ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 3 (2024). С. 96-110.

УДК 517.957

О ВЕКТОРНОМ ПРОИЗВОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЁДИНГЕРА

А.О. СМИРНОВ, С.Д. ШИЛОВСКИЙ

Аннотация. В работе предлагается последовательность пар Лакса, условиями совместности которых являются векторные интегрируемые нелинейные уравнения. Первыми уравнениями этой иерархии являются векторные уравнения Каупа — Ньюэлла, Чень — Ли — Лью и Герджикова — Иванова. Тип векторного уравнения зависит от дополнительного параметра α. Предложенная нами форма векторного уравнения Каупа — Ньюэлла имеет небольшие отличия от классической. Показано, что эволюция простейших нетривиальных решений этих уравнений является композицией эволюции длины вектора решения и эволюции ориентации вектора решения. Исследованы свойства спектральных кривых простейших нетривиальных решений векторных уравнений из построенной иерархии.

Ключевые слова: Интегрируемое нелинейное уравнение, уравнение Каупа — Ньюэлла, уравнение Чень — Ли — Лью, уравнение Герджикова — Иванова, многофазное решение, спектральная кривая.

Mathematics Subject Classification: 35Q51, 35Q55

1. Введение

В последнее время достаточно большое внимание уделяется векторным вариантам нелинейного уравнения Шрёдингера (см., например, [1]– [8]). Это связано с желанием удвоить объем информации, передаваемой по оптическим каналам [9]– [13]. Естественно, также активно изучаются и векторные формы производных нелинейных уравнений Шрёдингера (см., например, [14]– [23]). Следует отметить, что используемые в этих работах пары Лакса часто сильно отличаются друг от друга, что нам кажется не совсем правильным. Поэтому мы решили предложить последовательность пар Лакса, которые зависят от функциональных параметров s и s_k ($\partial_{t_k} s = \partial_x s_k$). Условиями совместности этих пар является иерархия интегрируемых векторных нелинейных уравнений. При $s = \alpha(\mathbf{p}^t\mathbf{q})$ первое уравнение этой иерархии является векторной формой производного нелинейного уравнения Шрёдингера. Если $\alpha = 0$, то этим уравнением будет векторное уравнение Герджикова — Иванова [23]

$$i\mathbf{p}_{t_1} - \mathbf{p}_{xx} + 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p} - 2(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{p} = 0,$$
$$i\mathbf{q}_{t_1} + \mathbf{q}_{xx} + 2i(\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x)\mathbf{q} + 2(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{q} = 0.$$

При $\alpha = 1$ первым уравнением построенной иерархии является векторное уравнение Чень — Ли — Лью

$$i\mathbf{p}_{t_1} - \mathbf{p}_{xx} - 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{p}_x = 0,$$
$$i\mathbf{q}_{t_1} + \mathbf{q}_{xx} - 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{q}_x = 0.$$

A.O. Smirnov, S.D. Shilovsky, On vector derivative nonlinear Schrödinger equation.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00196, https://rscf.ru/project/22-11-00196/.

Поступила 1 марта 2024 г.

Заметим, что найденная нами векторная форма уравнения Каупа — Ньюэлла ($\alpha = 2$)

$$i\mathbf{p}_{t_1} - \mathbf{p}_{xx} - 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{p}_x - 2i(\mathbf{p}\mathbf{q}^t)_x\mathbf{p} = 0,$$
$$i\mathbf{q}_{t_1} + \mathbf{q}_{xx} - 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{q}_x - 2i(\mathbf{p}\mathbf{q}^t)_x\mathbf{q} = 0,$$

отличается от его «классического» варианта [14]. Вместе с тем, в скалярном случае отсутствует различие между выражениями $(\mathbf{p}^t\mathbf{q})$ и $(\mathbf{p}\mathbf{q}^t)$ и данное уравнение в скалярном случае является уравнением Каупа — Ньюэлла. Поэтому оно является одной из его интегрируемых векторных форм. При других значениях параметра α уравнение имеет более сложный вид. Заметим, что, выбирая другие значения функционального параметра s, можно получать векторные производные аналоги уравнения Кунду [24]– [26].

Работа состоит из введения, пяти разделов и заключительных замечаний. В разделе 2 мы задаем оператор Лакса

$$i\Psi_x = U\Psi, \qquad U = -\lambda^2 J + \lambda Q + R + sJ,$$

зависящий от функционального параметра $s \in \mathbb{R}$ и находим структуру соответствующей матрицы монодромии M [27] из уравнения

$$iM_x + MU - UM = \mathbf{0}. \tag{1.1}$$

Как обычно, матрицу M мы ищем в виде многочлена по спектральному параметру λ

$$M = \sum_{k=0}^{N} m_k(x)\lambda^k. \tag{1.2}$$

Структура матрицы U приводит к различиям в структуре коэффициентов m_k для четных и нечетных индексов k. Кроме структуры матрицы M из уравнения (1.1) мы находим рекуррентные соотношения на элементы коэффициентов $m_k(x)$. В разделе 3 мы предлагаем последовательность вторых операторов для пар Лакса. Условиями совместности этих пар Лакса являются эволюционные интегрируемые нелинейные уравнения, которые достаточно просто записываются в терминах элементов матрицы M, введенной в разделе 2. Первыми уравнениями из данной иерархии являются векторные формы производных вариантов нелинейного уравнения Шрёдингера, приведенные выше. В следующем разделе мы кратко обсуждаем стационарные уравнения, которым удовлетворяют многофазные решения. Как и в других случаях (см., например, [23], [26], [28]), стационарные уравнения делятся на две группы. В первую группу входят два матричных уравнения, которые являются ограничениями уравнения (1.1) на нулевую и первую степени спектрального параметра λ. Поскольку структура коэффициентов m_k зависит от четности k, то скалярная форма этих стационарных уравнений зависят от четности старшей степени N многочлена (1.2). Вторая группа стационарных уравнений вытекает из условия постоянства коэффициентов уравнения соответствующей спектральной кривой. Напомним, что уравнение спектральной кривой является характеристическим уравнением матрицы M [27]. В простейших случаях систему из этих стационарных уравнений можно решить. Заметим, что как и в случаях обычных векторных уравнений [1], [26] и скалярных производных уравнений [28], количество фаз решения меньше рода его спектральной кривой.

В разделе 5 мы подробно рассматриваем случай $N = 3$ (или $n = 1$, где $n = N - 2$), когда стационарные уравнения уже не имеют решения в виде плоских волн, но их еще можно решить аналитически. Число n можно считать уровнем сложности решения. Если $n = 0$, то решениями стационарных уравнений будут плоские волны. Если $n = 1$, то решения, как правило, выражаются через эллиптические функции и их вырождения. В этом разделе мы показываем, что при $n = 1$ естественным образом возникает геометрическая интерпретация функциональных параметров вектора решения: его длина и направление. Заметим, что длина вектора решения и его направление не зависят от функционального параметра s. Кроме того, в этом случае стационарные уравнения сводятся к автономному дифференциальному уравнению первого порядка на длину вектора и уравнению, которое связывает изменения направления вектора с его длиной. Также в этом разделе мы исследуем зависимость поведения простых нетривиальных решений и их спектральных кривых от параметров. Нами показано, что в общем случае при $n = 1$ решение является двухфазным, а род соответствующей кривой равен $g = 3$.

В разделе 6 мы рассматриваем эволюционные интегрируемые нелинейные уравнения с геометрической точки зрения. Мы показываем, что, если не использовать стационарные уравнения, то нет никакого преимущества в геометрическом подходе. Если же рассматривать случай $n = 1$ и использовать формулы, вытекающие из стационарных уравнений, то эволюция длины и направления решений описывается достаточно простыми уравнениями. При этом на будущее остается вопрос, будет ли полезен геометрический подход при увеличении уровня сложности решения n. Заметим, что с прикладной точки зрения «длина вектора» решения и его «направление» являются теоретическими объектами, поскольку на практике поляризованные пучки проходят через делитель, а само оптическое волокно в этом случае имеет довольно сложную структуру (см., например, [29], [30] и библиографию в этих работах).

2. Матрица монодромии

Пусть оператор Лакса имеет вид

$$i\Psi_x = U\Psi, \tag{2.1}$$

где

$$U = -\lambda^2 J + \lambda Q + R + sJ, \tag{2.2}$$

$$J = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{p}^t \\ -\mathbf{q} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}^t\mathbf{q} & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}\mathbf{p}^t \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$\mathbf{p}^t = (p_1, p_2)$, $\mathbf{q}^t = (q_1, q_2)$.

Рассмотрим уравнение (2.1), (2.2) с матрицами (2.3). Следуя работам [27], [28], будем искать матрицу монодромии M функции Ψ в виде многочлена по спектральному параметру λ. Тогда из уравнения (1.1) вытекает следующая структура матрицы M:

$$M_n = V_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k V_{n-k} + c_n U_0 + c_{n+1} V_{-1} + J_n,$$

где

$$V_{-1} = -\lambda J + Q, \quad U_0 = \lambda V_{-1} + R, \quad V_1 = \lambda U_0 + V_1^0, \quad V_{j+1} = \lambda V_j + V_{j+1}^0,$$
$$V_{2k-1}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{H}_k^t \\ \mathbf{G}_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad V_{2k}^0 = \begin{pmatrix} -\mathcal{F}_k & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & F_k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_k = \operatorname{Tr} F_k, \quad k \geq 1,$$
$$J_n = \begin{pmatrix} -2c_{n+2} & 0 & 0 \\ 0 & c_{n+2} + c_{n+3} & c_{n+4} \\ 0 & c_{n+5} & c_{n+2} - c_{n+3} \end{pmatrix}.$$

Здесь $c_k \in \mathbb{R}$ есть некоторые постоянные, параметризующие решение.

Элементы матрицы V_k^0 удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}_1 = -i\mathbf{p}_x + s\mathbf{p}, \quad \mathbf{G}_1 = -i\mathbf{q}_x - s\mathbf{q},\\
&\mathbf{H}_{k+1} = \left(F_k^t + \mathcal{F}_k I\right)\mathbf{p} - \left(\mathbf{p}\mathbf{q}^t + (\mathbf{p}^t\mathbf{q})I\right)\mathbf{H}_k + s\mathbf{H}_k - i\partial_x \mathbf{H}_k,\\
&\mathbf{G}_{k+1} = -\left(F_k + \mathcal{F}_k I\right)\mathbf{q} - \left(\mathbf{q}\mathbf{p}^t + (\mathbf{q}^t\mathbf{p})I\right)\mathbf{G}_k + s\mathbf{G}_k + i\partial_x \mathbf{G}_k,\\
&\partial_x F_k = \mathbf{q}\partial_x \mathbf{H}_k^t - \partial_x \mathbf{G}_k \mathbf{p}^t - i\left(\mathbf{q}\mathbf{p}^t + (\mathbf{q}^t\mathbf{p})I\right)\mathbf{G}_k\mathbf{p}^t\\
&\qquad - i\mathbf{q}\mathbf{H}_k^t\left(\mathbf{q}\mathbf{p}^t + (\mathbf{q}^t\mathbf{p})I\right) + is(\mathbf{G}_k\mathbf{p}^t + \mathbf{q}\mathbf{H}_k^t).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В частности,

$$\begin{aligned}
&F_1 = i\left(\mathbf{q}_x\mathbf{p}^t - \mathbf{q}\mathbf{p}_x^t\right) - (\mathbf{q}\mathbf{p}^t)^2 + 2s\mathbf{q}\mathbf{p}^t,\\
&\mathcal{F}_1 = i(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x - \mathbf{q}^t\mathbf{p}_x) - (\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2 + 2s(\mathbf{p}^t\mathbf{q}),\\
&H_2 = -\mathbf{p}_{xx} + 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p} - 2(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{p} + 2s((\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{p} - i\mathbf{p}_x) + (s^2 - is_x)\mathbf{p},\\
&G_2 = \mathbf{q}_{xx} + 2i(\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x)\mathbf{q} + 2(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{q} - 2s((\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{q} + i\mathbf{q}_x) - (s^2 + is_x)\mathbf{q},\\
&\mathcal{F}_2 = (\mathbf{p}_x^t\mathbf{q}_x - \mathbf{p}^t\mathbf{q}_{xx} - \mathbf{q}^t\mathbf{p}_{xx}) - 2(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^3 + 3s^2(\mathbf{p}^t\mathbf{q}) + 3is(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x - \mathbf{q}^t\mathbf{p}_x),\\
&H_3 = i\mathbf{p}_{xxx} + 3(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p} + 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p}_x + 3i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q})\mathbf{p} + 3i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{p}_x\\
&\qquad - 3s\mathbf{p}_{xx} - 3(s_x + is^2 + is(\mathbf{p}^t\mathbf{q}))\mathbf{p}_x - (s_{xx} - s^3 - 6s^2(\mathbf{p}^t\mathbf{q}) + 6s(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2)\mathbf{p}\\
&\qquad - 3is(s_x + (\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x) - 2(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x))\mathbf{p},\\
&G_3 = i\mathbf{q}_{xxx} - 3(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q}_x)\mathbf{q} - 3(\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x)\mathbf{q}_x + 3i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})(\mathbf{q}_x^t\mathbf{p})\mathbf{q} + 3i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{q}_x\\
&\qquad + 3s\mathbf{q}_{xx} + 3(s_x - is^2 - is(\mathbf{p}^t\mathbf{q}))\mathbf{q}_x + (s_{xx} - s^3 - 6s^2(\mathbf{p}^t\mathbf{q}) + 6s(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2)\mathbf{q}\\
&\qquad - 3is(s_x + (\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x) - 2(\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x))\mathbf{q}.
\end{aligned}$$

3. Интегрируемые эволюционные нелинейные уравнения

Зададим второе уравнение пары Лакса уравнением

$$i\Psi_{t_k} = W_k\Psi, \tag{3.1}$$

где $W_k = V_{2k} + s_k J$, $\partial_{t_k} s = \partial_x s_k$.

Тогда из условия совместности пары Лакса вытекают следующие интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{t_k} &= i\mathbf{H}_{k+1} - is_k\mathbf{p},\\
\mathbf{q}_{t_k} &= i\mathbf{G}_{k+1} + is_k\mathbf{q}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из уравнений (3.2), (2.4) вытекают следующие соотношения

$$\partial_{t_k}(\mathbf{p}^t\mathbf{q}) = \partial_x(\mathcal{F}_k).$$

Следовательно, в уравнениях (3.2) можно положить

$$s = \alpha(\mathbf{p}^t\mathbf{q}), \quad s_k = \alpha\mathcal{F}_k, \tag{3.3}$$

где α есть некоторое действительное число. Уравнения (3.2) имеют наиболее простой вид в трех случаях: при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$.

Полагая $\alpha = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
&i\mathbf{p}_{t_1} - \mathbf{p}_{xx} + 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p} - 2(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{p} = 0,\\
&i\mathbf{q}_{t_1} + \mathbf{q}_{xx} + 2i(\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x)\mathbf{q} + 2(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{q} = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}_{t_2} + \mathbf{p}_{xxx} - 3i(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p} - 3i(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p}_x + 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q})(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q})\mathbf{p} + 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{p}_x = 0,\\
&\mathbf{q}_{t_2} + \mathbf{q}_{xxx} + 3i(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q}_x)\mathbf{q} + 3i(\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x)\mathbf{q}_x + 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q})(\mathbf{q}_x^t\mathbf{p})\mathbf{q} + 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{q}_x = 0.
\end{aligned}$$

В этом случае уравнение (3.4) является векторной формой уравнения Герджикова — Иванова.

При $\alpha = 1$ эволюционные уравнения (3.2) принимают следующий вид

$$\begin{aligned} i\mathbf{p}_{t_1} - \mathbf{p}_{xx} - 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{p}_x &= 0,\\ i\mathbf{q}_{t_1} + \mathbf{q}_{xx} - 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{q}_x &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{t_2} + \mathbf{p}_{xxx} + 3i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{p}_{xx} + 3i(\mathbf{p}_x\mathbf{q}^t)\mathbf{p}_x - 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{p} &= 0,\\ \mathbf{q}_{t_2} + \mathbf{q}_{xxx} - 3i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{q}_{xx} - 3i(\mathbf{q}_x\mathbf{p}^t)\mathbf{q}_x - 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{q} &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (3.5) является векторным уравнением Чень — Ли — Лью.

Уравнения (3.2) при $\alpha = 2$ имеют вид

$$\begin{aligned} i\mathbf{p}_{t_1} - \mathbf{p}_{xx} - 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{p}_x - 2i(\mathbf{p}\mathbf{q}^t)_x\mathbf{p} &= 0,\\ i\mathbf{q}_{t_1} + \mathbf{q}_{xx} - 2i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{q}_x - 2i(\mathbf{p}\mathbf{q}^t)_x\mathbf{q} &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{t_2} &+ \mathbf{p}_{xxx} + 6i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{p}_{xx} + 3i(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p}_x + 6i(\mathbf{p}_x\mathbf{q}^t)\mathbf{p}_x + 3i(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p}\\ &- 15(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{p}_x - 12(\mathbf{p}^t\mathbf{q})(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x)\mathbf{p} - 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q})(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q})\mathbf{p} = 0,\\ \mathbf{q}_{t_2} &+ \mathbf{q}_{xxx} - 6i(\mathbf{p}^t\mathbf{q})\mathbf{q}_{xx} - 3i(\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x)\mathbf{q}_x - 6i(\mathbf{q}_x\mathbf{p}^t)\mathbf{q}_x - 3i(\mathbf{p}_x^t\mathbf{q}_x)\mathbf{q}\\ &- 15(\mathbf{p}^t\mathbf{q})^2\mathbf{q}_x - 12(\mathbf{p}^t\mathbf{q})(\mathbf{q}^t\mathbf{p}_x)\mathbf{q} - 3(\mathbf{p}^t\mathbf{q})(\mathbf{p}^t\mathbf{q}_x)\mathbf{q} = 0. \end{aligned}$$

Соответственно, уравнение (3.6) является новым вариантом векторного уравнения Каупа — Ньюэлла.

4. Стационарные уравнения

Из уравнения (1.1) кроме рекуррентных соотношений вытекают также стационарные уравнения, которым удовлетворяют многофазные решения:

$$\begin{aligned} \left(i\partial_x V_n^0 + [V_n^0, R + sJ]\right) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(i\partial_x V_{n-k}^0 + [V_{n-k}^0, R + sJ]\right)&\\ + ic_n\partial_x R + c_{n+1}\left(i\partial_x Q + [Q, R + sJ]\right) + [J_n, R] &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left(i\partial_x V_{n-1}^0 + [V_{n-1}^0, R + sJ] + [V_n^0, Q]\right) + \sum_{k=1}^{n-2} c_k \left(i\partial_x V_{n-1-k}^0 + [V_{n-1-k}^0, R + sJ] + [V_{n-k}^0, Q]\right)&\\ + c_{n-1}\left(i\partial_x R + [V_1^0, Q]\right) + c_n\left(i\partial_x Q + s[Q, J]\right) + [J_n, Q] &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку структуры матриц V_k^0 зависят от четности, то скалярные формы стационарных уравнений также зависят от четности. Условия совместности этих двух матричных уравнений приводит к ограничениям на постоянные c_k.

В частности, из рекуррентных уравнений (2.4) вытекают следующие условия вещественности. Если $\mathbf{q} = \sigma\mathbf{p}^*$, где $\sigma = \pm 1$, то

$$\mathbf{G}_k = -\sigma\mathbf{H}_k^*, \quad F_k^* = F_k^t, \quad \mathcal{F}_k^* = \mathcal{F}_k.$$

Эти условия приводят к следующей симметрии матриц $V_k^0(\lambda)$:

$$\left(V_{2k}^0(\lambda)\right)^\dagger = V_{2k}^0(\lambda^*), \quad \left(V_{2k-1}^0(\lambda)\right)^\dagger = -\sigma V_{2k-1}^0(\lambda^*).$$

Здесь $\dagger$ есть эрмитово сопряжение. Заметим также, что выполняются аналогичные соотношения для матриц J, Q, R:

$$J^\dagger = J, \quad Q^\dagger = -\sigma Q, \quad R^\dagger = R.$$

Из данных соотношений симметрии следует, что каждое стационарное уравнение разбивается на две части, каждая из которых преобразуется по своему правилу. Следовательно, одна из этих частей тождественно равна нулю. Нетрудно понять, что это ведет к равенству нулю всех коэффициентов с нечетными индексами. Поэтому $J_{2k-1} = 0$, а матрицы $M_n(\lambda)$ удовлетворяют следующим условиям

$$(M_{2k}(\lambda))^\dagger = M_{2k}(\lambda^*), \quad (M_{2k-1}(\lambda))^\dagger = -\sigma M_{2k-1}(\lambda^*). \tag{4.1}$$

Второй набор стационарных уравнений вытекает из условия постоянства коэффициентов уравнения спектральной кривой. Напомним, что спектральная кривая является характеристическим уравнением матрицы $M_n(\lambda)$:

$$\Gamma: \quad \mathcal{R}(\mu, \lambda) = \det(\mu I - M_n(\lambda)) = 0$$

или

$$\mathcal{R}(\mu, \lambda) = \mu^3 + \mathcal{A}(\lambda)\mu + \mathcal{B}(\lambda) = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\mathcal{A}(\lambda) = -\frac{1}{3}\lambda^{2n+4} - \frac{2c_2}{3}\lambda^{2n+2} + \sum_{k=2}^{n+2} \mathcal{A}_k \lambda^{2n+4-2k},$$
$$\mathcal{B}(\lambda) = \frac{2}{27}\lambda^{3n+6} + \frac{2c_2}{9}\lambda^{3n+4} + \sum_{k\geq 2} \mathcal{B}_k \lambda^{3n+6-2k}.$$

Напомним также, что коэффициенты $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k$ являются дополнительными интегралами многофазных решений. При этом старшие коэффициенты $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k$ при $n \geq 1$ связаны следующими равенствами

$$\mathcal{B}_2 + \frac{1}{3}\mathcal{A}_2 = \frac{1}{9}c_2^2, \quad \mathcal{B}_3 + \frac{1}{3}\mathcal{A}_3 + \frac{1}{3}c_2\mathcal{A}_2 = -\frac{1}{27}c_2^3. \tag{4.3}$$

Из условий (4.3) следует, что дискриминант многочлена $\mathcal{R}(\mu)$ является многочленом от λ степени $6n+4$. Поскольку на кривой (4.2) в общем случае располагаются три различные бесконечно удаленные точки $\mathcal{P}_\infty^{1,2,3}$

$$\mu(\mathcal{P}) = \frac{\lambda^n}{3}\left(-2\lambda^2 - 2c_2 + (3A_2 + c_2^2)\lambda^{-2} + O(\lambda^{-4})\right), \quad \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^1,$$
$$\mu(\mathcal{P}) = \frac{\lambda^n}{3}\left(\lambda^2 + c_2 \pm \sqrt{\frac{26c_2^3}{3}}\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})\right), \quad \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^{2,3},$$

и, соответственно, на Γ отсутствуют бесконечно удаленные точки ветвления, то в общем случае кривая (4.2) имеет $6n+4$ точек ветвления. Используя формулу Римана — Гурвица, получаем что в общем случае род спектральной кривой равен $g = 3n$.

При четных n кривая (4.2) обладает голоморфной инволюцией $\tau_h : (\mu, \lambda) \to (\mu, -\lambda)$. При нечетных n голоморфная инволюция кривой (4.2) имеет вид $\tau_h : (\mu, \lambda) \to (-\mu, -\lambda)$. Из условий (4.1) следует, что спектральная кривая (4.2) обладает антиголоморфной инволюцией:

- $\tau_a : (\mu, \lambda) \to (\mu^*, \lambda^*)$ при четных n;
- $\tau_a : (\mu, \lambda) \to (-\sigma\mu^*, \lambda^*)$ при нечетных n.

5. Случай $n = 1$

При $n = 1$ матрица M имеет вид ($c_1 = 0$ и $J_1 = \mathbf{0}$)

$$M = V_1 + c_2 V_{-1}.$$

Стационарные уравнения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
&\partial_x^2 p_1 + i(c_2 - 2p_1q_1 - p_2q_2 + 2s)\partial_x p_1 - ip_1q_2\partial_x p_2 \\
&\qquad + ((c_2+s)(2p_1q_1 + 2p_2q_2 - s) + is_x)p_1 = 0, \\
&\partial_x^2 p_2 + i(c_2 - p_1q_1 - 2p_2q_2 + 2s)\partial_x p_2 - ip_2q_1\partial_x p_1 \\
&\qquad + ((c_2+s)(2p_1q_1 + 2p_2q_2 - s) + is_x)p_2 = 0, \\
&\partial_x^2 q_1 - i(c_2 - 2p_1q_1 - p_2q_2 + 2s)\partial_x q_1 + ip_2q_1\partial_x q_2 \\
&\qquad + ((c_2+s)(2p_1q_1 + 2p_2q_2 - s) - is_x)q_1 = 0, \\
&\partial_x^2 q_2 - i(c_2 - p_1q_1 - 2p_2q_2 + 2s)\partial_x q_2 + ip_1q_2\partial_x q_1 \\
&\qquad + ((c_2+s)(2p_1q_1 + 2p_2q_2 - s) - is_x)q_2 = 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Следуя [23], [26], [31] сделаем в уравнениях (5.1) замену

$$p_j = \sqrt{u_j}\exp\left\{-\int \frac{w_j}{2u_j}dx\right\}, \quad q_j = \sqrt{u_j}\exp\left\{\int \frac{w_j}{2u_j}dx\right\}, \tag{5.2}$$

где $u_j = p_jq_j$, $w_j = p_j\partial_x q_j - q_j\partial_x p_j$. После упрощения получаем

$$\begin{aligned}
w_1 &= ic_5 + i(c_2 - u_1 - u_2 + 2s)u_1, \\
w_2 &= ic_6 + i(c_2 - u_1 - u_2 + 2s)u_2
\end{aligned} \tag{5.3}$$

и

$$\begin{aligned}
&2u_1\partial_x^2 u_1 - (\partial_x u_1)^2 + (c_2^2 - 2(c_5+c_6) + 4c_2u_2 + 3u_2^2)u_1^2 \\
&\qquad + (4c_2 + 6u_2)u_1^3 + 3u_1^4 - c_5^2, \\
&2u_2\partial_x^2 u_2 - (\partial_x u_2)^2 + (c_2^2 - 2(c_5+c_6) + 4c_2u_1 + 3u_1^2)u_2^2 \\
&\qquad + (4c_2 + 6u_1)u_2^3 + 3u_2^4 - c_6^2.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь c_5 и c_6 являются постоянными интегрирования. Заметим, что уравнения (5.4) не содержат функции s и полностью совпадают с уравнениями (23) из работы [23].

Коэффициенты уравнения спектральной кривой (4.2) в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda) &= -\frac{1}{3}\lambda^6 - \frac{2c_2}{3}\lambda^4 + \mathcal{A}_2\lambda^2 + \mathcal{A}_3, \\
\mathcal{B}(\lambda) &= \frac{2}{27}\lambda^9 + \frac{2c_2}{9}\lambda^7 + \mathcal{B}_2\lambda^5 + \mathcal{B}_3\lambda^3 + \mathcal{B}_4\lambda,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= -\frac{c_2^2 + 3c_5 + 3c_6}{3}, \\
\mathcal{A}_3 &= \frac{(\partial_x u_1)^2}{4u_1} + \frac{(\partial_x u_2)^2}{4u_2} + \frac{1}{4}\left(u_1^3 + u_2^3\right) + \frac{1}{4}(2c_2 + 3u_2)u_1^2 + \frac{1}{4}(2c_2 + 3u_1)u_2^2 \\
&\quad + c_2u_1u_2 + \frac{c_2^2 - 2c_5 - 2c_6}{4}(u_1 + u_2) + \frac{c_5^2}{4u_1} + \frac{c_6^2}{4u_2} - \frac{c_2(c_5+c_6)}{2}, \\
\mathcal{B}_2 &= \frac{2c_2^2 + 3c_5 + 3c_6}{9}, \\
\mathcal{B}_3 &= -\frac{1}{3}\mathcal{A}_3 + \frac{2c_2^3}{27} + \frac{c_2(c_5+c_6)}{3}, \\
\mathcal{B}_4 &= -\frac{c_2}{3}\mathcal{A}_3 - \frac{u_2(\partial_x u_1)^2}{4u_1} - \frac{u_1(\partial_x u_2)^2}{4u_2} + \frac{1}{2}(\partial_x u_1)(\partial_x u_2) \\
&\quad - \frac{c_5^2u_2}{4u_1} - \frac{c_6^2u_1}{4u_2} + \frac{1}{2}c_5c_6.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты (5.5) уравнения спектральной кривой (4.2) также не зависят от функционального параметра s. Следовательно, амплитуды решений векторных форм производного нелинейного уравнения Шрёдингера не зависят от конкретного типа уравнения. Соответственно, от типа уравнения также не зависят коэффициенты уравнений спектральных кривых многофазных решений уравнений (3.6), (3.5) и (3.4). Напомним, что аналогичным свойством обладают решения скалярных форм производного нелинейного уравнения Шрёдингера [28].

Поскольку стационарные уравнения (5.4) переходят одно в другое при замене $u_1 \leftrightarrow u_2$, а коэффициенты (5.5) инвариантны относительно замены $(u_1, c_5) \leftrightarrow (u_2, c_6)$, то перейдем от функций u_1, u_2 к функциям u, v:

$$u = u_1 + u_2, \quad v = u_1 - u_2. \tag{5.6}$$

В новых обозначениях уравнения (5.4) и коэффициенты (5.5) имеют вид [23]:

$$\begin{aligned} &u\partial_x^2 v + v\partial_x^2 u - (\partial_x u)(\partial_x v) + (c_2^2 - 2(c_5 + c_6) + 4c_2 u + 3u^2)uv + c_6^2 - c_5^2 = 0, \\ &2u\partial_x^2 u + 2v\partial_x^2 v - (\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2 + (c_2^2 - 2(c_5 + c_6) + 4c_2 u + 3u^2)(v^2 + u^2) \\ &\qquad - 2(c_5^2 + c_6^2) = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= \frac{1}{4}(u + c_2)(u^2 + c_2 u - 2(c_5 + c_6)) \\ &\quad + \frac{(2(c_5^2 + c_6^2) + (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2)u - 2(c_5^2 - c_6^2 + (\partial_x u)(\partial_x v))v}{4(u^2 - v^2)}, \\ \mathcal{B}_4 &= -\frac{c_2}{3}\mathcal{A}_3 - \frac{((c_5 + c_6)^2 + (\partial_x u)^2)v^2 + ((c_5 - c_6)^2 + (\partial_x v)^2)u^2}{4(u^2 - v^2)} \\ &\quad - \frac{(c_5^2 - c_6^2 + (\partial_x u)(\partial_x v))uv}{2(u^2 - v^2)}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Использование соотношений (5.8) позволяет нам перейти от уравнений (5.7) к следующим равенствам:

$$\partial_x^2 u = -2u^3 - 3c_2 u^2 - (c_2^2 - 2(c_5 + c_6))u + 2\mathcal{A}_3 + c_2(c_5 + c_6) \tag{5.9}$$

и

$$\begin{aligned} 6v\partial_x^2 v - 3(\partial_x v)^2 + 3(c_2^2 - 2(c_5 + c_6) + 4c_2 u + 3u^2)v^2 \\ - 12\mathcal{B}_4 - 4c_2\mathcal{A}_3 - 3(c_5 - c_6)^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Интегрируя (5.9), имеем

$$(\partial_x u)^2 = -u^4 - 2c_2 u^3 - (c_2^2 - 2(c_5 + c_6))u^2 + (4\mathcal{A}_3 + 2c_2(c_5 + c_6))u + c_7, \tag{5.11}$$

где $c_7 \in \mathbb{R}$ есть постоянная интегрирования. Следовательно, $u(x)$ есть эллиптическая функция с простыми полюсами или ее вырождение. Поскольку уравнение (5.11) является автономным дифференциальным уравнением, то зависимость функции u от переменных t_k имеет вид

$$u(x, t_k) = u(x + \phi_1(t_k)).$$

Постоянная $\mathcal{B}_4$ связана с постоянной c_7 с помощью следующего соотношения

$$\mathcal{B}_4 = \frac{1}{4}c_7 + \frac{1}{4}(c_5 + c_6)^2 - \frac{1}{3}c_2\mathcal{A}_3.$$

Следуя [23], сделаем в уравнении (5.10) замену $v = \widehat{v}u$. После упрощения с использованием соотношений (5.7), (5.9), (5.10) и (5.11) имеем следующее дифференциальное уравнение на функцию $\widehat{v}$

$$(\partial_x \widehat{v})^2 = \frac{c_7\widehat{v}^2 + 2(c_5^2 - c_6^2)\widehat{v} - c_7 - 2(c_5^2 + c_6^2)}{u^2}. \tag{5.12}$$

Интегрируя (5.12) при $c_7 \neq 0$, получаем

$$\widehat{v} = \frac{\sqrt{((c_5+c_6)^2-\kappa^2)\,((c_5-c_6)^2-\kappa^2)}}{\kappa^2}\sin(\kappa\theta) + \frac{c_5^2-c_6^2}{\kappa^2}, \tag{5.13}$$

где $\partial_x\theta = \pm u^{-1}$, $\kappa^2 = -c_7$.

При $c_7 = 0$ уравнение (5.12) имеет вид

$$(\partial_x\widehat{v})^2 = \frac{2(c_5^2-c_6^2)\widehat{v} - 2(c_5^2+c_6^2)}{u^2}. \tag{5.14}$$

Интегрируя (5.14) при $c_5^2 \neq c_6^2$, имеем

$$\widehat{v} = \frac{c_5^2+c_6^2}{c_5^2-c_6^2} + (c_5^2-c_6^2)\frac{\theta^2}{2}. \tag{5.15}$$

Из формул (5.13) и (5.15) следует, что зависимость функции $\widehat{v}$ от переменных t_k имеет вид $\widehat{v}(x,t_k) = \widehat{v}(\theta(x,t_k))$, где $\theta(x,t_k) = \theta(x+\phi_1(t_k)) + \phi_2(t_k)$.

Поскольку дискриминант многочлена $\mathcal{R}(\mu)$ при $n=1$ равен

$$-c_7\lambda^{10} - (2\mathcal{A}_3(c_5+c_6) + c_2(c_5+c_6)^2 + 3c_2c_7)\lambda^8 + \ldots,$$

то при $c_7 \neq 0$ род спектральной кривой равен $g=3$. Это утверждение является верным, если кривая является связной и невырожденной. Т.е. при $c_7 \neq 0$ спектральная кривая имеет род $g=3$ (или является вырождением кривой рода $g=3$) и, в тоже самое время, соответствующее решение является двухфазным. Первая фаза содержит $\phi_1(t_k)$, а вторая — $\phi_2(t_k)$.

Поскольку при $c_7 = 0$ дискриминат равен

$$-(2\mathcal{A}_3 + c_2(c_5+c_6))(c_5+c_6)\lambda^8 + \ldots,$$

то при $\mathcal{A}_3 \neq -c_2(c_5+c_6)/2$ спектральная кривая имеет род $g=2$ (или является вырождением кривой рода $g=2$). Заметим, что при $c_7=0$ выполняется условие $c_6^2 \neq c_5^2$, поскольку в противном случае уравнение (5.14) не имеет вещественных решений. Или же можно сказать, что при $c_6^2 = c_5^2$ выполняется условие $c_7 \neq 0$. Из формулы (5.15) следует, что при $c_7 = 0$ возникает нелинейный «резонанс», когда периодические колебания функции $\widehat{v}$ трансформируются в её квадратичный рост.

При $c_7 = 0$ и $\mathcal{A}_3 = -c_2(c_5+c_6)/2$ уравнение (5.11) имеет вид

$$(\partial_x u)^2 = u^2(2(c_5+c_6) - (u+c_2)^2).$$

Т.е. в этом случае функция u выражается через элементарные функции

$$u = \frac{a}{\cosh(ax+\phi_1(t))}, \quad a = \sqrt{2(c_5+c_6-c_2) - c_2^2}.$$

При этом род соответствующей спектральной кривой равен $g=1$.

Таким образом, процедура построения простейших нетривиальных решений векторных производных форм нелинейного уравнения Шрёдингера состоит из следующих этапов

- Выбираем функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению (5.11), и постоянные c_2, c_5, c_6, c_7 и $\mathcal{A}_3$.
- По функции $u(x)$ и постоянным, используя формулу (5.13), находим функции $\theta(x)$ и $\widehat{v}(x)$.
- Если $c_7 = 0$, то функцию $\widehat{v}$ находим из уравнения (5.15).
- Зная функции $u(x)$ и $\widehat{v}(x)$, находим функцию $v(x) = \widehat{v}(x)u(x)$.
- Затем, используя формулу (5.6), получаем функции

$$u_1 = \frac{1}{2}(u+v) = \frac{1}{2}(1+\widehat{v})u, \quad u_2 = \frac{1}{2}(u-v) = \frac{1}{2}(1-\widehat{v})u.$$

- Далее по формуле (5.3) находим $w_1(x)$ и $w_2(x)$. Только в этот момент появляются различия в решениях разных вариантов векторных производных форм нелинейного уравнения Шрёдингера.
- Затем по формулам (5.2) находим $p_j(x)$ и $q_j(x)$. При этом в аргументах экспонент у функций p_j и q_j после вычисления интегралов появляются дополнительные слагаемые, зависящие от переменных t_k.
- Конкретные значения функций $\phi_m(t_k)$ находятся из уравнений (3.2).

Примеры простейших нетривиальных решений векторного производного нелинейного уравнения Шрёдингера при $s = 0$ приведены в работе [23]. Вместе с тем решения, соответствующие $n = 1$, имеют общие свойства, которые не зависят от вида решения. В частности, как нами было получено выше, спектральная кривая задается уравнениями (4.2), (5.5), где

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= -\frac{c_2^2 + 3(c_5 + c_6)}{3},\\
\mathcal{B}_2 &= \frac{2c_2^2 + 3(c_5 + c_6)}{9},\\
\mathcal{B}_3 &= -\frac{1}{3}\mathcal{A}_3 + \frac{2c_2^3}{27} + \frac{c_2(c_5 + c_6)}{3},\\
\mathcal{B}_4 &= \frac{1}{4}c_7 + \frac{1}{4}(c_5 + c_6)^2 - \frac{1}{3}c_2\mathcal{A}_3.
\end{aligned}$$

Т.е. при $= 1$ уравнение спектральной кривой зависит от постоянных $\mathcal{A}_3, c_2, c_7$ и (c_5+c_6). Из уравнения (5.11) вытекает, что от этих же постоянных зависит и уравнение на функцию $u(x)$. Заметим, что эти постоянные находятся однозначно из уравнения (5.11). Отметим также, что пять коэффициентов уравнения спектральной кривой определяются этими четырьмя постоянными и, соответственно, как нетрудно проверить, связаны уравнением

$$\mathcal{A}_3 + 3\mathcal{B}_3 + (4\mathcal{A}_2 + 3\mathcal{B}_2)\sqrt{\frac{1}{3}\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2} = 0. \tag{5.16}$$

Т.е. решениям стационарных уравнений (5.1) соответствуют не все кривые вида (4.2), (5.5), а только те, коэффициенты которых удовлетворяют условию (5.16).

Напомним, что в работе [23] мы указывали на возможность геометрического подхода к анализу простейших нетривиальных решений векторных уравнений. Геометрическая интерпретация заключается в следующем. Пусть

$$p_1 = |\mathbf{p}|\, e^{i\alpha_1}\cos(\phi), \quad p_2 = |\mathbf{p}|\, e^{i\alpha_2}\sin(\phi)$$

и $\mathbf{q} = \sigma\mathbf{p}^*$, где $\sigma = \pm 1$. Тогда имеем

$$u_1 = p_1 q_1 = \sigma\,|\mathbf{p}|^2\cos^2(\phi), \quad u_2 = p_2 q_2 = \sigma\,|\mathbf{p}|^2\sin^2(\phi)$$

и

$$\begin{aligned}
u &= u_1 + u_2 = \sigma\,|\mathbf{p}|^2\,,\\
v &= u_1 - u_2 = \sigma\,|\mathbf{p}|^2\cos(2\phi),\\
\widehat{v} &= v/u = \cos(2\phi) \le 1.
\end{aligned}$$

Если же редукция имеет вид

$$q_1 = \sigma p_1^*, \quad q_2 = -\sigma p_2^*, \tag{5.17}$$

то «угол» ϕ становится чисто мнимым $\phi = i\widehat{\phi}$, где $\widehat{\phi} \in \mathbb{R}$. Т.е. «ориентация» вектора $\mathbf{p}$ определяется функцией $\widehat{v} = \cosh(2\widehat{\phi}) \ge 1$. Таким образом, если $\widehat{v} < 1$, то решение удовлетворяет редукции $\mathbf{q} = \sigma\mathbf{p}^*$. Если $\widehat{v} > 1$, то редукция решения удовлетворяет соотношению

(5.17). При $\widehat{v} = 1$ вторая компонента вектора $\mathbf{p}$ отсутствует ($u_2 = 0$). Знак редукции σ определяется знаком u:

$$\sigma = \mathrm{sign}(u).$$

Таким образом, при $n = 1$ уравнения на спектральную кривую и на длину вектора определяются одними и теми же постоянными. Следовательно, по уравнению спектральной кривой можно однозначно определить уравнение, которому удовлетворяет длина вектора решения. В то же время, как следует из уравнения (5.13), направление вектора зависит от длины вектора и от постоянных c_7, $(c_5 + c_6)$, $(c_5 - c_6)$. Следовательно, в случае $n = 1$ направление вектора решения зависит от дополнительного параметра $(c_5 - c_6)$, который нельзя определить по уравнению спектральной кривой. Из уравнения (5.13) следует, что при $c_7 \neq 0$ вектор решения колеблется вокруг направления, задающегося равенством

$$\cos(2\phi_0) = \widehat{v}_0 = -\frac{(c_5 - c_6)(c_5 + c_6)}{c_7}.$$

Т.е. параметр $c_5 - c_6$ определяет направление, вокруг которого происходит колебание вектора решения.

Иногда решения векторных уравнений строят по решениям скалярных уравнений по правилу $p_2 = mp_1$, $q_2 = \pm m^* q_1$. Знак '$-$' соответствует редукции (5.17). В этом случае

$$u_2 = \pm |m|^2 u_1 \quad \text{и} \quad \widehat{v} = \frac{1 \mp |m^2|}{1 \pm |m^2|} = const.$$

Из уравнения (5.13) следует, что при $c_7 \neq 0$ функция $\widehat{v}$ является постоянной в одном из двух случаев:

$$c_7 = -(c_5 + c_6)^2 \quad \text{и} \quad c_7 = -(c_5 - c_6)^2.$$

Если $c_7 = -(c_5 + c_6)^2$, то уравнение спектральной кривой имеет вид

$$\left(\mu - \frac{1}{3}\lambda^3 - \frac{1}{3}c_2\lambda\right)\left(\mu^2 + \left(\frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{3}c_2\lambda\right)\mu \right.$$
$$\left. - \frac{2}{9}\lambda^6 - \frac{4}{9}c_2\lambda^4 - \frac{1}{9}(c_2^2 + 9(c_5 + c_6))\lambda^2 + \mathcal{A}_3\right) = 0.$$

Т.е. в этом случае спектральная кривая распадается на две компоненты, одна из которых является рациональной кривой. Род второй компоненты равен 2. В этом случае направление вектора решения определяется уравнением

$$\widehat{v} = \widehat{v}_0 = \frac{c_5 - c_6}{c_5 + c_6} \quad \text{или} \quad \frac{c_6}{c_5} = \pm |m|^2.$$

Длина вектора решения в этом случае может быть как эллиптической функцией, так и ее вырождением.

Если $c_7 = -(c_5 - c_6)^2$, то спектральная кривая при $c_5 \neq c_6$ является кривой рода 3 или ее вырождением. По-видимому, это связано с тем, что уравнение спектральной кривой не зависит от параметра $(c_5 - c_6)$. Длина вектора решения в этом случае также может быть как эллиптической функцией, так и ее вырождением, а направление определяется равенством

$$\widehat{v} = \widehat{v}_0 = \frac{c_5 + c_6}{c_5 - c_6} \quad \text{или} \quad \frac{c_6}{c_5} = \mp |m|^2.$$

Т.е., в отличие от системы Манакова [1] и векторного уравнения Кунду — Экхауса [26], построение решений векторных уравнений по решениям их скалярных аналогов не всегда приводит к распаду спектральной кривой на отдельные компоненты.

В заключение данного раздела отметим, что при $c_7 = 0$ у вектора решения пропадают зависящие от $\phi_2(t_k)$ колебания его направления, поскольку в этом случае ориентация вектора решения определяется формулой (5.15).

6. Динамика многофазных решений

Теперь естественным образом встает вопрос, насколько общим является геометрический подход. Можно ли его применить к более сложным решениям? В данном разделе мы постараемся ответить на этот вопрос.

Рассмотрим вместо соотношений (5.2) следующие равенства

$$p_j(x,t) = \sqrt{u_j(x,t)}e^{i\alpha_j(x,t)}, \quad q_j(x,t) = \sqrt{u_j(x,t)}e^{-i\alpha_j(x,t)}. \tag{6.1}$$

После подстановки выражений (6.1) в уравнения (3.2) при $t = t_1$ и после упрощения (без использования стационарных уравнений) имеем

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} u &= \partial_x((2s-u)u + iw), \\ \partial_{t_1}\widehat{v} &= 2s\partial_x\widehat{v} - \frac{i\partial_x w}{u}\widehat{v} + i\frac{\partial_x\widehat{w}}{u}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь

$$w = w_1 + w_2, \quad \widehat{w} = w_1 - w_2.$$

Из соотношений (5.2) следует, что $\partial_x\alpha_j = iw_j/(2u_j)$. Выражения для $\partial_{t_1}\alpha_j$ имеют очень громоздкий вид. Поэтому мы их опустим.

В случае $s = \alpha(\mathbf{p}^t\mathbf{q}) = \alpha u$ (векторные производные уравнения НШ) уравнения (6.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} u &= \partial_x((2\alpha-1)u^2 + iw), \\ \partial_{t_1}\widehat{v} &= 2\alpha u\partial_x\widehat{v} - \frac{i\partial_x w}{u}\widehat{v} + \frac{\partial_x\widehat{w}}{u}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Т.е. динамика длины вектора определяется самой длиной вектора и дополнительной функцией w, сложность которой возрастает с номером n. Вместе с тем, направление вектора зависит от самого направления, длины вектора и дополнительных функций w и $\widehat{w}$.

При $n = 1$ из уравнений (5.3) вытекают следующие равенства

$$\begin{aligned} w &= i(c_5 + c_6) + i(c_2 + (2\alpha-1)u)u, \\ \widehat{w} &= i(c_5 - c_6) + i(c_2 + (2\alpha-1)u)\widehat{v}u. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Следовательно, при $n = 1$ уравнения (6.3) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} u &= -c_2\partial_x u, \\ \partial_{t_1}\widehat{v} &= (u - c_2)\partial_x\widehat{v}. \end{aligned}$$

Т.е., при $n = 1$ длина вектора каждого решения любого векторного производного уравнения НШ зависит от аргумента $(x - c_2 t_1)$. Вместе с тем, его ориентация меняется более сложным образом.

В случае $t = t_2$ динамика длины решения описывается следующей формулой

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} u =& \partial_x\left((3s^2 - 2u^2)u + 3isw + \frac{3(w^2 - 2w\widehat{w}\widehat{v} + \widehat{w}^2)}{4u(\widehat{v}^2 - 1)}\right. \\ &\left. + \frac{3(\partial_x u)^2}{4u} + \frac{3u(\partial_x\widehat{v})^2}{4(1-\widehat{v}^2)} - \partial_x^2 u\right). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Т.е., если эволюция вектора задается вторым уравнением иерархии, то эволюция длины вектора зависит, в том числе, от его направления. Однако, поскольку при $n = 1$ направление вектора зависит от его длины, то эволюция вектора решения в случае $n = 1$ также принимает достаточно простой вид

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} u &= (c_2^2 - 2(c_5 + c_6))\partial_x u, \\ \partial_{t_2}\widehat{v} &= (c_2^2 - 2(c_5 + c_6) - 2c_2 u)\partial_x\widehat{v}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n = 1$ и $t = t_2$ длина вектора решения также зависит от аргумента в виде линейной комбинации переменных $(x + (c_2^2 - 2(c_5 + c_6))t_2)$. Эволюция ориентации решения снова определяется более сложным образом. При упрощении уравнений эволюции были использованы соотношения (5.9), (5.11), (5.12) и (6.4).

7. Заключительные замечания

Упрощение уравнений (6.2) и (6.5) при $n = 1$ указывает, что если для других значений n функции w, $\widehat{v}$ и $\widehat{v}$ будут, как и в случае $n = 1$, выражаться только через функцию u, то эволюция длины вектора решения также будет зависеть только от самой длины и не будет зависеть от ориентации решения. Тогда геометрическая интерпретация решения будет иметь смысл не только в случае $n = 1$. Рассмотрение случая $n = 2$ позволит частично ответить на этот вопрос. Отметим, что случай $n = 2$ интересен также тем, что матрица мондромии, стационарные уравнения и уравнение спектральной кривой будут в этом случае обладать другими симметриями. Увеличение при $n = 2$ рода спектральной кривой до $g = 6$ и появление элементов матрицы J_2 в стационарных уравнениях могут внести дополнительные варианты поведения вектора решения.

Отметим также, что в настоящей работе не рассматривалась подробно зависимость компонент вектора решений от функции s. Это связано с тем, что из уравнений (5.2) и (5.3) следует, что эта зависимость имеет достаточно простой вид

$$p_j(s) = p_j(0) \exp\left\{-i \int s(x)dx\right\}, \quad q_j(s) = q_j(0) \exp\left\{i \int s(x)dx\right\}. \tag{7.1}$$

Формула (7.1) указывает на правильную интерпретацию уравнений (3.4)–(3.6) как векторных производных форм нелинейного уравнения Шрёдингера, поскольку, как и в скалярном случае (см., например, [32]– [35]), существует калибровочное преобразование вида (7.1), переводящее одно уравнение в другое с сохранением амплитуды решения.

Отметим, что от функции s достаточно сильно зависят вещественная и мнимая части компонент решения. А поскольку информация по оптическим каналам передается с помощью комплексных кодов (см., например, [36]), то выбор уравнения, соответствующего данному конкретному волноводу, является очень важным.

Благодарности

А.О. Смирнов благодарит организаторов конференции «Спектральная теория, нелинейные задачи и приложения» (Репино, 9–10 декабря 2023) за возможность ознакомиться с проблемами, которые требуется решать для корректной передачи информации по оптическим волноводам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.O. Smirnov, V.S. Gerdjikov, V.B. Matveev. *From generalized Fourier transforms to spectral curves for the Manakov hierarchy. II. Spectral curves for the Manakov hierarchy* // Eur. Phys. J. Plus. **135**:561, 20 pp. (2020).
2. G. Zhang, L. Ling, Zh. Yan. *Multi-component nonlinear Schrödinger equations with nonzero boundary conditions: Higher-order vector Peregrine solitons and asymptotic estimates* // J. Nonlinear Sci. **31**:81, 52 p. (2021).
3. J. Pu, Y. Chen. *Data-driven vector localized waves and parameters discovery for Manakov system using deep learning approach* // Chaos, Solitons & Fractals. **160**, 112182 (2022).
4. D. Sinha. *Integrable local and non-local vector non-linear Schrödinger equation with balanced loss and gain* // Phys. Lett. A. **448**, 128338, 7 p. (2022).
5. A. Gelash, A. Raskovalov. *Vector breathers in the Manakov system* // Stud. Appl. Math. **150**:3, 841–882 (2023).

6. G. Zhang, P. Huang, B.-F. Feng, C. Wu. *Rogue waves and their patterns in the vector nonlinear Schrödinger equation* // J. Nonlinear Sci. **33**:116, 64 p. (2023).
7. S. Ghosh, P.K. Ghosh. *Solvable limits of a class of generalized vector nonlocal nonlinear Schrödinger equation with balanced loss-gain* // Phys. Scr. **98**:11, 115214 (2023).
8. D. Snee, Y.-P. Ma. *Domain walls and vector solitons in the coupled nonlinear Schrödinger equation* // J. Phys. A, Math. Theor. **57**:3, 035702, 25 p. (2024).
9. J.-V. Goossens, M.I. Yousefi, Y. Jaouën, H. Haffermann. *Polarization-Division Multiplexing Based on the Nonlinear Fourier Transform* // Opt. Express. **25**:22, 26437–26452 (2017).
10. S. Gaiarin, A.M. Perego, E.P. da Silva, F. Da Ros, D. Zibar. *Dual polarization nonlinear Fourier transform-based optical communication system* // Optica. **5**:3, 263–270 (2018).
11. S. Civelli, S.K. Turitsyn, M. Secondini, J.E. Prilepsky. *Polarization-multiplexed nonlinear inverse synthesis with standard and reduced-complexity NFT processing* // Opt. Express. **26**:13, 17360–17377 (2018).
12. S. Gaiarin, A.M. Perego, E.P. da Silva, F. Da Ros, D. Zibar. *Experimental demonstration of nonlinear frequency division multiplexing transmission with neural network receiver* // Journal of Lightwave Technology. **38**:23, 6465–6473 (2020).
13. B.J. Puttnam, G. Rademacher, R.S. Luis. *Space-division multiplexing for optical fiber communications* // Optica. **8**:9, 1186–1203 (2021).
14. H.C. Morris, R.K. Dodd. *The two component derivative nonlinear Schrödinger equation* // Phys. Scr. **20**:3-4, 505–508 (1979).
15. A. Fordy. *Derivative nonlinear Schrödinger equations and Hermitian symmetric spaces* // J. Phys. A. **17**, 1235–1245 (1984).
16. T. Tsuchida, M. Wadati. *New integrable systems of derivative nonlinear Schrödinger equations with multiple components* // Phys. Lett., A **257**:1-2, 53–64 (1999).
17. T. Xu, B. Tian, C. Zhang, X.-H. Meng, X. Lu. *Alfvén solitons in the coupled derivative nonlinear Schrödinger system with symbolic computation* // J. Phys. A, Math. Theor. **42**:41, 415201, 14 p. (2009).
18. L. Ling, Q.P. Liu. *Darboux transformation for a two-component derivative nonlinear Schrödinger equation* // J. Phys. A, Math. Theor. **43**:43, 434023, 11 p. (2010).
19. B.L. Guo, L.M. Ling. *Riemann–Hilbert approach and N-soliton formula for coupled derivative Schrödinger equation* // J. Math. Phys. **53**:7, 073506, 20 p. (2012).
20. H.N. Chan, B.A. Malomed, K.W. Chow, E. Ding. *Rogue waves for a system of coupled derivative nonlinear Schrödinger equations* // Phys. Rev. E **93**:1, 012217, 10 p. (2016).
21. L. Guo, L. Wang, Y. Cheng, J. He. *Higher-order rogue waves and modulation instability of the two-component derivative nonlinear Schrödinger equation* // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **79**, 104915, 20 p. (2019).
22. J. Wu. *Integrability aspects and multi-soliton solutions of a new coupled Gerdjikov–Ivanov derivative nonlinear Schrödinger equation* // Nonlinear Dyn. **96**:1, 789–800 (2019).
23. A.O. Smirnov, E.A. Frolov, L.L. Dmitrieva. *On a hierarchy of vector derivative nonlinear Schrödinger equations* // Symmetry. **16**:1, 60 (2024).
24. A. Kundu. *Landau-Lifshitz and higher-order nonlinear systems gauge generated from nonlinear Schrödinger-type equations* // J. Math. Phys. **25**:12, 3433–3438 (1984).
25. A. Kundu. *Integrable Hierarchy of Higher Nonlinear Schrödinger Type Equations* // SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **2**, 078, 12 p. (2006).
26. A.O. Smirnov, A.A. Caplieva. *Vector form of Kundu-Eckhaus equation and its simplest solutions* // Уфим. мат. ж. **15**:3, 151–166 (2023).
27. Б.А. Дубровин. *Матричные конечнозонные операторы* // Итоги науки тех. Сер. Соврем. пробл. мат. **23**, 33–78 (1983).
28. A.O. Smirnov. *Spectral curves for the derivative nonlinear Schrödinger equations* // Symmetry. **13**:7, 1203, 18 p. (2021).
29. D. Rajeswari, A.S. Raja, S. Selvendran. *Design and analysis of polarization splitter based on dual-core photonic crystal fiber* // Optik. **144**, 15–21 (2017).

30. N. Chen, X. Ding, L. Wang, Y. Xiao, W. Guo, Y. Huang, L. Guo. *Broadband Polarization Beam Splitter Based on Silicon Dual-Core Photonic Crystal Fiber with Gold Layers Operating in Mid-Infrared Band* // Plasmonics **19**, 1939–1949 (2024).
31. A.O. Smirnov, E.A. Frolov. *On a method for constructing solutions to equations of nonlinear optics*. In: *Wave Electronics and Its Application in Information and Telecommunication Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), St. Petersburg, 448–451 (2022).
32. M. Wadati, K. Sogo. *Gauge transformations in soliton theory* // J. Phys. Soc. Jpn. **52**, 394–398 (1983).
33. A. Kundu. *Exact solutions to higher-order nonlinear equations through gauge transformation* // Physica D **25**, 399–406 (1987).
34. T. Tsuchida, M. Wadati. *Complete integrability of derivative nonlinear Schrödinger-type equations* // Inverse Probl. **15**:5, 1363–1373 (1999).
35. B. Yang, J. Chen, J. Yang. *Rogue Waves in the Generalized Derivative Nonlinear Schrödinger Equations* // J. Nonlinear Sci. **30**:6, 3027–3056 (2020).
36. А.Л. Делицын. *Быстрые алгоритмы решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений Захарова-Шабата и их приложения* // Мат. заметки **112**:2, 198–217 (2022).

Александр Олегович Смирнов,
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
Большая Морская ул., 67А,
1900000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alsmir@guap.ru

Степан Дмитриевич Шиловский,
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
Большая Морская ул., 67А,
1900000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ssshilosss@mail.ru