УДК 517.958

О ЗАДАЧЕ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СНОСОМ В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

М.Д. АЛИЕВ, Ю.А. АЛХУТОВ, Г.А. ЧЕЧКИН

Аннотация. Установлена однозначная разрешимость задачи Зарембы с однородными краевыми условиями Дирихле и Неймана для неоднородного линейного равномерно эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме с измеримыми коэффициентами и с младшими членами. Задача рассматривается в ограниченной строго липшицевой области. Предполагается, что область содержится в n-мерном евклидовом пространстве, где $n \geqslant 2$. Если $n > 2$, то младшие коэффициенты принадлежат пространству Лебега с предельным показателем суммируемости из теоремы вложения Соболева. Если $n = 2$, то младшие коэффициенты суммируемы в любой степени, большей двух. Помимо однозначной разрешимости задачи установлена и энергетическая оценка для её решения.

Ключевые слова: задача Зарембы, разрешимость, снос, предельный показатель, ёмкость.

Mathematics Subject Classification: 35A01, 35B45, 35D30, 35J25

1. Введение

В работе изучается вопрос однозначной разрешимости задачи Зарембы для эллиптического оператора с младшими членами, заданного в ограниченной строго липшицевой области $D \in \mathbb{R}^n$, где $n > 1$, вида

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}(a\nabla u) + b \cdot \nabla u. \tag{1.1}$$

Здесь $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая вещественнозначная измеримая и симметрическая матрица, то есть $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\alpha|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \alpha^{-1}|\xi|^2 \tag{1.2}$$

для почти всех $x \in D$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Вещественнозначная вектор–функция

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$$

M.D. Aliyev, Yu.A. Alkhutov, G.A. Chechkin, On Zaremba problem for second–order linear elliptic equation with drift in case of limit exponent.

Результаты Ю.А. Алхутова в разделе 3 получены в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004), а результаты Г.А. Чечкина в разделе 2 поддержаны грантом РНФ (проект 20-11-20272). Результаты Г.А. Чечкина в разделе 1 частично поддержаны комитетом науки Министерства науки и высшего образования республики Казахстан (грант No. AP14869553).

Поступила 1 мая 2024 г.

из (1.1) удовлетворяет условиям

$$b_j \in L_p(D), \quad p = n, \quad \text{если} \quad n > 2, \quad j = 1, \dots n, \tag{1.3}$$

$$b_j \in L_p(D), \quad p > 2, \quad \text{если} \quad n = 2, \quad j = 1, 2. \tag{1.4}$$

Прежде чем поставить задачу Зарембы, введем соболевское пространство функций $W_2^1(D, F)$, где $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, как пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций и равных нулю в окрестности F функций, по норме

$$\|v\|_{W_2^1(D,F)} = \left(\int\limits_D v^2\, dx + \int\limits_D |\nabla v|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Априори для функций $v \in W_2^1(D, F)$ требуется выполнение неравенства Фридрихса

$$\int\limits_D v^2\, dx \leqslant C \int\limits_D |\nabla v|^2\, dx. \tag{1.5}$$

Для формулировки результата нам потребуется более детальное пояснение того, как мы определяем понятие строго липшицевой области D. С этой целью обозначим через Q куб с центром в точке $x_0 \in \partial D$. Введём декартову систему координат с началом в x_0, в которой рёбра куба параллельны координатным осям и их длина равна $2R_0$. Будем называть область D строго липшицевой, если для каждой точки $x_0 \in \partial D$ множество $Q \cap \partial D$ есть график липшицевой функции $x_n = g(x')$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ с постоянной Липшица L. Предполагается, что длина ребра куба Q и постоянная Липшица L не зависят от x_0.

Приведем необходимое и достаточное условие на множество $F \subset \partial D$, гарантирующее выполнение неравенства (1.5). Для этого нам потребуется понятие ёмкости.

Обозначим через $\mathcal{Q}_d$ открытый куб с длиной ребра d и гранями, параллельными координатным осям, предполагая, что липшицева область D имеет диаметр d и $D \subset \mathcal{Q}_d$. Введём понятие емкости $C_2(K, \mathcal{Q}_{2d})$ компакта $K \subset \overline{\mathcal{Q}}_d$ по отношению к кубу $\mathcal{Q}_{2d}$ следующим равенством:

$$C_2(K, \mathcal{Q}_{2d}) = \inf \left\{ \int\limits_{\mathcal{Q}_{2d}} |\nabla \varphi|^2\, dx : \ \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{Q}_{2d}),\ \varphi \geqslant 1 \text{ на } K \right\}.$$

Из результатов Мазьи (см. [1, §14.1.2] и комментарии к результатам главы 14 монографии [1]) следует, что для функций $v \in W_2^1(D, F)$ неравенство (1.5) имеет место тогда и только тогда, когда

$$C_2(F, \mathcal{Q}_{2d}) > 0. \tag{1.6}$$

Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u = l \quad \text{в} \quad D, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad F, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad G, \tag{1.7}$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ обозначает внешнюю конормальную производную функции u, а l является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к $W_2^1(D, F)$.

Под решением задачи (1.7) понимается функция $u \in W_2^1(D, F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx - \int\limits_D b \cdot \nabla u\, \varphi\, dx = -l(\varphi) \tag{1.8}$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D, F)$.

В силу неравенства Фридрихса (1.5) пространство $W_2^1(D,F)$ можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. Тогда каждому элементу из соболевского пространства можно поставить во взаимно–однозначное изометрическое соответствие его градиент, то есть элемент из $(L_2(D))^n$. Используя теорему Хана — Банаха, как, например в рассуждениях раздела 1.1.15 из монографии [1] о виде функционала в пространствах, сопряженных соболевским, нетрудно показать, что функционал l можно записать в виде

$$l(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_D f_i \varphi_{x_i}\, dx,$$

где $f_i \in L_2(D)$. Поэтому в силу (1.8) для каждого конкретного функционала решение задачи (1.7) можно понимать в смысле интегрального соотношения

$$\int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx - \int\limits_D b\cdot\nabla u\, \varphi\, dx = \int\limits_D f\cdot\nabla\varphi\, dx$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D,F)$, в котором компоненты вектор–функции $f = (f_1,\ldots,f_n)$ являются функциями из $L_2(D)$. Отметим, что при $n > 2$ в силу теоремы вложения Соболева показатель $p = n$ является предельным (см. условие (1.3)).

Сформулируем основной полученный результат.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия (1.2), (1.3) (или (1.4)) и (1.6), то задача Зарембы (1.7) однозначно разрешима в $W_2^1(D,F)$ и для ее решения справедлива оценка*

$$\|\nabla u\|_{L_2(D)} \leqslant C\|f\|_{L_2(D)} \tag{1.9}$$

с постоянной C, зависящей только от коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, области D и размерности пространства.

При $n > 2$ будем пользоваться представлением младших коэффициентов $b \in (L_n(D))^n$ рассматриваемого уравнения вида

$$b = \breve{b} + \widehat{b}, \qquad \breve{b} \in (L_\infty(D))^n, \qquad \widehat{b} \in (L_n(D))^n, \qquad \|\widehat{b}\|_{L_n(D)} \leqslant \theta. \tag{1.10}$$

Здесь $\theta \in (0,1)$ достаточно малая постоянная, которая определяется в ходе дальнейших рассуждений.

2. Вспомогательные утверждения

Как отмечалось выше, для функций из пространства $W_2^1(D,F)$ выполнено неравенство Фридрихса (1.5), в силу чего это пространство можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. В последующих рассуждениях будем использовать теоремы вложения Соболева для строго липшицевых областей, имея в виду такую норму. Кроме того, предполагается выполненным условие (1.6), влекущее неравенство Фридрихса (1.5).

Далее нам потребуются оценки билинейной формы, определенной на функциях $u, v \in W_2^1(D,F)$, соответствующей оператору $\mathcal{L}$ и имеющей вид

$$\ell(u,v) = \int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla v\, dx - \int\limits_D (b\cdot\nabla u)v\, dx. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из (1.1) удовлетворяют условиям (1.2), (1.3) (или (1.4)), то*

$$\ell(u,u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\int\limits_D |\nabla u|^2\, dx - C(\alpha,b,n,p,D)\int\limits_D u^2\, dx, \tag{2.2}$$

где $C(\alpha, b, n, p, D)$ — положительная константа, зависящая от α, b, n, p и D.

Доказательство. В силу условия (1.2) имеем

$$\ell(u,u) \geqslant \alpha \int\limits_D |\nabla u|^2\,dx - \Big|\int\limits_D (b\cdot\nabla u)u\,dx\Big|. \tag{2.3}$$

Сначала предположим, что $n > 2$ и оценим второе слагаемое в правой части тождества (2.1). Из (1.10) имеем

$$\int\limits_D (b\cdot\nabla u)u\,dx = \int\limits_D (\breve{b}\cdot\nabla u)u\,dx + \int\limits_D (\widehat{b}\cdot\nabla u)u\,dx. \tag{2.4}$$

Для первого интеграла в правой части (2.4) получим

$$\Big|\int\limits_D (\breve{b}\cdot\nabla u)u\,dx\Big| \leqslant C(n)\|\breve{b}\|_{L_\infty(D)} \int\limits_D |\nabla u|\,|u|\,dx$$

и из неравенства Коши с $\varepsilon > 0$ найдем

$$\Big|\int\limits_D (\breve{b}\cdot\nabla u)u\,dx\Big| \leqslant \varepsilon \int\limits_D |\nabla u|^2\,dx + C(\varepsilon, n)\|\breve{b}\|^2_{L_\infty(D)} \int\limits_D u^2\,dx. \tag{2.5}$$

Второй интеграл в правой части (2.4) оценим с помощью неравенства Гёльдера, в силу которого

$$\Big|\int\limits_D (\widehat{b}\cdot\nabla u)u\,dx\Big| \leqslant \|\widehat{b}\|_{L_n(D)} \Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}}. \tag{2.6}$$

По неравенству Соболева

$$\Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}} \leqslant C(n,D)\Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Отсюда и из (2.6) с учетом (1.10) получим

$$\Big|\int\limits_D (\widehat{b}\cdot\nabla u)u\,dx\Big| \leqslant C(n,D)\theta \int\limits_D |\nabla u|^2\,dx. \tag{2.7}$$

Из (2.5) и (2.7) найдем

$$\Big|\int\limits_D (b\cdot\nabla u)u\,dx\Big| \leqslant \varepsilon \int\limits_D |\nabla u|^2\,dx + C(\varepsilon,n)\|\breve{b}\|^2_{L_\infty(D)} \int\limits_D u^2\,dx + C(n,D)\theta \int\limits_D |\nabla u|^2\,dx.$$

Отсюда после соответствующего выбора ε и θ из (2.3) приходим к заявленной оценке (2.2).

Покажем теперь неравенство (2.2) при $n = 2$. В этом случае будем также исходить из неравенства Гёльдера с другим показателем

$$\Big(\int\limits_D |b|^2 u^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{1/p} \Big(\int\limits_D |u|^{\tilde{p}}\,dx\Big)^{1/\tilde{p}}.$$

Здесь $\tilde{p} = \frac{2p}{p-2}$, $p > 2$ и ясно, что $\tilde{p} > 2$. В итоге для второго слагаемого в правой части (2.3) будем иметь

$$\Big|\int\limits_D (b\cdot\nabla u)u\,dx\Big| \leqslant \Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{1/p} \Big(\int\limits_D |u|^{\tilde{p}}\,dx\Big)^{1/\tilde{p}}. \tag{2.8}$$

Согласно тождеству

$$\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx = \int\limits_D |u||u|^{\tilde p-1}\,dx,$$

по неравенству Коши — Буняковского найдем

$$\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx \leqslant \Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{1/2}.$$

Таким образом, из (2.8) вытекает, что

$$\Big|\int\limits_D (b\cdot\nabla u)u\,dx\Big| \leqslant \Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde p}}. \quad (2.9)$$

Далее, по неравенству Коши

$$\begin{aligned}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde p}}\\ \leqslant \varepsilon\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2\varepsilon}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\end{aligned} \quad (2.10)$$

и, согласно неравенству Юнга с учётом равенства $\frac{2\tilde p}{p} = \frac{4}{p-2}$ выводим

$$\begin{aligned}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\\ \leqslant \varepsilon_1\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p-1}} + C(\varepsilon_1)\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{\frac{4}{p-2}}\int\limits_D u^2\,dx.\end{aligned}$$

По теореме вложения Соболева выполнено неравенство

$$\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p-1}} \leqslant C(D,p)\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx,$$

а потому

$$\begin{aligned}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\\ \leqslant \varepsilon_1 C(D,p)\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx + C(\varepsilon_1,b,p)\int\limits_D u^2\,dx.\end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.9)–(2.11) с учётом (2.3) после соответствующего выбора ε_1 вновь приходим к неравенству (2.2). Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из (1.1) удовлетворяют условиям (1.2), (1.3) (или (1.4)), то для фиксированного $u \in W_2^1(D,F)$ отображение $v \mapsto \ell(u,v)$, где форма $\ell(u,v)$ определена в (2.1), является ограниченным линейным функционалом на $W_2^1(D,F)$ и справедлива оценка*

$$|\ell(u,v)| \leqslant C(\alpha,b,n,p,D)\|u\|_{W_2^1(D,F)}\|v\|_{W_2^1(D,F)}. \quad (2.12)$$

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1.1)

$$\left|\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right|\leqslant \alpha^{-1}\|u\|_{W_2^1(D,F)}\|v\|_{W_2^1(D,F)}. \tag{2.13}$$

При $n>2$, исходя из условия (1.3), второе слагаемое формы (2.1) оценим по неравенству Гёльдера:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_D (b\cdot\nabla u)v\,dx\right| &\leqslant \|u\|_{W_2^1(D,F)}\Big(\int\limits_D |b|^2v^2\,dx\Big)^{1/2}\\ &\leqslant \|u\|_{W_2^1(D,F)}\Big(\int\limits_D |b|^n\,dx\Big)^{1/n}\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Используя теорему вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}}\leqslant C(n,D)\|v\|_{W_2^1(D,F)},$$

в силу (2.13), (2.14) приходим к (2.12).

Если $n=2$, то второе слагаемое формы (2.1) также оценивается по неравенству Гёльдера:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_D (b\cdot\nabla u)v\,dx\right| &\leqslant \|u\|_{W_2^1(D,F)}\Big(\int\limits_D |b|^2v^2\,dx\Big)^{1/2}\\ &\leqslant \|u\|_{W_2^1(D,F)}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}},\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $p>2$. Вновь по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}}\leqslant C(n,D)\|v\|_{W_2^1(D,F)}$$

и с учётом (2.13), (2.15) приходим к (2.12). Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь задачу Зарембы (1.7) для однородного уравнения. Докажем для её решений принцип максимума. Функция $u\in W_2^1(D,F)$ называется *субрешением* задачи Зарембы (1.7) для однородного уравнения в области D, если

$$\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx-\int\limits_D (b\cdot\nabla u)\varphi\,dx\leqslant 0, \tag{2.16}$$

где $\varphi\in W_2^1(D,F)$ — произвольная неотрицательная функция. Аналогично определяется *суперрешение* $u\in W_2^1(D,F)$ в области D, для которого выполнено неравенство

$$\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx-\int\limits_D (b\cdot\nabla u)\varphi\,dx\geqslant 0$$

для всех неотрицательных функций $\varphi\in W_2^1(D,F)$.

Следующее утверждение для задачи Дирихле можно найти в [2] (см. также [3, Теор. 3.1]).

Лемма 2.3. *Если выполнены условия* (1.2), (1.3) *(или* (1.4)*) и функция* $u \in W_2^1(D, F)$ *является субрешением в области* D, *то*

$$\operatorname*{ess\,sup}_D u \leqslant 0. \tag{2.17}$$

Если же $u \in W_2^1(D, F)$ *является суперрешением в области* D, *то*

$$\operatorname*{ess\,inf}_D u \geqslant 0. \tag{2.18}$$

Доказательство. Сначала покажем (2.17). Доказательство проводим от противного. Предположим, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_D u > 0.$$

Тогда существует такое число k, что

$$0 < k < \operatorname*{ess\,sup}_D u.$$

Рассмотрим функцию $v = \max(u - k, 0) = (u - k)^+$, которая принадлежит пространству $W_2^1(D, F)$ и неотрицательна. В силу (2.16) имеем

$$\int\limits_D a\nabla v \cdot \nabla v \, dx \leqslant \int\limits_D (b \cdot \nabla v) v \, dx.$$

В силу выбора функции v эту оценку можно переписать в виде

$$\int\limits_{D\cap\{u>k\}} a\nabla u \cdot \nabla u \, dx \leqslant \int\limits_{D\cap\{u>k\}} (b \cdot \nabla u) v \, dx. \tag{2.19}$$

Сначала предположим, что $n > 2$. Пользуясь в левой части (2.19) условием эллиптичности (1.2) и применяя неравенство Гёльдера в правой части, получим

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx \leqslant \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^n \, dx \Big)^{1/n} \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \Big)^{\frac{n-2}{2n}}. \tag{2.20}$$

Поскольку $v \in W_2^1(D, F)$, по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \Big)^{\frac{n-2}{2n}} \leqslant C(n, D) \Big(\int\limits_D |\nabla v|^2 \, dx \Big)^{1/2} = C(n, D) \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx \Big)^{1/2},$$

и из (2.20) будем иметь

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx \leqslant C(n, D) \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^n \, dx \Big)^{1/n} \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx. \tag{2.21}$$

Если $M = \operatorname*{ess\,sup}_D u = \infty$, то первый интеграл в правой части (2.21) стремится к нулю при $k \to \infty$, что приводит к противоречию.

Если же $M < \infty$, то $\nabla u = 0$ почти всюду на множестве $D \cap \{u = M\}$ и оценка (2.21) приобретает вид

$$\alpha \leqslant C(n, D) \Big(\int\limits_{M_k} |b|^n \, dx \Big)^{1/n},$$

где

$$M_k = \{x \in D : \ k < u(x) < M, \ \nabla u(x) \neq 0\}.$$

Ясно, что n-мерная мера Лебега множества M_k стремится к нулю при $k \to M$, в силу чего

$$\Big(\int\limits_{M_k} |b|^n \, dx \Big)^{1/n} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \to M,$$

и мы вновь приходим к противоречию, что и доказывает (2.17).

Рассмотрим оставшийся случай, когда $n = 2$. Исходя из (2.19), пользуясь условием эллиптичности и применяя неравенство Гёльдера с другими показателями, придем к оценке

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx \leqslant \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^p \, dx \Big)^{1/p} \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{D} |v|^{\frac{2p}{p-2}} \, dx \Big)^{\frac{p-2}{2p}}, \qquad (2.22)$$

где $p > 2$. При $n = 2$ по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_{D} |v|^{\frac{2p}{p-2}} \, dx \Big)^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant C(p, D) \Big(\int\limits_{D} |\nabla v|^2 \, dx \Big)^{1/2} = C(p, D) \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

и из (2.22) приходим к оценке

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx \leqslant C(p, D) \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^p \, dx \Big)^{1/p} \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2 \, dx. \qquad (2.23)$$

Дальнейшие рассуждения, основанные на (2.23), ничем не отличаются от приведенных выше в случае $n > 2$, что вновь влечет (2.17).

Оценка (2.18) доказывается аналогично. Нужно только заметить, что если функция u является суперрешением уравнения, то эта же функция со знаком минус будет субрешением. Лемма доказана. □

Следствие 2.1. *При выполнении условий* (1.2), (1.3) *(или* (1.4)*) задача Зарембы* (1.7) *имеет единственное решение.*

3. Доказательство теоремы 1.1

Определим для $\sigma > 0$ оператор $\mathcal{L}_\sigma$ формулой $\mathcal{L}_\sigma u = \mathcal{L}u - \sigma u$. Из оценки (2.2) леммы 2.1 следует, что соответствующая оператору $\mathcal{L}_\sigma$ форма

$$\ell_\sigma(u, u) = \int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla u \, dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u) u \, dx + \sigma \int\limits_D u^2 \, dx$$

при достаточно большом $\sigma = \sigma_0(\alpha, b, n, p, D)$ будет коэрцитивной, то есть

$$\ell_\sigma(u, u) \geqslant \frac{\alpha}{2} \int\limits_D |\nabla u|^2 \, dx.$$

Отметим, что при таком выборе $\sigma = \sigma_0$ билинейная форма

$$\ell_{\sigma_0}(u, v) = \int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u) v \, dx + \sigma_0 \int\limits_D uv \, dx \qquad (3.1)$$

является ограниченной. Это следует из оценки (2.12), примененной к первым двум слагаемым в правой части (3.1) и оценки

$$\int\limits_D uv \, dx \leqslant \|u\|_{L_2(D)} \|v\|_{L_2(D)} \leqslant C(n, D) \|u\|_{W_2^1(D,F)} \|v\|_{W_2^1(D,F)},$$

вытекающей из неравенства Фридрихса (1.5). Таким образом, оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ является ограниченным и коэрцитивным в гильбертовом пространстве $H = W_2^1(D,F)$.

Пусть H^* означает пространство, сопряженное к H. Определим оператор $\mathfrak{I}_u : H \to H^*$ равенством

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_u v = \int\limits_D uv\,dx, \quad v \in H. \tag{3.2}$$

Покажем, что отображение $\mathfrak{I}_u$ является компактным. Для этого заметим, что отображение $\mathfrak{I}_u$ можно представить в виде композиции

$$\mathfrak{I}_u = \mathfrak{I}_1 \circ \mathfrak{I}_2. \tag{3.3}$$

Здесь $\mathfrak{I}_2 : H \to L_2(D)$ — естественное вложение. Поскольку норма в пространстве H совпадает с нормой в пространстве $W_2^1(D)$, а область D является строго липшицевой, по теореме о компактности вложения из [4, §11.5] оператор $\mathfrak{I}_2$ является компактным. Отображение $\mathfrak{I}_1 : L_2(D) \to H^*$ определено формулами (3.2) и (3.3). Из того, что оператор $\mathfrak{I}_1$ непрерывен и оператор $\mathfrak{I}_2$ компактен, следует компактность оператора $\mathfrak{I}$.

Уравнение $\mathcal{L}u = l$ для $u \in H$, где l — функционал в пространстве H^*, сопряженном к $H = W_2^1(D,F)$, эквивалентно уравнению $\mathcal{L}_{\sigma_0} u + \sigma_0 \mathfrak{I}_u u = l$. По лемме Лакса — Мильграма (см. [5]) обратный оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение H^* на H. Поэтому, применяя этот оператор к предыдущему уравнению, получаем эквивалентное уравнение

$$u + \sigma_0 \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} \mathfrak{I}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l. \tag{3.4}$$

Отображение $T = -\sigma_0 \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} \mathfrak{I}_u$ в силу компактности $\mathfrak{I}$ также компактно. Следовательно, по альтернативе Фредгольма (см., например, терема 5.3 [6, §5.3]) существование функции $u \in H$, удовлетворяющей уравнению (3.4), является следствием единственности в H тривиального решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$. Теперь однозначная разрешимость задачи Зарембы (1.7) вытекает из следствия к лемме 2.3.

Перейдем к доказательству оценки (1.9). Для этого определим формально сопряженный для $\mathcal{L}$ оператор $\mathcal{L}^\star$ формулой

$$\mathcal{L}^\star u := \operatorname{div}(a(x)\nabla u) - \operatorname{div}(b(x)u).$$

Поскольку для соответствующих билинейных форм выполнено равенство

$$\ell^\star(u,v) = \ell(v,u) \quad \text{при} \quad u, v \in W_2^1(D,F),$$

оператор $\mathcal{L}^\star$ сопряжен оператору $\mathcal{L}$ в гильбертовом пространстве H. Заменяя в предыдущем рассуждении $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^\star$, мы видим, что уравнение $\mathcal{L}_\sigma u = l$ эквивалентно уравнению

$$u + (\sigma_0 - \sigma)\mathcal{L}_\sigma^{-1} \mathfrak{I}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l$$

и сопряженный оператор $T_\sigma^\star$ компактного отображения $T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma)\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}$ (см. (3.2)) дается формулой

$$T_\sigma^\star = (\sigma_0 - \sigma)(\mathcal{L}_{\sigma_0}^\star)^{-1}\mathfrak{I}.$$

Используя теперь теорему о сжимающих отображениях в банаховом пространстве (см., например, [6, §5.1, Теор. 5.1]), мы приходим к следующему утверждению, аналогичному теореме 8.6 из монографии [6].

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3) *(или* (1.4)*) и справедливо неравенство Фридрихса* (1.5). *Тогда существует не более чем счетное дискретное множество* $\Sigma \in (-\infty, 0)$, *такое что если* $\sigma \notin \Sigma$, *то задачи Зарембы для уравнений* $\mathcal{L}_\sigma u = l$ *и* $\mathcal{L}_\sigma^\star u = l$ *однозначно разрешимы в* $W_2^1(D,F)$ *для произвольного линейного функционала* l *в пространстве, сопряженном к* $W_2^1(D,F)$.

Для доказательства оценки (1.9) рассмотрим оператор $G_\sigma : H^\star \to H$, определяемый равенством $G_\sigma = \mathcal{L}_\sigma^{-1}$ при $\sigma \notin \Sigma$. Этот оператор естественно назвать оператором Грина задачи Зарембы (1.7). Используя альтернативу Фредгольма (см., например, [6, §5.3, Теор. 5.3]), заключаем, что этот оператор является ограниченным, и, следовательно, справедлива оценка (1.9). Теорема 1.1 доказана.

Благодарности

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение работы и полезные замечания, которые позволили улучшить изложение результатов.

Работа была инициирована в результате появления исследований задачи Зарембы с быстрой сменой краевых условий (см. [7]–[9]), а также получения оценок повышенной суммируемости решений таких задач (см. [10]–[13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Maz'ya. *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag. 2011.
2. G. Stampacchia. *Le probléme de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus* // Ann. Inst. Fourier **15**:1, 189–257 (1965).
3. Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров. *Лемма о нормальной производной и вокруг нее* // Усп. мат. наук **77**:2, 3–68 (2022).
4. С.Л. Соболев. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. М.: Наука. 1988.
5. P.D. Lax, A. Milgram. *Parabolic equations* // Ann. Math. Stud. **33**, 167–190 (1954).
6. Д. Гилбарг, Н.С. Трудингер. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*. М.: Наука. 1989.
7. М.Е. Перес, Е.И. Яблокова, Г.А. Чечкин. *О собственных колебаниях тела с "лёгкими" концентрированными массами на поверхности* // Усп. мат. наук **57**:6, 195–196 (2002).
8. G.A. Chechkin. *On the vibration of a partially fastened membrane with many "light" concentrated masses on the boundary* // C. R., Méc., Acad. Sci. Paris **332**:12, 949–954 (2004).
9. G.A. Chechkin, Yu.O. Koroleva, L.-E. Persson. *On the precise asymptotics of the constant in Friedrich's inequality for functions vanishing on the part of the boundary with microinhomogeneous structure* // J. Inequal. Appl. **2007**, 34138, 13 p. (2007).
10. Ю.А. Алхутов, Г.А. Чечкин, *Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона* // Докл. росс. акад. наук, мат. информ. процессы упр. **497**, 3–6 (2021).
11. Yu.A. Alkhutov, G.A. Chechkin. *The Meyer's estimate of solutions to Zaremba problem for second-order elliptic equations in divergent form* // C. R. Méc. **349**:2, 299–304 (2021).
12. Yu.A. Alkhutov, G.A. Chechkin, V.G. Maz'ya. *Boyarsky-Meyers estimate for solutions to Zaremba problem* // Arch. Ration. Mech. Anal. **245**:2, 1197–1211 (2022).
13. Г.А. Чечкин, Т.П. Чечкина. *Оценка Боярского–Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера* // Пробл. мат. анал. **119**, 107–116 (2022).

Мушфиг Джалал оглы Алиев,
Бакинский государственный университет,
ул. Академика Захида Халилова, 33,
AZ1148, г. Баку, Азербайджан
E-mail: `a.mushfiq@rambler.ru`

Юрий Александрович Алхутов,
Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых,
пр. Строителей, 11,
600000, г. Владимир, Россия
E-mail: `yurij-alkhutov@yandex.ru`

Григорий Александрович Чечкин,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Ленинские Горы, 1,
119991, г. Москва, Россия

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125,
05010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: `chechkin@mech.math.msu.su`