ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 3 (2024). С. 78-87.

УДК 517.444

К ВОПРОСУ О ВЛОЖЕНИИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМ ЯДРОМ

В.В НАПАЛКОВ, А.А. НУЯТОВ

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия вложения одного гильбертова пространства с воспроизводящим ядром (RKHS) в другое RKHS. Настоящая статья является продолжением работ авторов, в которых изучалась задача о совпадении или эквивалентности двух RKHS. Важную роль играет условие согласования двух полных систем функций с некоторым линейным непрерывным оператором, введенное авторами ранее. Полученные результаты иллюстрируются на конкретных примерах.

Ключевые слова: гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром, задача описания сопряженного пространства, ортоподобные системы разложения, пространства Бергмана.

Mathematics Subject Classification: 46E22, 30H05, 32A38, 47B32

1. Введение

Во многих задачах комплексного анализа часто возникает вопрос: будет ли данное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром (RKHS) содержаться в более широком RKHS? К изучению RKHS сводятся также многие задачи теории вероятности, математической статистики, численных методов, уравнений в частных производных и др. (см., например, [1], [2]).

Мы исследуем следующий вопрос: пусть даны два RKHS пространства H_1 и H_2, состоящие из функций, заданных на некотором множестве точек $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Какие условия гарантируют вложение $H_1 \subset H_2$? Мы рассмотрим эту задачу в эквивалентной постановке (см. [3], [4]). Пусть H — RKHS пространство, состоящее из функций, заданных на множестве точек $\Omega \subset \mathbb{C}^m$, $m \in \mathbb{N}$, т.е. для произвольной точки $\xi \in \Omega$ функционал δ_ξ, ставящий в соответствие любой функции $f \in H$ значение функции f в точке $\xi \in \Omega$, является линейным и непрерывным функционалом над H. Предположим, что $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ — некоторые полные системы функций в H; $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (e_1(\cdot,z), f)_H \quad \forall z \in \Omega_1, \quad \widetilde{H} = \{\widetilde{f},\ f \in H\},\\
&(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_H, \quad \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}} = \|f_1\|_H \quad \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}, \qquad (1.1)\\
&\widehat{f}(z) \overset{def}{=} (e_2(\cdot,z), f)_H \, \forall z \in \Omega_1, \quad \widehat{H} = \{\widehat{f},\ f \in H\},\\
&(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)_{\widehat{H}} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_H, \quad \|\widehat{f}_1\|_{\widehat{H}} = \|f_1\|_H \quad \forall \widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in \widehat{H}. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Необходимо найти условие, при выполнении которого пространства $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ обладают свойством: $\widehat{H} \subset \widetilde{H}$, т.е. $\widehat{H}$ как множество функций содержится в $\widetilde{H}$, и найдется постоянная

V.V. Napalkov (jr.), A.A. Nuyatov, To question on embedding of reproducing kernel Hilbert spaces.

Поступила 27 декабря 2023 г.

$C > 0$ такая, что
$$\|h\|_{\widetilde{H}} \le C\|h\|_{\widehat{H}} \quad \forall h \in \widehat{H}.$$
Следует отметить, что вопрос о вложении одного RKHS в другое RKHS рассматривался и ранее в связи с приложениями в теории вероятностей и математической статистике (см., например, [1, p. 30]). В работах Ylvisaker ([5, Theorem 2.4]), Driscoll ([6, Theorem 1]) исследована эта задача. Теорема 2.2, приведенная в этой публикации, является обобщением результатов этих авторов. Настоящая статья является продолжением работ авторов [3], [4], [7] в которых изучалась задача о совпадении или эквивалентности двух RKHS. Также в этой статье изучено условие согласования для случая вложения одного RKHS в другое RKHS. Как оказалось, результаты связанные с условием согласования не переносятся просто со случая эквивалентности RKHS на случай вложения RKHS (см. теорему 2.3, теорему 2.4, пример 1, пример 2 этой работы) Полученные в статье результаты проиллюстрированы на конкретных примерах весовых пространств Бергмана в круге.

2. Основные результаты

Пусть H — RKHS пространство, $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ — некоторые полные системы функций в H, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Пространства $\widetilde{H}$, $\widehat{H}$ определены как в (1.1), (1.2). Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Для того, чтобы $\widehat{H} \subset \widetilde{H}$ необходимо и достаточно существование линейного непрерывного оператора $A\colon H \to H$ такого, что*
$$A\colon e_1(\cdot,z) \mapsto e_2(\cdot,z) \quad \forall z \in \Omega_1.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\widehat{H} \subset \widetilde{H}$. Для $\widehat{f} \in \widehat{H}$ имеем
$$\widehat{f}(z) = (e_2(\cdot,z), f)_H \quad \forall z \in \Omega_1. \tag{2.1}$$
С другой стороны, поскольку $\widehat{H} \subset \widetilde{H}$, найдется функция $g_f \in H$ такая, что выполнено равенство
$$\widehat{f}(z) = (e_1(\cdot,z), g_f)_H = \widetilde{g}_f(z) \quad \forall z \in \Omega_1. \tag{2.2}$$
Если $\widehat{f}$ «пробегает» всё пространство $\widehat{H}$, то f «пробегает» всё пространство H. Определим оператор B следующим правилом:
$$B\colon f \mapsto g_f.$$
Нетрудно показать, что B линейный оператор. Выражение (2.2) означает, что
$$\widehat{f}(z) = \widetilde{g}_f(z) = \widetilde{Bf}(z) \quad \forall z \in \Omega_1, \quad \forall f \in H. \tag{2.3}$$
Далее, B — ограниченный оператор. Действительно, из равенств (2.2), (2.3) при условии $\widehat{H} \subset \widetilde{H}$ вытекает
$$\|Bf\|_H = \left\|\widetilde{Bf}\right\|_{\widetilde{H}} = \|\widehat{f}\|_{\widetilde{H}} \le C \cdot \|\widehat{f}\|_{\widehat{H}} = C \cdot \|f\|_H.$$
Последнее означает ограниченность оператора B.

Для любой $f \in H$, $\forall z \in \Omega_1$
$$\widehat{f}(z) = (e_1(\cdot,z), Bf)_H = (B^*e_1(\cdot,z), f)_H, \tag{2.4}$$
где B^* — оператор сопряженный к оператору B. Вычитая из (2.1) равенство (2.4), получим
$$0 \equiv (e_2(\cdot,z) - B^*e_1(\cdot,z), f)_H \quad \forall f \in H, \quad \forall z \in \Omega_1$$
и
$$B^*e_1(\cdot,z) = e_2(\cdot,z) \quad \forall z \in \Omega_1.$$
Положим $A = B^*$. Мы построили оператор $A\colon H \to H$, $A\colon e_1(\cdot,z) \mapsto e_2(\cdot,z)$ $\forall z \in \Omega_1$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что существует оператор A такой, что

$$A\colon e_1(\cdot,z) \mapsto e_2(\cdot,z) \quad \forall z \in \Omega_1.$$

Из соотношения

$$\widehat{f}(z) = (e_2(\cdot,z), f)_H = (Ae_1(\cdot,z), f)_H = (e_1(\cdot,z), A^*f)_H \quad \forall f \in H$$

вытекает, что если $\widehat{f} \in \widehat{H}$, то $\widehat{f} \in \widetilde{H}$. Также справедлива оценка (используются определения норм в пространствах $\widetilde{H}$, $\widehat{H}$)

$$\|\widehat{f}\|_{\widetilde{H}} = \|A^*f\|_H \le C\|f\|_H = C\|\widehat{f}\|_{\widehat{H}} \quad \forall f \in H,$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Таким образом, $\widehat{H} \subset \widetilde{H}$. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Пусть H_1 — RKHS пространство, состоящее из функций, заданных на множестве точек $\Omega_0^1 \subset \mathbb{C}^r$, $r \in \mathbb{N}$, при этом система функций $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ принадлежит пространству H_1 и полна в нем. Далее, пусть H_2 — RKHS пространство, состоящее из функций заданных на множестве точек $\Omega_0^2 \subset \mathbb{C}^s$, $s \in \mathbb{N}$, при этом система функций $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ принадлежит пространству H_2 и полна в нем. Определим пространства $\widetilde{H}_1$ и $\widehat{H}_2$:

$$\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (e_1(\cdot,z), f)_{H_1} \quad \forall z \in \Omega_1, \quad \widetilde{H}_1 = \{\widetilde{f},\, f \in H_1\},$$

$$(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}_1} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_{H_1}, \quad \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}_1} = \|f_1\|_{H_1} \quad \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}_1, \tag{2.5}$$

$$\widehat{g}(z) \overset{def}{=} (e_2(\cdot,z), g)_{H_2} \quad \forall z \in \Omega_1, \quad \widehat{H}_2 = \{\widehat{g},\, g \in H_2\},$$

$$(\widehat{g}_1, \widehat{g}_2)_{\widehat{H}_2} \overset{def}{=} (g_2, g_1)_{H_2}, \quad \|\widehat{g}_1\|_{\widehat{H}_2} = \|g_1\|_{H_2} \quad \forall \widehat{g}_1, \widehat{g}_2 \in \widehat{H}_2. \tag{2.6}$$

Справедлива следующая теорема, которая обобщает теорему 2.1.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы $\widehat{H}_2 \subset \widetilde{H}_1$ необходимо и достаточно существование линейного ограниченного оператора A, действующего из H_1 в H_2, и такого, что*

$$A\colon e_1(\cdot,\xi) \mapsto e_2(\cdot,\xi) \quad \forall \xi \in \Omega_1. \tag{2.7}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\widehat{H}_2 \subset \widetilde{H}_1$. Для $\widehat{g} \in \widehat{H}_2$ имеем

$$\widehat{g}(z) = (e_2(\cdot,z), g)_{H_2} \quad \forall z \in \Omega_1. \tag{2.8}$$

Если $\widehat{g}$ «пробегает» всё пространство $\widehat{H}_2$, то g «пробегает» всё пространство H_2. С другой стороны, поскольку $\widehat{H}_2 \subset \widetilde{H}_1$, найдется $h_g \in H_1$ такая, что выполнено равенство

$$\widehat{g}(z) = (e_1(\cdot,z), h_g)_{H_1} = \widetilde{h}_g(z) \quad \forall z \in \Omega_1. \tag{2.9}$$

Определим оператор B следующим правилом:

$$B\colon g \mapsto h_g.$$

Нетрудно показать, что $B\colon H_2 \longrightarrow H_1$ — линейный оператор. Выражение (2.9) означает, что

$$\widehat{g}(z) = \widetilde{h}_g(z) = \widetilde{Bg}(z) \quad \forall z \in \Omega_1. \tag{2.10}$$

Далее B — ограниченный оператор. Действительно, из равенств (2.9), (2.10) при условии $\widehat{H}_2 \subset \widetilde{H}_1$ вытекает

$$\|Bg\|_{H_1} = \|\widetilde{Bg}\|_{\widetilde{H}_1} = \|\widehat{g}\|_{\widetilde{H}_1} \le C \cdot \|\widehat{g}\|_{\widehat{H}_2} = C \cdot \|g\|_{H_2} \quad \forall g \in H_2.$$

Последнее означает ограниченность оператора B. Для любой $g \in H_2$, $\forall z \in \Omega_1$

$$\widehat{g}(z) = (e_1(\cdot,z), Bg)_{H_1} = (B^*e_1(\cdot,z), g)_{H_2}. \tag{2.11}$$

Здесь $B^*\colon H_1 \longrightarrow H_2$ — оператор сопряженный к оператору B. Вычитая из (2.8) равенство (2.11), получим

$$0 \equiv (e_2(\cdot, z) - B^* e_1(\cdot, z), g)_{H_2} \quad \forall g \in H_2, \forall z \in \Omega_1$$

и

$$B^* e_1(\cdot, z) = e_2(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_1.$$

Положим $A = B^*$. Мы построили оператор $A\colon H_1 \longrightarrow H_2$ такой, что $A\colon e_1(\cdot, z) \longrightarrow e_2(\cdot, z)$ $\forall z \in \Omega_1$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что существует оператор $A\colon H_1 \longrightarrow H_2$ такой, что

$$A\colon e_1(\cdot, z) \mapsto e_2(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_1.$$

Тогда оператор A^* действует из пространства H_2 в пространство H_1, и выполняется соотношение

$$\widehat{g}(z) = (e_2(\cdot, z), g)_{H_2} = (Ae_1(\cdot, z), g)_{H_2} = (e_1(\cdot, z), A^* g)_{H_1} = \widetilde{A^* g}(z) \quad \forall z \in \Omega_1, \forall g \in H_2.$$

Отсюда вытекает, что если функция $\widehat{g}$ принадлежит $\widehat{H}_2$, то $\widehat{g}$ также принадлежит пространству $\widetilde{H}_1$. Для функций $g \in H_2$, $\widehat{g} \in \widehat{H}_2$ справедлива оценка (используются определения норм в пространствах $\widetilde{H}_1$, $\widehat{H}_2$)

$$\|\widehat{g}\|_{\widetilde{H}_1} = \left\|\widetilde{A^* g}\right\|_{\widetilde{H}_1} = \|A^* g\|_{H_1} \leq C\|g\|_{H_2} = C\|\widehat{g}\|_{\widehat{H}_2} \quad \forall g \in H_2,$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Таким образом, мы показали, что $\widehat{H}_2 \subset \widetilde{H}_1$. Теорема 2.2 доказана. □

Далее мы изучаем вопрос об условии согласования полных систем функций с некоторым линейным непрерывным оператором (см. [3]) для случая вложения одного RKHS в другое RKHS. Напомним определение из [3].

Определение 2.1. *Системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$, принадлежащие RKHS пространству H, называются согласованными с оператором $T\colon H \to H$, если выполнено соотношение:*

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), Te_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1. \tag{2.12}$$

Возникает вопрос: верен ли аналог утверждения 3 и утверждения 4 из работы [3] (см. также [4]). Мы предполагаем, что системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$ — ортоподобные системы разложения в RKHS пространстве H с одной и той же мерой μ [8] (см. также [9]). Ортоподобные системы разложения были введены в работах Т.П. Лукашенко. Как выясняется, требование, что системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$ — ортоподобные системы разложения в пространстве H с одной и той же мерой μ является очень сильным условием. Пространство H состоит из функций, заданных на множестве точек $\Omega \subset \mathbb{C}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Справедлива следующая

Теорема 2.3. *Пусть $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$ — две ортоподобные системы разложения в RKHS пространстве H с одной и той же мерой μ. Предположим, что найдется линейный непрерывный оператор $T\colon H \to H$ такой, что системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$ согласованы с оператором T, т.е.*

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), Te_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1.$$

Тогда пространство $\widehat{H}$ эквивалентно пространству $\widetilde{H}$.

Замечание 2.1. *В отличии от утверждения 3 и утверждения 4 работы [3] оператор $T\colon H \to H$ не предполагается обратимым; он только является линейным непрерывным оператором.*

Доказательство. Пусть $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$ — две ортоподобные системы разложения в пространстве H, которые согласованы с оператором T, т.е. выполнено соотношение (2.12) или, что то же самое,

$$(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=(Te_2(\cdot,z_1),e_1(\cdot,z_2))_H \quad \forall z_1,z_2\in\Omega_1.$$

Последнее равенство влечет соотношение

$$\left(\sum_{k=1}^m c_k e_1(\cdot,z_k),e_2(\cdot,\xi)\right)_H=\left(\sum_{k=1}^m c_k Te_2(\cdot,z_k),e_1(\cdot,\xi)\right)_H \quad \forall\xi\in\Omega_1. \tag{2.13}$$

Здесь $\{z_k\}_{k=1}^m$ — произвольный набор точек из Ω_1, а $\{c_k\}_{k=1}^m$ — произвольный набор комплексных чисел. Тогда $p(t)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^m c_k e_1(t,z_k)$, $t\in\Omega$ — произвольная функция из линейной оболочки системы $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, и $q(t)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^m c_k Te_2(t,z_k)$, $t\in\Omega$ — функция из линейной оболочки системы $\{Te_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$. Тогда функции p, q принадлежат H, а системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$ — ортоподобные системы разложения в H с мерой μ, поэтому

$$p(t)=\int_{\Omega_1}(p,e_2(\cdot,\xi))_H e_2(t,\xi)\,d\mu(\xi)\quad\forall t\in\Omega,$$
$$q(t)=\int_{\Omega_1}(q,e_1(\cdot,\xi))_H e_1(t,\xi)\,d\mu(\xi)\quad\forall t\in\Omega.$$

В силу аналога равенства Парсеваля ([8, Теорема 1]) и соотношения (2.13) справедливо равенство

$$\|p\|_H^2=\int_{\Omega_1}|(p,e_2(\cdot,\xi))|^2\,d\mu(\xi)=\int_{\Omega_1}|(q,e_1(\cdot,\xi))|^2\,d\mu(\xi)=\|q\|_H^2$$

или $\|p\|_H=\|q\|_H$. На линейной оболочке системы функций $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ определим оператор L_1 по следующему правилу: $L_1\colon p\mapsto q$. Обозначим H_0^1 — замыкание по норме пространства H линейной оболочки системы функций $\{Te_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$. По теореме Банаха ([10, с. 240, Теорема 2]) оператор L_1 продолжается до линейного непрерывного взаимно однозначного унитарного оператора, действующего из H на H_0^1, и $L_1\colon e_1(\cdot,\xi)\mapsto Te_2(\cdot,\xi)\quad\forall\xi\in\Omega_1$. Поэтому оператор $A\overset{def}{=}L_1^{-1}\circ T$ — линейный непрерывный оператор, действующий из H в H, и $A\colon e_2(\cdot,\xi)\mapsto e_1(\cdot,\xi)$ $\forall\xi\in\Omega_1$. Применяя теорему 2.1, мы получаем, что $\widetilde{H}\subset\widehat{H}$.

Далее, из соотношения (2.12) вытекает

$$(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=\overline{(T^*e_1(\cdot,z_2),e_2(\cdot,z_1))}_H\quad\forall z_1,z_2\in\Omega_1, \tag{2.14}$$

T^* — оператор, сопряженный к оператору T. Из (2.14) получаем

$$(e_2(\cdot,z_2),e_1(\cdot,z_1))_H=(T^*e_1(\cdot,z_2),e_2(\cdot,z_1))_H\quad\forall z_1,z_2\in\Omega_1. \tag{2.15}$$

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^m$ — произвольный набор точек из Ω_1, а $\{c_k\}_{k=1}^m$ — произвольный набор комплексных чисел и $p(t)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^m c_k e_2(t,z_k)$, $t\in\Omega$ — функция из линейной оболочки системы $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, а $q(t)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^m c_k T^*e_1(t,z_k)$, $t\in\Omega$ — функция из линейной оболочки системы $\{T^*e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$. Определим оператор L_2 по следующему правилу: $L_2\colon p\mapsto q$. Обозначим H_0^2 — замыкание по норме пространства H линейной оболочки системы функций $\{T^*e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$. По теореме Банаха ([10, с. 240, Теорема 2]) оператор L_2 продолжается до линейного непрерывного взаимно однозначного унитарного оператора, действующего из H на H_0^2, и этот оператор обладает свойством: $L_2\colon e_2(\cdot,\xi)\mapsto T^*e_1(\cdot,\xi)\quad\forall\xi\in\Omega_1$. Поэтому оператор $A\overset{def}{=}L_2^{-1}\circ T^*$ — линейный непрерывный оператор, действующий из H в H и $A\colon e_1(\cdot,\xi)\mapsto e_2(\cdot,\xi)$ $\forall\xi\in\Omega_1$. Применяя теорему 2.1, мы получаем, что $\widehat{H}\subset\widetilde{H}$, т.е. $\widehat{H}$ как множество функций вложено в $\widetilde{H}$ и для любого $h\in\widehat{H}$ выполнена оценка $\|h\|_{\widetilde{H}}\le C_1\|h\|_{\widehat{H}}$

(постоянная $C_1 > 0$ не зависит от h). Ранее мы доказали, что $\widetilde{H} \subset \widehat{H}$, т.е. $\widetilde{H}$ как множество функций вложено в $\widehat{H}$, и для любого $h \in \widetilde{H}$ выполнена оценка $\|h\|_{\widehat{H}} \le C_2\|h\|_{\widetilde{H}}$ (постоянная $C_2 > 0$ не зависит от h). Тем самым, пространства $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ эквивалентны, т.е. $\widehat{H}$, $\widetilde{H}$ состоят из одних и тех же функций, и выполнено соотношение

$$\frac{1}{C_2}\|h\|_{\widehat{H}} \le \|h\|_{\widetilde{H}} \le C_1\|h\|_{\widehat{H}} \quad \forall h \in \widetilde{H}.$$

Теорема 2.3 доказана. □

Из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$ — две ортоподобные системы разложения в пространстве H с одной и той же мерой μ. Предположим, что найдется линейный непрерывный оператор $T\colon H \to H$ такой,что системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$ согласованы с оператором T, т.е.*

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), Te_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1. \tag{2.16}$$

Тогда для оператора T существует непрерывный обратный оператор.

Доказательство. При данных условиях, согласно теореме 2.3, пространство $\widehat{H}$ эквивалентно пространству $\widetilde{H}$. Применяя утверждение 2 статьи [3], мы получаем, что существует линейный непрерывный обратимый оператор T_1 такой, что выполнено условие

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), T_1e_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1. \tag{2.17}$$

С другой стороны, по условию выполнено равенство (2.16). Сравнивая (2.16) и (2.17), получим равенство

$$(e_1(\cdot, z_2), T_1e_2(\cdot, z_1))_H = (e_1(\cdot, z_2), Te_2(\cdot, z_1))_H \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1$$

или

$$(e_1(\cdot, z_2), T_1e_2(\cdot, z_1) - Te_2(\cdot, z_1))_H \equiv 0 \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1. \tag{2.18}$$

Так как система функций $\{e_1(\cdot, \xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ полна в пространстве H, из (2.18) вытекает

$$T_1e_2(\tau, z_1) - Te_2(\tau, z_1) = 0 \quad \forall \tau \in \Omega\, \forall z_1 \in \Omega_1$$

или

$$T_1e_2(\tau, z_1) = Te_2(\tau, z_1) \quad \forall \tau \in \Omega\, \forall z_1 \in \Omega_1$$

и

$$T_1r(\tau) = Tr(\tau) \quad \forall \tau \in \Omega,$$

где $r(\tau)$ — произвольная функция из линейной оболочки системы $\{e_2(\tau, \xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$. Поскольку система функций $\{e_2(\cdot, \xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ полна в пространстве H, а T_1, T — непрерывные операторы, то из последнего равенства следует, что

$$T_1f(\tau) = Tf(\tau) \quad \forall \tau \in \Omega, \quad \forall f \in H,$$

т.е. обратимый оператор T_1 совпадает с оператором T, поэтому T — обратимый оператор. Следствие 2.1 доказано. □

Возникает вопрос. Верны ли аналоги утверждения 1 и утверждения 2 из работы [3], сформулированные для случая совпадения или эквивалентности RKHS пространств? Если выполнено $\widehat{H} \subset \widetilde{H}$, то будет ли справедливо условие согласования

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), Te_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1?$$

Ниже в разделе Примеры приводится Пример 1, показывающий, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Условие $d\mu_1 \le C \cdot d\mu_2$ означает, что если множество

$P \subset \Omega_1$ является μ_2–измеримым, то P также μ_1–измеримо, и найдется постоянная, независящая от выбора множества $P \subset \Omega_1$, такая, что выполнено неравенство $\mu_1(P) \le C \cdot \mu_2(P)$. Справедлива следующая

Теорема 2.4. *Пусть H — RKHS пространство, состоящее из функций, заданных на множестве Ω, и $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ — ортоподобная система разложения в H с мерой μ_1, а $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ — ортоподобная система разложения в H с мерой μ_2. При этом найдется постоянная $C > 0$ такая, что $d\mu_1 \le C d\mu_2$. Пусть также существует линейный непрерывный оператор $T\colon H \longrightarrow H$ такой, что выполнено условие согласования*

$$(e_1(\cdot,z_1), e_2(\cdot,z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot,z_2), Te_2(\cdot,z_1))_H} \quad \forall z_1, \forall z_2 \in \Omega_1. \tag{2.19}$$

Тогда пространство $\widehat{H}$ вложено в пространство $\widetilde{H}$.

Доказательство. Пусть T^* — оператор сопряженный к оператору T. Соотношение (2.19) влечет

$$(e_1(\cdot,z_1), e_2(\cdot,z_2))_H = \overline{(T^*e_1(\cdot,z_2), e_2(\cdot,z_1))_H} \quad \forall z_1, \forall z_2 \in \Omega_1$$

или

$$(T^*e_1(\cdot,z_2), e_2(\cdot,z_1))_H = (e_2(\cdot,z_2), e_1(\cdot,z_1))_H \quad \forall z_1, \forall z_2 \in \Omega_1. \tag{2.20}$$

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^m$ — произвольный набор точек из Ω_1, а $\{c_k\}_{k=1}^m$ — произвольный набор комплексных чисел, и

$$p(t) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^m c_k T^* e_1(t,z_k), \quad q(t) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^m c_k e_2(t,z_k), \quad t \in \Omega.$$

Из (2.20), используя линейность скалярного произведения по первому аргументу, получается равенство

$$(p, e_2(\cdot,\xi))_H = (q, e_1(\cdot,\xi))_H \quad \forall \xi \in \Omega_1. \tag{2.21}$$

Тогда, применяя аналог равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения (см. [8, Теорема 1]), учитывая условие $d\mu_1 \le C \cdot d\mu_2$, из (2.21) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|q\|_H^2 = \int_{\Omega_1} |(q, e_1(\cdot,\xi))_H|^2 \, d\mu_1(\xi) &= \int_{\Omega_1} |(p, e_2(\cdot,\xi))_H|^2 \, d\mu_1(\xi) \\ &\le C \int_{\Omega_1} |(p, e_2(\cdot,\xi))_H|^2 \, d\mu_2(\xi) = C\|p\|_H^2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Пусть H_0 — замыкание линейной оболочки системы функций $\{T^*e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ по норме пространства H. Тогда H_0 — замкнутое подпространство пространства H. Рассмотрим оператор B, действующий на линейной оболочке системы $\{T^*e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, по следующему правилу:

$$B : p \mapsto q.$$

Из оценки (2.22) вытекает

$$\|Bp\|_H \le C\|p\|_H \quad \forall p \in span\{T^*e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}. \tag{2.23}$$

По теореме Банаха оператор B продолжается как линейный непрерывный оператор, действующий из H_0 в H. Таким образом,

$$\|Bh\|_H \le C\|h\|_H \quad \forall h \in H_0. \tag{2.24}$$

Оператор B обладает свойством

$$B\colon T^*e_1(\cdot,\xi) \mapsto e_2(\cdot,\xi) \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

Тогда оператор $A \stackrel{def}{=} B \circ T^*$ является линейным непрерывным оператором, действующим из H в H, и обладает свойством

$$A\colon e_1(\cdot,\xi) \mapsto e_2(\cdot,\xi) \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

По теореме 2.1 пространство $\widehat{H}$ вложено в пространство $\widetilde{H}$. Теорема 2.4 доказана. □

3. Примеры

3.1. Пример 1. Рассмотрим пространство Бергмана $B_2(D)$, состоящее из функций, аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$. Через l_2 обозначается пространство последовательностей

$$l_2 = \{\mathbf{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\colon \|\mathbf{x}\|^2_{l_2} = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\},$$

где $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Известно, что оператор A, определенный на пространстве l_2 правилом

$$A\colon \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \mapsto \{0, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\},$$

действует из пространства l_2 в пространство l_2 и является ограниченным (но не обратимым) оператором. Образ этого оператора $\operatorname{Im} A$ является замкнутым подпространством пространства l_2. Оператор A порождает в гильбертовом пространстве $B_2(D)$ линейный непрерывный оператор $A_1\colon B_2(D) \to B_2(D)$, действующий по правилу: если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \sqrt{k+1} \cdot z^k, \quad \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \in l_2,$$

то

$$A_1 f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \sqrt{k+2} \cdot z^{k+1}, \quad \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \in l_2.$$

Так как $\operatorname{Im} A$ замкнутое подпространство пространства l_2, то $\operatorname{Im} A_1$ (образ оператора A_1) — замкнутое подпространство пространства $B_2(D)$. Нетрудно увидеть, что $\operatorname{Im} A_1$ не совпадает с пространством $B_2(D)$. Положим

$$e_1(k,z) := \sqrt{k+1} \cdot z^k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad z \in D;$$
$$e_2(k,z) := \sqrt{k+2} \cdot z^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad z \in D.$$

Пусть $H = l_2$, тогда (см. соотношения (1.1), (1.2)) в этом случае $\Omega = \mathbb{N}_0$, $\Omega_1 = D$, $\widetilde{H} = B_2(D)$, $\widehat{H} = \operatorname{Im} A_1$. Предположим, что в этом случае найдется оператор $T\colon H \to H$ такой, что выполнено условие согласования

$$(e_1(\cdot,z_1), e_2(\cdot,z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot,z_2), Te_2(\cdot,z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1. \tag{3.1}$$

Тогда, согласно теореме 2.3, пространства $B_2(D)$ и $\operatorname{Im} A_1$ эквивалентны. Однако, как только что было установлено, это не так. Таким образом, мы привели пример, когда пространство $\widehat{H}$ вложено в пространство $\widetilde{H}$, однако условие согласования (3.1) для систем функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$ не выполняется, как бы не был выбран линейный непрерывный оператор T.

3.2. Пример 2. Приведем пример, иллюстрирующий теорему 2.4. Пусть $\alpha > -1$. Рассмотрим весовое пространство Бергмана

$$B_2(D,\alpha) := \left\{ f \in H(D)\colon \|f\|^2_{B_2(D,\alpha)} = \int_D |f(z)|^2 (1-|z|)^\alpha \, dv(z) \right\},$$

где $dv(z)$ — плоская мера Лебега. $B_2(D,\alpha)$ — RKHS пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_{B_2(D,\alpha)} = \int_D f(z)\cdot \overline{g(z)} (1-|z|)^\alpha \, dv(z) \quad \forall f,g \in B_2(D,\alpha).$$

Известно, $\{z^k\}_{k=0}^\infty$, $z \in D$ образует ортогональный базис в пространстве $B_2(D,\alpha)$ (см., например, [11]).

Тогда система функций $\{z^k/\|z^k\|_{B_2(D,\alpha)}\}_{k=0}^\infty$, $z \in D$ является ортонормированным базисом в пространстве $B_2(D,\alpha)$. Нетрудно увидеть, что если $\alpha \geq 0$, то выполнено включение $B_2(D) \subset B_2(D,\alpha)$, а если $-1 < \alpha \leq 0$, то выполнено включение $B_2(D,\alpha) \subset B_2(D)$. В самом деле, нетрудно проверить следующие неравенства

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{B_2(D,\alpha)} = \int_D |f(z)|^2 (1-|z|)^\alpha \, dv(z) \leq \int_D |f(z)|^2 \, dv(z) = \|f\|^2_{B_2(D)}, \\ \alpha \geq 0 \quad \forall f \in B_2(D); \\ \|f\|^2_{B_2(D,\alpha)} = \int_D |f(z)|^2 (1-|z|)^\alpha \, dv(z) \geq \int_D |f(z)|^2 \, dv(z) = \|f\|^2_{B_2(D)}, \\ -1 < \alpha \leq 0 \quad \forall f \in B_2(D). \end{aligned}$$

Также выполнены неравенства

$$\begin{aligned} (1-|z|)^\alpha \, dv(z) \leq dv(z), \quad & \alpha \geq 0; \\ (1-|z|)^\alpha \, dv(z) \geq dv(z), \quad & -1 < \alpha \leq 0. \end{aligned}$$

В наших обозначениях

$$\begin{aligned} H = l_2, \quad \{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi \in D} &:= \left\{ \frac{\xi^k}{\|\xi^k\|^2_{B_2(D,\alpha)}} \right\}_{\xi \in D}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \\ \{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi \in D} &:= \left\{ \frac{\xi^k}{\|\xi^k\|^2_{B_2(D)}} \right\}_{\xi \in D}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Также $\widehat{H} = B_2(D)$, $\widetilde{H} = B_2(D,\alpha)$.

Система функций $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi \in D}$ является ортоподобной системой разложения с мерой $d\mu_1(z) := (1-|z|)^\alpha \, dv(z)$ в пространстве l_2. Система функций $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi \in D}$ является ортоподобной системой разложения с мерой $d\mu_2(z) := dv(z)$ в пространстве l_2. Нетрудно проверить, что для систем $\{e_j(\cdot,\xi)\}_{\xi \in D}$, $j = 1,2$ выполнено условие согласования:

$$(e_1(\cdot,z_1), e_2(\cdot,z_2))_{l_2} = \overline{(e_1(\cdot,z_2), id[e_2(\cdot,z_1)])}_{l_2} \quad \forall z_1, \forall z_2 \in D,$$

где id обозначает единичный оператор. Если $\alpha \geq 0$, то $d\mu_1 \leq d\mu_2$; выполнены все условия теоремы 2.4, и $\widehat{H} \subset \widetilde{H}$. Если $-1 < \alpha \leq 0$, то $d\mu_1 \geq d\mu_2$; выполнены все условия теоремы 2.4, и $\widehat{H} \supset \widetilde{H}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Berlinet, C. Thomas–Agnan. *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics.* Kluwer Academic Publishers, New York (2001).
2. S. Saitoh, Y. Sawano. *Theory of Reproducing Kernel and Application.* In: *Developments in Mathematics* **44**, Springer, Singapore, 452 p. (2016).
3. В.В. Напалков (мл.), А.А. Нуятов. *Об одном условии совпадения пространств преобразований функционалов гильбертова пространства* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН **28**:3, 142–154 (2022).
4. В.В. Напалков (мл.), А.А. Нуятов. *К вопросу о совпадении гильбертовых пространств интегрируемых с квадратом по мере функций* // Труды МФТИ **15**:3, 39–49 (2023).
5. N.D. Ylvisaker. *On linear estimation for regression problems on time series* // Ann. Math. Stat. 33, 1077–1084 (1962).
6. M.F. Driscoll. *The reproducing kernel Hilbert space structure of the sample paths of a Gaussian process* // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 26, 309–316 (1973).
7. В.В. Напалков, В.В. Напалков (мл.). *Об изоморфизме гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром* // Докл. Акад. наук, Росс. акад. наук. **474**:6, 665–667 (2017).
8. Т.П. Лукашенко. *О свойствах систем разложения подобных ортогональным* // Изв. Росс. акад. наук, сер. мат. **62**:5, 187–206 (1998).
9. В.В. Напалков (мл.). *Об ортоподобных системах разложения в пространстве аналитических функций и задаче описания сопряженного пространства* // Уфим. мат. ж. **3**:1, 31–42 (2011).
10. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. *Функциональный анализ.* М.: Наука (1984).
11. В.В. Напалков (мл.), Р.С. Юлмухаметов. *Весовые преобразования Фурье–Лапласа аналитических функционалов в круге* // Мат. сб. **183**:11, 139–144 (1992).

Валерий Валентинович Напалков,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `vnap@mail.ru`

Андрей Александрович Нуятов,
НГТУ им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: `nuyatov1aa@rambler.ru`