг P_j на вектор $a_j = -\xi_j^*$), но вне исключительных кружков V_{nj} с общей суммой радиусов, не превосходящих $2\frac{h_j}{\beta_j}$, при $j \to \infty$ выполняется оценка

$$\ln|g(z)| \geqslant (1 + o(1))\ln|g(0)|. \tag{3.9}$$

Отсюда, учитывая, что $g(z) = F(z + \xi_j^*)$, а также принимая во внимание оценки (3.5)–(3.9), получаем, что всюду в прямоугольнике P_j с центром в точке $\alpha_j = \sigma_j + it_j$ за исключением кружков $V'_{nj} = V_{nj} - a_j$, $n = 1, 2, \ldots$, с общей суммой радиусов не более $2\frac{h_j}{\beta_j}$ выполняется оценка

$$\ln|F(s)| > (1 + o(1))\ln\mu(\sigma_j), \quad s = z + \xi_j^*, \quad j \to \infty. \tag{3.10}$$

Пусть e_2 — проекция всех исключительных кружков множества $\bigcup_j P_j$ на B. Убедимся, что $D\mathrm{e}_2 = 0$. Действительно, пусть $\sigma_j \leqslant \sigma < \sigma_{j+1}$. Так как $\sigma_j \notin \mathrm{e}_0$, $j \geqslant 1$, согласно приведенным выше условиям a) и b), $h_j \leqslant h_j^{(1)} \leqslant h_j^* = o(\sigma_j)$ при $j \to \infty$. Следовательно, учитывая неравенство $\sum_{k \geqslant j+1} h_k \leqslant |\sigma|$, получаем, что

$$\frac{\mathrm{mes}(\mathrm{e}_2 \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \leqslant \frac{\mathrm{mes}(\mathrm{e}_2 \cap \Delta_j)}{|\sigma|} + \frac{\mathrm{mes}(\mathrm{e}_2 \cap [\sigma_{j+1} - h_{j+1}, 0))}{|\sigma|}$$
$$\leqslant \frac{2h_j}{|\sigma_j + h_j|\beta_j} + \frac{2}{|\sigma|}\sum_{k \geqslant j+1} \frac{h_k}{\beta_k} \leqslant \frac{2h_j}{|\sigma_j|\beta_j(1 + o(1))} + \frac{2}{\beta_j} = o(1), \quad j \to \infty.$$

Это означает, что $D\mathrm{e}_2 = 0$. Следовательно, если положить $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2$, то $d\mathrm{e} = 0$, так как $D\mathrm{e}_2 = 0$, $d\mathrm{e}_1 = 0$.

Проекция p_j дуги γ_j на $[-1, 0)$ есть отрезок Δ_j. Пусть $A = P \setminus \mathrm{e}$, где $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} p_j$. На этом множестве верны асимптотические оценки (3.6), (3.10) (A называется асимптотическим множеством). Отсюда следует, что при $s \in \gamma$, $\mathrm{Re}\, s = \sigma \to 0-$ по множеству A верно соотношение типа Полиа

$$\ln|F(s)| = (1 + o(1))\ln\mu(\sigma) = (1 + o(1))\ln M_F(\sigma).$$

Осталось получить оценку для верхней плотности DA. Так как $DP = 1$, то

$$DA = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\mathrm{mes}(\mathrm{A} \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \geqslant \overline{\lim_{\mathrm{j}\to\infty}} \frac{\mathrm{mes}(\mathrm{P} \cap [\tau_{\mathrm{j}}, 0))}{|\tau_{\mathrm{j}}|} - \overline{\lim_{\mathrm{j}\to\infty}} \frac{\mathrm{mes}(\mathrm{e} \cap [\tau_{\mathrm{j}}, 0))}{|\tau_{\mathrm{j}}|} = 1.$$

Здесь $\{\tau_j\}$ — последовательность введенная выше, для которой $\mathrm{mes}(\mathrm{e} \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$ при $j \to \infty$. Следовательно, $DA = 1$.

Теорема 2.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.М. Гайсин. *Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости.* // Изв. РАН. Сер. матем. **53**:4, 173–185 (1994).
2. О.Б. Скаскив. *К теореме Вимана о минимуме модуля аналитических в единичном круге функций.* // Изв. АН. СССР. Сер. матем. **53**:4, 833–850 (1989).
3. А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин, Т.И. Белоус. *Регулярность роста ряда Дирихле по усиленно не полной системе экспонент.* // Сибир. матем. журн. **64**:4, 742–752 (2023).
4. Т.И. Белоус, А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. *Оценка суммы ряда Дирихле на дуге ограниченного наклона.* // Изв. вузов. Математика 1, 1–11 (2024).
5. А.М. Гайсин *Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста.* // Мат. заметки **50**:4, 47–56 (1991).
6. А.М. Гайсин, Т.И. Белоус. *Максимальный член ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости: теорема об устойчивости.* // Уфим. мат. ж. **14**:3, 23–34 (2022).

Татьяна Ивановна Белоус,
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `belousti@yandex.ru`

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `gaisinam@mail.ru`

Рашит Ахтярович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `rashit.gajsin@mail.ru`