ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 3 (2024). С. 44-57.

УДК 517.547.7

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

М.В. КАБАНКО, К.Г. МАЛЮТИН

Аннотация. Рассматриваются задачи, относящиеся к задачам свободной интерполяции, которые впервые начал рассматривать А.Ф. Леонтьев. Получены новые критерии интерполяционности множеств в пространстве аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка. Приведены примеры интерполяционных множеств в пространстве аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка. Эти примеры аналогичны интерполяционным множествам в пространстве аналитических, ограниченных в верхней полуплоскости функций. В частности, приведены аналоги множеств, удовлетворяющих условию Ньюмена и равномерному условию Фростмана.

Ключевые слова: свободная интерполяция, полуплоскость, конечный порядок, интерполяционное множество.

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30D15

1. Введение

1.1. Обозначения и терминология. Будем использовать следующие определения и терминологию. Если неравенство (равенство) выполняется для всех достаточно больших значений аргумента, то оно называется *асимптотическим неравенством (равенством)*. Через $K, M, \dots, \varepsilon, \delta, \dots$, мы будем обозначать положительные константы, которые могут меняться в процессе рассуждений. Так, может встретиться выражение: «если $f(r) < 3M$, то $f(r) < M$».

Обозначим через $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество целых положительных (*натуральных*) чисел, $\mathbb{C}$ — *комплексная плоскость с вещественной осью* $\mathbb{R}$ и *положительной полуосью* $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — *верхняя полуплоскость*. Одноточечные множества записываем без фигурных скобок, если это не вызывает разночтений. Так, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \pm\infty$ и $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R} \cup +\infty$ — *расширенные* соответственно вещественная ось и положительная полуось с обычным *модулем* $|\cdot|$ как и для $\mathbb{C}$, и $|\pm\infty| := +\infty$, ∞ — это бесконечность в комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_+$, т.е. последовательность точек $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$. $\overline{n_1, n_2}$ — множество целых чисел $n : n_1 \leqslant n \leqslant n_2$. *Открытый круг радиуса* r *с центром в точке* a будем обозначать через $C(a, r)$, через $B(a, r) = \overline{C(a, r)}$ обозначим *замкнутый круг*, G_+ означает *пересечение множества* G *с полуплоскостью* $\mathbb{C}_+$, то есть $G_+ := G \cap \mathbb{C}_+$, $\overline{G}$ — *замыкание множества* G.

M.V. Kabanko, K.G. Malyutin, Interpolation sets in spaces of functions of finite order in half–plane.

Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/.

Поступила 3 февраля 2024 г.

Через a^+ обозначаем $(|a|+a)/2$, в частности, $\ln^+ 0 := 0$. Через $[\cdot]$ мы обозначаем целую часть числа, $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$ — последовательность точек без повторений, все предельные точки которой на вещественной оси и ∞. Всюду далее, если не оговорено противное, считаем $r_n = |a_n|$, $\theta_n = \arg a_n$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$, где $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ для $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $n_A^+(G) := n^+(G) = \sum\limits_{a_n \in G} \sin\theta_n$, в частности, $n_A^+(R) := n^+(C(0,R))$.

1.2. Определения порядка аналитической в верхней полуплоскости функции. Пусть ρ $(r \in \mathbb{R}_+)$ — уточненный порядок в смысле Валирона, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \varrho > 0$. Обозначим далее $V(r) = r^{\rho(r)}$. Пусть f голоморфная функция в $\mathbb{C}_+$. Уточненный порядок ρ называется полуформальным порядком функции f, если существует такая константа $M > 0$ (зависящая от f и не зависящая от z), что для всех $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется неравенство

$$\ln|f(z)| < MV(|z|),$$

и выполняется условие Б.Я. Левина: существуют числа $q \in (0,1)$ и $\delta \in (0, \pi/2)$ такие, что в каждой области

$$D(R,q,\delta) = \{z : qR < |z| < R/q, \delta < \arg z < \pi - \delta\}$$

найдется точка z, в которой выполняется неравенство $\ln|f(z)| > -MV(|z|)$.

Определение полуформального порядка функции принадлежит А.Ф. Гришину (см., например, [1]). Обозначим через $[\rho,\infty)^+$ пространство функций, для которых ρ является полуформальным порядком.

1.3. Интерполяционная задача в пространстве $[\rho,\infty)^+$. Рассматриваемые в нашей работе задачи относятся к задачам свободной интерполяции, которые впервые начал рассматривать Леонтьев [2]–[4]. Кратная интерполяционная задача в пространстве $[\rho,\infty)^+$, $\varrho > 0$, была решена в работах [5], [6]. Приводимая ниже постановка задачи и теорема — это ее частный случай, когда кратности узлов интерполяции равны единице. Случай $\varrho = 0$ (нулевого порядка) рассматривался в [7].

Приведем некоторые понятия и обозначения. Введем *канонический множитель Неванлинны*

$$B_q(u,v) = \begin{cases} \dfrac{\bar v(u-v)}{v(u-\bar v)}, & \text{при} \quad q = 0, \\ B_0(u,v)\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{q} \dfrac{u^j}{j}\left(\dfrac{1}{v^j} - \dfrac{1}{\bar v^j}\right)\right), & \text{при} \quad q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Пусть ρ — уточненный порядок в смысле Валирона, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \varrho > 0$, $q = [\varrho]$. Если последовательность A такая, что

$$n_A^+(R) \leqslant KV(R) \tag{1.1}$$

при некотором $K > 0$ (т.е. имеет конечную верхнюю аргументную плотность) и ϱ — нецелое число, то бесконечное произведение

$$E(z) := E_A(z) = \prod_{r_n \leqslant 1} B_0(z,a_n) \prod_{r_n > 1} B_q(z,a_n)$$

равномерно сходится на компактах в $\mathbb{C}_+$.

Функция $E(z)$ называется *канонической функцией* (*каноническим произведением*) *последовательности* A.

Случай целого $\varrho \geqslant 1$ сложнее. В этом случае для равномерной сходимости функции $E(z)$ на компактах в $\mathbb{C}_+$ недостаточно одной только конечной верхней аргументной плотности, требуется еще некоторая аргументная симметрия точек a_n. Для построения канонического произведения добавляется множитель без нулей, полная мера которого сосредоточена на вещественной оси (см. [6]). Такая функция называется *присоединенной функцией* последовательности A.

По заданной последовательности A определим семейства функций

$$\Phi_D^+(z,\alpha) = \frac{n_D^+(C(z,\alpha|z|)\setminus\{a_n\})}{V(|z|)},$$

где a_n — точка носителя последовательности A, ближайшая к точке z (если таких точек несколько, то выбираем любую из них). Положим

$$I_A^+(z,\delta) = \sin\theta \int\limits_0^\delta \frac{\Phi_D^+(C(z,\alpha)\,d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2}, \quad \theta = \arg z.$$

Определение 1.1. *Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}_+$, все предельные точки которой принадлежат $\mathbb{R}\cup\infty$, называется интерполяционной для пространства $[\rho,\infty)^+$, если для любой последовательности комплексных чисел b_n, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих условию*

$$\sup_n \frac{\ln^+|b_n|}{V(|a_n|)} < \infty,$$

существует функция $F\in[\rho,\infty)^+$ такая, что

$$F(a_n) = b_n, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Всюду далее будем предполагать, что выполняется условие $|a_n|\geq 1$, которое носит технический характер и легко снимается. Сформулируем варианты теорем из [5], [6] для случая простой интерполяции.

Теорема 1.1. *Следующие три утверждения эквивалентны.*

1) *Последовательность A является интерполяционной для пространства $[\rho,\infty)^+$.*

2) *Если $\varrho = \lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)$ — нецелое, то каноническое произведение последовательности A удовлетворяет условию:*

$$\sup_n \frac{1}{V(|a_n|)} \ln\frac{1}{\operatorname{Im} a_n |E'(a_n)|} < \infty. \tag{1.3}$$

2′) *Если $\varrho\geq 1$ — целое, то из* 1) *следует, что условие* (1.3) *выполняется для любой присоединенной функции $E(z)$ последовательности A. Наоборот, если* (1.3) *выполняется хотя бы для одной присоединенной функции $E(z)$ последовательности A, то справедливо* 1)*.*

3) *Выполняется условие* (1.1) *и для любого $\delta>0$*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} I_A^+(z,\delta) < \infty.$$

Теорема 1.2. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) *Последовательность A является интерполяционной последовательностью для пространства $[\rho,\infty)^+$.*

2) *Выполняется условие* (1.1) *и для любого* $\delta > 0$

$$\ln\left|\frac{a_n-\bar a_k}{a_n-a_k}\right| \leqslant V(r_n), \quad n\neq k, \tag{1.4}$$

$$\Phi_z^+(\alpha)\leqslant \alpha, \quad \frac{\sin\theta}{2}\leqslant\alpha\leqslant\delta \quad (\theta=\arg z), \tag{1.5}$$

$$\Phi_z^+(\alpha)\leqslant \sin\theta\Big/\ln\frac{\sin\theta}{\alpha}, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\sin\theta}{2}. \tag{1.6}$$

1.4. Условия интерполяционности в пространстве $[\rho,\infty)^+$**.** Пусть последовательность $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}\}_{n=1}^\infty$ принадлежит верхней полуплоскости $A\in\mathbb{C}_+$ и существует $K>0$ такое, что выполняются условия (1.1) и

$$\prod_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ k\neq n}}\left|\frac{a_k-a_n}{a_k-\bar a_n}\right| \geqslant \exp\left[-KV(r_n)\right]. \tag{1.7}$$

В этом случае мы будем говорить, что последовательность A удовлетворяет условию интерполяционности для пространства $[\rho,\infty)^+$ (или следуя [10], $\mathcal{I}_+(\rho)$–условию). Смысл условия (1.7) состоит в том, что каждая точка последовательности A достаточно далеко отстоит от остальных точек этой, последовательности. В силу теоремы 1.1, если последовательность A удовлетворяет условию интерполяционности (1.7), то она является интерполяционной для пространства $[\rho,\infty)^+$.

Интерпретируя полуплоскость $\mathbb{C}_+$ как модель плоскости в геометрии Лобачевского, через $\sigma(z_1,z_2)$ обозначим неевклидово расстояние между произвольными точками z_1 и z_2 из полуплоскости $\mathbb{C}_+$:

$$\sigma(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|, \quad \text{где} \quad u=\frac{z_1-z_2}{z_1-\overline{z_2}}.$$

Условие (1.7) можно записать в виде

$$\prod_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ k\neq n}} \operatorname{tg}\left(2\sigma(a_k,a_n)\right)\geqslant \exp\left[-KV(r_n)\right].$$

Вот другая запись условия (1.7):

$$\sum_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ k\neq n}} G(a_k,a_n)\leqslant KV(r_n),$$

где $G(z,\zeta)=\ln\left|\dfrac{z-\bar\zeta_n}{z-\zeta}\right|$ — функция Грина полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

2. Некоторые другие условия

В этом пункте $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}\}$ по-прежнему обозначает последовательность верхней полуплоскости, $A_n\overset{\text{def}}{=}A\setminus\{a_n\}$, $a_n\in A$.

1) (*Условия редкости.*) Последовательность A будет называться *редкой* (или ρ_+–редкой), если существует $K>0$ такое, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_k-a_n}{a_k-\bar a_n}\right|\geqslant \exp\left[-K(r_n)\right].$$

Ясно, что интерполяционная для пространства $[\rho,\infty)^+$ последовательность A непременно оказывается ρ_+–редкой.

2) (*Условия Ньюмена.*) Перенумеруем последовательность A таким образом, чтобы

$$\left|\frac{a_{n+1}-i}{a_{n+1}+i}\right| > \left|\frac{a_n-i}{a_n+i}\right|.$$

Пусть A удовлетворяет условию (1.1). Предположим существует c, $0<c<1$, такое, что последовательность A экспоненциально сходится к границе, т.е. выполняется неравенство

$$\frac{\operatorname{Im} a_{n+1}}{\operatorname{Im} a_n}\cdot\frac{r_n^2}{r_{n+1}^2}\leqslant c.$$

Тогда будем говорить, следуя [10], что последовательность удовлетворяет условию $(\mathrm{N}_+(\rho))$.

3) (*Условия Фростмана.*) Будем говорить, что последовательность A удовлетворяет равномерному условию Фростмана при порядке ρ (следуя [10], условию $\mathcal{F}_+(\rho)$), если она удовлетворяет условию (1.1) и существует $K>0$ такое, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{r_n/2\leqslant r_k\leqslant 3r_n/2}\frac{\operatorname{Im} a_k}{|\bar a_k - t|}\leqslant KV(r_n).$$

3. Различные переформулировки условия интерполяционности

Теорема 3.1. *Пусть последовательность $A=\{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty}$, принадлежит полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Следующие утверждения равносильны:*

1. *Последовательность A есть интерполяционная последовательность для пространства $[\rho,\infty)^+$.*

2. 2.1) *Выполняется условие* (1.1);

2.2) *существует $K>0$ такое, что выполняется неравенство*

$$\tau_n(A)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ k\neq n}}\ln\left(1+\frac{\operatorname{Im} a_k \operatorname{Im} a_n}{|a_k-a_n|^2}\right)\leqslant KV(r_n). \tag{3.1}$$

3. *Последовательность A удовлетворяет условию $\mathcal{R}_+(\rho)$ и*

3.1) *выполняется условие* (1.1);

3.2) *существует $K>0$ такое, что выполняется неравенство*

$$S_n(A)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{r_n/2<r_k<3r_n/2}\ln\left(1+\frac{\operatorname{Im} a_k \operatorname{Im} a_n}{|a_k-\bar a_n|^2}\right)\leqslant KV(r_n).$$

Существует $K>0$ такое, что выполняется неравенство

$$\widehat{S}_n(A)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{r_n/2<r_k<3r_n/2}\frac{\operatorname{Im} a_k \operatorname{Im} a_n}{|a_k-\bar a_n|^2}\leqslant KV(r_n). \tag{3.2}$$

Доказательство. Прежде всего, отметим два важных простых тождества:

$$\left|\frac{a-b}{\bar a - b}\right|^2 = 1-\frac{4\operatorname{Im} a\operatorname{Im} b}{|\bar a-b|^2},\quad a,b\in\mathbb{C}_+, \tag{3.3}$$

$$\left|\frac{\bar a-b}{a - b}\right|^2 = 1+\frac{4\operatorname{Im} a\operatorname{Im} b}{|a-b|^2},\quad a,b\in\mathbb{C}_+,\quad a\neq b. \tag{3.4}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{\bar a-b}\right|^2 &= 1-\frac{|\bar a-b|^2-|a-b|^2}{|\bar a-b|^2}1-\frac{(\bar a-b)(a-\bar b)-(a-b)(\bar a-\bar b)}{|\bar a-b|^2}\\ &= 1-\frac{|a|^2-ba-\bar a\bar b+|b|^2-|a|^2+b\bar a+a\bar b-|b|^2}{|\bar a-b|^2}\\ &= 1+\frac{(a-\bar a)(b-\bar b)}{|\bar a-b|^2}=1-\frac{4\operatorname{Im}a\operatorname{Im}b}{|\bar a-b|^2}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left|\frac{\bar a-b}{a-b}\right|^2=1-\frac{|a-b|^2-|\bar a-b|^2}{|a-b|^2}=1-\frac{(a-\bar a)(b-\bar b)}{|\bar a-b|^2}=1+\frac{4\operatorname{Im}a\operatorname{Im}b}{|\bar a-b|^2}.$$

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Из тождества (3.4) и условия (1.4) следует, что

$$\prod_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ k\neq n}}\left(1+\frac{4\operatorname{Im}a_k\operatorname{Im}a_n}{|a_k-a_n|^2}\right)\leqslant\exp[KV(r_n)].$$

Из этого неравенства, после логарифмирования, следует (3.1).

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Из (3.1) и (3.4) следует, что при $n\neq k$

$$2\ln\left|\frac{\bar a_n-a_k}{a_n-a_k}\right|\leqslant\tau_n(A)\leqslant KV(r_n).$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|\frac{a_n-a_k}{\bar a_n-a_k}\right|\geqslant\exp\left[-\frac{K}{2}V(r_n)\right],$$

поэтому последовательность A удовлетворяет условию $\mathcal{R}_+(\rho)$.

Кроме того, $S_n(A)\leqslant\tau_n(A)$, так как при $a,b\in\mathbb{C}_+$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{a-b}{\bar a-b}\right|\leqslant 1.$$

Чтобы доказать неравенство (3.2), заметим, что если последовательность A удовлетворяет условию интерполяционности, то в силу тождества (3.3) и элементарного неравенства $-\ln(1-x)\geq x$ $(0\leqslant x<1)$

$$\begin{aligned}KV(r_n)&\geqslant-\ln\prod_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ k\neq n}}\left|\frac{a_k-a_n}{a_k-\bar a_n}\right|\\ &=-\sum_{r_n/2<r_k<3r_n/2}\ln\left(1-\frac{\operatorname{Im}a_k\operatorname{Im}a_n}{|a_k-\bar a_n|^2}\right)\geqslant\sum_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ k\neq n}}\frac{\operatorname{Im}a_k\operatorname{Im}a_n}{|a_k-\bar a_n|^2},\end{aligned}$$

какова бы ни была точка $a_n\in A$. Откуда следует (3.2).

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Заметим, что из условий (1.1) и (3.2) следует неравенство

$$\sup_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}a_k\operatorname{Im}a_n}{|a_k-\bar a_n|^2r_k^{\varrho+1}}<\infty.\tag{3.5}$$

Действительно из условия (1.1) следует сходимость ряда

$$K_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\theta_k}{r_k^{\varrho+1}}<\infty.\tag{3.6}$$

Из (3.2) и (3.6) получаем далее

$$\sum_{k\neq n}\frac{\operatorname{Im} a_k \operatorname{Im} a_n}{|\bar a_k - a_n|^2 r_k^{\varrho+1}} = \sum_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ k\neq n}} + \sum_{|a_k-a_n|>r_n/2} \leqslant 2^{\varrho+2}\widehat{S}_n(A) + 4K_1\sin\theta_n.$$

Так как при $k=n$ соответствующее слагаемое в (3.5) имеет вид $1/(4r_n^{\varrho+1})$, то получим (3.5).

Далее заметим, что условие (3.5) играет основную роль в работах [5], [6] (см. также [7]–[9]) для построения ряда, который решает интерполяционную задачу.

Теорема полностью доказана. □

4. Объединение интерполяционных последовательностей

Легко понять, что объединение двух интерполяционных последовательностей может не обладать свойством интерполяционности, так как точки одного множества могут слишком близко подходить к точкам другого. Однако, справедлива

Лемма 4.1. *Последовательность A, удовлетворяющая условию $\mathcal{R}_+(\rho)$, равная объединению нескольких интерполяционных последовательностей, есть интерполяционная последовательность для пространства $[\rho,\infty)^+$.*

Доказательство. Пусть A_1, A_1, …, A_q — интерполяционные последовательности. Тогда меры μ_{A_j} $(j=1,2,\dots,q)$ удовлетворяют условиям (1.5) и (1.6). Сумма этих мер, очевидно, также удовлетворяет этим условиям, и тем более удовлетворяет этим условиям мера μ_A, где $A=\bigcup\limits_{j=1}^{q} A_j$. Если A, последовательность, удовлетворяющая условию $\mathcal{R}_+(\rho)$, то она удовлетворяет и условию (1.4) теоремы 1.2. Следовательно, по теореме 1.2 последовательность A есть интерполяционная последовательность в пространстве. □

5. Соотношения между условиями $\mathcal{I}_+(\rho)$ и $N_+(\rho)$

Лемма 5.1. *Последовательность A, удовлетворяющая условию $N_+(\rho)$, есть интерполяционная последовательность для пространства $[\rho,\infty)^+$.*

Доказательство. Заметим, что из условия $N_+(\rho)$ и элементарного неравенства

$$\frac{(|a+i|-|a-i|)|b+i|}{|a+i|(|b+i|-|b-i|)} \leqslant 8\,\frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Im} b}\cdot\frac{|b|^2}{|a|^2}$$

следует

$$\frac{|a_{n+1}+i|-|a_{n+1}-i|}{|a_{n+1}+i|} \leqslant c\frac{|a_n+i|-|a_n-i|}{|a_n+i|}.$$

Так как для любых точек a,b верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$

$$\left|\frac{a-b}{a-\bar b}\right| \geqslant \frac{|a-i||b+i|-|a+i||b-i|}{|a+i||b+i|-|a-i||b-i|},$$

то

$$\prod_{\substack{r_n/2<r_j<3r_n/2\\ j\neq n}}\left|\frac{a_j-a_n}{a_j-\bar a_n}\right| \geqslant \prod_{\substack{r_n/2<r_j<3r_n/2\\ j>n}}\frac{|a_j-i||a_n+i|-|a_j+i||a_n-i|}{|a_j+i||a_n+i|-|a_j-i||a_n-i|}$$
$$\times\prod_{\substack{r_n/2<r_j<3r_n/2\\ j<n}}\frac{|a_n-i||a_j+i|-|a_n+i||a_j-i|}{|a_j+i||a_n+i|-|a_j-i||a_n-i|} := \prod_{j>n}\cdot\prod_{j<n}. \tag{5.1}$$

Если $j > n$, то
$$\frac{|a_j+i|-|a_j-i|}{|a_j+i|} \leqslant c^{j-n}\frac{|a_n+i|-|a_n-i|}{|a_n+i|},$$
и, таким образом,
$$|a_j-i||a_n+i|-|a_j+i||a_n-i| \geqslant (1-c^{j-n})|a_j+i|(|a_n+i|-|a_n-i|).$$
С другой стороны,
$$|a_j+i||a_n+i|-|a_j-i||a_n-i| \leqslant (1+c^{j-n})|a_j+i|(|a_n+i|-|a_n-i|).$$
Таким образом,
$$\prod_{j>n} \geqslant \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1-c^j}{1+c^j}.$$

Далее имеем
$$-\ln\prod_{j>n} = -\sum_{j=1}^{\infty}\ln\frac{1-c^j}{1+c^j} \leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c^j}{1+c^j}.$$

Элементарными вычислениями получаем
$$\ln\prod_{j>n} \geqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c^j}{1+c^j} = \frac{2}{\ln c\cdot\ln(1+c)}. \tag{5.2}$$

Если $j < n$, то
$$\frac{|a_n+i|-|a_n-i|}{|a_n+i|} \leqslant c^{n-j}\frac{|a_j+i|-|a_j-i|}{|a_j+i|}.$$

Таким образом,
$$|a_n-i||a_j+i|-|a_n+i||a_j-i| \geqslant (1-c^{n-j})|a_n+i|(|a_j+i|-|a_j-i|),$$
$$|a_n+i||a_j+i|-|a_j-i||a_n-i| \leqslant (1+c^{n-j})|a_n+i|(|a_j+i|-|a_j-i|).$$
Таким образом,
$$\prod_{j<n} \geqslant \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1-c^{n-j}}{1+c^{n-j}},$$
и
$$\ln\prod_{j<n} \geqslant \frac{2}{\ln c\cdot\ln(1+c)}. \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) следует, что последовательность A удовлетворяет условию $(\mathcal{I}_+(\rho))$. □

Следствие 5.1. *Любая последовательность, все предельные точки которой на вещественной оси и бесконечность, содержит интерполяционную для пространства $[\rho,\infty)^+$ подпоследовательность.*

Следствие 5.2. *Пусть последовательность A удовлетворяет условию $(\mathcal{I}_+(\rho))$ и все ее точки на мнимой оси. Тогда для того, чтобы A была интерполяционной для пространства $[\rho,\infty)^+$ необходимо*
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \exp[KV(r_n)],$$
при некотором $K > 0$, и достаточно
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant c < 1.$$

Доказательство. Мы уже показали, что интерполяция возможна, если a_n стремится к границе (в данном случае к бесконечности) с экспоненциальной скоростью. Обратно, если интерполяция возможна, то существует такое $K > 0$, что
$$\exp[-KV(r_n)] \leqslant \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}-\bar{a}_n} = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}+a_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
□

6. Интерполяционность редких последовательностей, удовлетворяющих равномерному условию Фростмана

В этом пункте $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}$ по-прежнему обозначает последовательность верхней полуплоскости, $A_n \overset{\text{def}}{=} A \setminus \{a_n\}$, $a_n \in A$.

Лемма 6.1. *ρ_+–редкая последовательность A, удовлетворяющая условию $(\mathcal{F}_+(\rho))$, есть интерполяционная последовательность.*

Доказательство. Пусть A_0 — конечная подпоследовательность последовательности A. Функция
$$f(z) = \sum_{\substack{r_n/2\leqslant r_k\leqslant 3r_n/2\\ a_k\in A_0}} \frac{\operatorname{Im} a_k}{|\bar{a}_k - z|}$$
субгармонична в $\overline{\mathbb{C}_+}$, и потому
$$\sum_{\substack{r_n/2\leqslant r_k\leqslant 3r_n/2\\ a_k\in A_0}} \frac{\operatorname{Im} a_k}{|\bar{a}_k - z|} \leqslant \max_{t\in\mathbb{R}} f(t) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{r_n/2\leqslant r_k\leqslant 3r_n/2} \frac{\operatorname{Im} a_k}{|\bar{a}_k - t|}.$$

Значит
$$\sum_{r_n/2\leqslant r_k\leqslant 3r_n/2} \frac{\operatorname{Im} a_k}{|\bar{a}_k - a_n|} \leqslant KV(r_n)$$
какова бы ни была точка a_n множества A. В то же время
$$\frac{\operatorname{Im} a_n}{|\bar{a}_k - a_n|} < 1, \quad a_k, a_n \in \mathbb{C}_+.$$
Поэтому
$$\sum_{r_n/2< r_k< 3r_n/2} \frac{\operatorname{Im} a_k \operatorname{Im} a_n}{|\bar{a}_k - a_n|^2} \leqslant KV(r_n).$$

Вместе с условием ρ_+–редкости это неравенство влечет интерполяционность последовательности A (теорема 3.1). □

7. Множества, близкие к интерполяционным

Далее нас будут интересовать множества, близкие к интерполяционным в пространстве $[\rho,\infty)^+$, т.е. к множествам, удовлетворяющим $\mathcal{I}_+(\rho)$–условию.

Обозначим через $\Omega(a,r)$ круг
$$\Omega(a,r) \overset{\text{def}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| \leqslant r \right\}.$$
Множество E' *K–сдвинуто относительно множества* E ($E \subset \mathbb{C}_+$) *при уточненном порядке* ρ, если существует отображение ω множества E на множество E', такое, что $\omega(\xi) \in \Omega(\xi, \exp[-KV(|\xi|)])$ при любом ξ, $\xi \in E$. В этом случае будем говорить, что отображение ω есть *K–сдвиг множества при уточненном порядке* ρ.

Вначале докажем некоторые полезные неравенства.

Лемма 7.1. *Пусть* $a, b, c, d \in \mathbb{C}_+$, $u = \dfrac{a-b}{\bar{a}-b}$, $v = \dfrac{c-a}{\bar{c}-a}$, $w = \dfrac{c-d}{\bar{c}-d}$.

1) *Если* $\dfrac{b-c}{b-\bar{c}} \leqslant \dfrac{\delta}{4}$, $u \geqslant \delta$, *то* $v \geqslant \delta^\alpha$, *где* $\alpha = \dfrac{\ln(\delta/2)}{\ln \delta}$.

2) *Если* $\dfrac{b-c}{b-\bar{c}} \leqslant \dfrac{\delta}{4}$, $\dfrac{a-d}{\bar{a}-d} \leqslant \dfrac{\delta}{4}$, $u \geqslant \delta$, *то* $w \geqslant \delta^{\alpha\beta}$, *где* $\beta = \dfrac{\ln(\delta/4)}{\ln \delta/2}$.

Доказательство. Доказательство леммы легко получить, применяя конформное отображение $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на единичный круг $C(0,1)$ и аналогичную лемму для круга (см. [10, Лемма 8]). □

Лемма 7.2. *Пусть* $a, b \in \mathbb{C}_+$, $|a| \geqslant 1$. *Если* $\dfrac{a-b}{b-\bar{a}} \leqslant \varepsilon$, $(0 < \varepsilon < 1)$, *то*

1) $|a-b| \leqslant \dfrac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{1-\varepsilon}$; 2) $\left|\arg \dfrac{a}{b}\right| \leqslant \dfrac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{1-\varepsilon}$.

Доказательство. 1) Имеем $\dfrac{b-\bar{a}}{a-b} \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Отсюда $\left|1 - \dfrac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{a-b}\right| \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Из последнего неравенства следует, что

$$|a-b| + 2\operatorname{Im} a \geqslant \frac{|a-b|}{\varepsilon}.$$

Откуда и получаем неравенство в п. 1).

2) Неравенство в п. 2) следует из неравенства в п. 1), так как, если $|a| > 1$ и $|a-b| \leqslant r < 1$, то $|\arg a - \arg b| \leqslant r$.

Лемма доказана. □

Лемма 7.3. *Пусть последовательность* $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$, $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, *удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{a_n \in C(0,r)} \sin \theta_n \leqslant C_1 V(r) \tag{7.1}$$

при некотором $C_1 > 0$. *Тогда для заданного* $K > 0$ *существует* $C_2 = C_2(K) > 0$, *такое, что любая* K*–сдвинутая последовательность* $A' = \{a'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$, $a'_n = r'_n e^{i\theta'_n}$, *при уточненном порядке* $\rho(r)$ *относительно последовательности* A *удовлетворяет условию* (7.1) *с константой* C_2.

Доказательство. Используя лемму 7.2, п. 2), получим

$$\begin{aligned}\sum_{a'_n \in C(0,r)} \sin \theta'_n &\leqslant \sum_{a_n \in C(0,2r)} \sin \theta_n + \sum_{a'_n \in C(0,r)} |\sin \theta'_n - \sin \theta_n| \\ &\leqslant \sum_{a_n \in C(0,2r)} \sin \theta_n + \sum_{a_n \in C(0,2r)} \sin \theta_n \exp(-C_2 V(r_n)), \quad C_2 > 0.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Ряд $\sum\limits_{a_n \in C(0,2r)} \sin \theta_n \exp(-C_2 V(r_n))$ сходится.

Из неравенств (7.1) и (7.2) следует утверждение леммы. □

Теорема 7.1. *Пусть последовательность* A *удовлетворяет* $\mathcal{I}_+(\rho)$*–условию. Тогда существует число* $K > 0$ *такое, что справедливы следующие утверждения:*

1) *Если* $a_n \in A$, $\zeta \in \Omega\left(a_n, \exp\left[-KV(r_n)\right]\right)$, *то*

$$|E_n^A(\zeta)| := \prod_{\substack{r_n/2 < r_k < 3r_n/2 \\ a_k \in A_n}} \left|\frac{a_k - \zeta}{\bar{a}_k - \zeta}\right| \geqslant \exp\left[-KV(r_n)\right].$$

2) *Всякая последовательность* A', *которая* K*–сдвинута при уточненном порядке* ρ *относительно* A, *удовлетворяет* $\mathcal{I}_+(\rho)$*–условию.*

3) *Любой* K*–сдвиг при уточненном порядке* ρ *последовательности* A *взаимно–однозначен.*

4) *Если* $a_k, a_n \in A$ *и* $a_k \neq a_n$, *то*

$$\Omega\left(a_k, \exp\left[-KV(r_k)\right]\right) \cap \Omega\left(a_n, \exp\left[-KV(r_n)\right]\right) = \varnothing.$$

Доказательство. 1) Из условия (5.1) следует существование числа $K > 0$ такого, что для любого $a_n \in A$

$$\prod_{\substack{r_n/2<r_k<3r_n/2\\ \omega\in A_n}} \left|\frac{a_k - a_n}{a_k - \bar{a}_n}\right| \geqslant \exp\left[-KV(r_n)\right].$$

Из последнего неравенства, в частности, получаем

$$\left|\frac{a_k - a_n}{a_k - \bar{a}_n}\right| \geqslant \exp\left[-KV(r_n)\right].$$

Применим лемму 7.1, п.1), с $\delta = \exp\left[-KV(r_n)\right]$. Положим $a = a_k$, $b = a_n$, $\xi, \eta \in E$, $\zeta \in \Omega\left(\eta, \dfrac{1}{2}\exp\left[-KV(|\eta|\right]\right)$. получим

$$\prod_{\substack{|\xi|/2<|\eta|<3|\xi|/2\\ \eta\in E_\xi}} \left|\frac{\xi - \zeta}{\bar{\xi} - \zeta}\right| \geqslant (\delta)^{\ln(\delta/2)/\ln(\delta)} = \frac{1}{2}\exp\left[-KV(|\xi|\right].$$

2) Рассуждая как в п. 1) теоремы, получаем, что существуют числа $C_1, K > 0$ и уточненный порядок $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \rho$, такие, что условие (1.7) выполняется и для любого $\zeta \in E$

$$\prod_{\substack{|\zeta|/2<|\gamma|<3|\zeta|/2\\ \gamma\in E_\zeta}} \left|\frac{\gamma - \zeta}{\gamma - \bar{\zeta}}\right| \geqslant \exp\left[-C_1V(|\zeta|\right].$$

Из последнего неравенства, в частности, получаем

$$\left|\frac{\gamma - \zeta}{\gamma - \bar{\zeta}}\right| \geqslant -C_1V(|\zeta|.$$

Положим $K = C_1$. Пусть $\xi, \eta \in E'$, $\eta \in \dfrac{1}{4}\Omega\left(\gamma, \exp\left[-KV(|\gamma|\right]\right)$, $\xi \in \dfrac{1}{4}\Omega\left(\zeta, \exp\left[-KV(|\zeta|)\right]\right)$. Применяя лемму 7.1, п. 2), с $\delta = \exp\left[-KV(|\xi|\right]$, получим

$$\prod_{\substack{|\xi|/2<|\eta|<3|\xi|/2\\ \eta\in E_\xi}} \left|\frac{\xi - \eta}{\bar{\xi} - \eta}\right| \geqslant (\delta)^{\ln(\delta/2)/\ln(\delta)\cdot\ln(\delta/4)/\ln(\delta/2)} = \frac{1}{4}\exp\left[-KV(|\xi|\right].$$

Утверждения п. 3) и п. 4) следуют из п. 2). Действительно, если $\xi, \eta \in E'$, $\eta \in \dfrac{1}{4}\Omega\left(\gamma, \exp\left[-KV(|\gamma|\right]\right)$, $\xi \in \dfrac{1}{4}\Omega\left(\zeta, \exp\left[-KV(|\zeta|\right]\right)$, то

$$\left|\frac{\xi - \eta}{\bar{\xi} - \eta}\right| \geqslant -C_1V(|\xi| > 0,$$

то есть $\xi \neq \eta$. □

8. Слабо регулярные множества

В статье [11] изучались слабо регулярные множества в верхней полуплоскости в пространстве $[\rho(r),\infty)_+$. Приведем это определение

Определение 8.1. *Последовательность точек* $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$, *называется слабо регулярной последовательностью относительно уточненного порядка* ρ *(или точнее* $WR^+(\rho)$*–множеством), если выполняется одно из следующих условий* (C) *или* (C$'$) :

(C$_+$) 1) *Среди точек множества* A *нет кратных точек и нет точек с одинаковым модулем;*

2) $A\cap C(0,2)=\varnothing$;

3) *выполняется условие*

$$n^+(C(0,r))\leqslant KV(r),\quad K>0\,;$$

4) *существует число* $d>0$, *такое, что для всех точек* $a_n,a_k\in A$ *неравенств* $|a_n|\geq|a_k|$ *влечет соотношение:*

$$|a_n|\geq|a_k|+d\,\mathrm{Im}\,a_k/V(|a_k|).$$

(C$'_+$) 1) *Среди точек множества* A *нет кратных точек и нет точек с одинаковым модулем;*

2) $A\cap C(0,2)=\varnothing$;

3) *выполняется условие*

$$n^+(C(0,r))\leqslant KV(r),\quad K>0\,;$$

4) *существует число* $d>0$ *такое, что кружки радиусов*

$$r_n=d(\sin(\arg a_n))^{1/2}|a_n|^{1-\frac{\rho(|a_n|)}{2}}$$

с центрами в точках a_n *не пересекаются.*

Множества удовлетворяющие условию (C$_+$) играли важную роль в работах [12], [13].

Используя геометрический критерий интерполяционности последовательности, была доказана следующая теорему.

Теорема 8.1. *Пусть последовательность* $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A\in\mathbb{C}_+$, *является* $WR^+(\rho)$*–множеством. Тогда* A *— интерполяционная последовательность в пространстве* $[\rho,\infty)_+$.

9. Задача интерполяции в случае финитных последовательностей

Напомним, что последовательность комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *финитной*, если все члены этой последовательности, начиная с некоторого, раны нулю, т.е. $b_n=0$, если $n\geqslant n_0\geqslant 1$.

Задачи интерполяции в пространствах целых функций занимают для финитных последовательностей особое место и связаны с распределением нулей целых функций. В частности, в работе Братищева и Коробейника [14] рассматривалась задача кратной интерполяции в пространстве $[\rho,\infty)$ целых функций конечного порядка (включая и нулевой) и нормального типа для случая финитных последовательностей. Результат А.В. Братищева и Ю.Ф. Коробейника для простой интерполяции можно сформулировать следующим образом.

Теорема 9.1 (А.В. Братищев, Ю.Ф. Коробейник). *Следующие три утверждения эквивалентны.*

1) *Интерполяционная задача* 1.2 *в пространстве* $[\rho, \infty)$ *разрешима для любой финитной последовательности.*

2) *Множество узлов интерполяции* $\{a_n\}_{n=n_0}\infty$ *удовлетворяет условию:*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n(r)}{rV'(r)} < \infty,$$

где $n(r)$ *— число точек последовательности* $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ *в круге* $|z| < r$.

3) *Интерполяционная задача (I) в пространстве* $[\rho, \infty)$ *разрешима хотя бы для одной ненулевой финитной последовательности.*

Мы рассмотрим проблему простой интерполяции для финитных последовательностей в пространстве $[\rho, \infty)_+$.

Теорема 9.2. *Следующие три утверждения эквивалентны.*

1) *Интерполяционная задача (*1.2*) в пространстве* $[\rho, \infty)_+$ *разрешима для любой финитной последовательности.*

2) *Выполняется условие* (1.1).

3) *Интерполяционная задача (*1.2*) в пространстве* $[\rho, \infty)_+$ *разрешима хотя бы для одной ненулевой финитной последовательности.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) тривиальна.

Докажем импликацию 3) $\Rightarrow$ 2). Пусть интерполяционная задача 1.2 разрешима в пространстве $[\rho, \infty)_+$ для ненулевой финитной последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n = 0$ для всех $n > n_0$ и $b_{n_0} \neq 0$. Пусть функция $F \in [\rho, \infty]_+$, такая, что

$$F(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, n_0, \quad F(a_n) = 0, \quad n = n_0 + 1, \dots .$$

Множество нулей $\{z_n\}$ функции содержит последовательность $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ и по теореме 1.2 удовлетворяет условию (1.1). Поскольку лишь конечное число членов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не принадлежит множеству $\{z_n\}$, то и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ также удовлетворяет условию (1.1).

Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) доказана.

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть условие (1.1) выполняется. Тогда каноническое произведение $E(z)$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству $[\rho, \infty)_+$. Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — финитная последовательность. Поскольку ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(z)b_n}{(z - a_n)E'(a_n)}$$

содержит лишь конечное число отличных от нуля членов, то функция $F(z)$ принадлежит пространству $[\rho, \infty)_+$. Функция $F(z)$ решает интерполяционную проблему (1.2).

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) доказана. Теорема полностью доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Гришин. *Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I* // Мат. физ. анал. геом. **1**:2, 193–215 (1994).
2. А.Ф. Леонтьев. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* // Докл. Акад. наук СССР **61**, 785–787 (1948).
3. А.Ф. Леонтьев. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа* // Докл. Акад. наук СССР **66**, 153–156 (1949).

4. А.Ф. Леонтьев. *К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка* // Мат. сб. **41**:83, 81–96 (1957).
5. К.Г. Малютин, *Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа* // Мат. сб. **184**:2, 129–144 (1993).
6. К.Г. Малютин. *Модифицированный метод Джонса для решения задач кратной интерполяции в полуплоскости.* В: *Исследования по математическому анализу* **3**, ВНЦ РАН и РСО-А (Итоги науки. ЮФО), Владикавказ, 143–164 (2009).
7. К.Г. Малютин, О.А. Боженко. *Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости* // Уфим. мат. ж. **6**:1, 18–29 (2014).
8. K.G. Malyutin, A.L. Gusev. *The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane* // Probl. Anal. Issues Anal., Spec. Iss. **7(25)**, 113–123 (2018).
9. K.G. Malyutin, M.V. Kabanko. *Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-plane* // Lobachevskii J. Math. **41**:11, 2211–2222 (2020).
10. С.А. Виноградов, В.П. Хавин. *Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций* // Зап. научн. семин. Ленингр. отд. мат. инст. Стеклова **47**, 15–54 (1974).
11. K.G. Malyutin, O.A. Bozhenko. *Weakly regular sets* // Istanb. Univ., Sci. Fac., J. Math. Phys. Astron. **4**, 1–8 (2013).
12. К.Г. Малютин. *О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I* // Изв. Росс. Акад. наук, сер. мат. **59**:4, 125–154 (1995).
13. К.Г. Малютин. *О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II* // Изв. Росс. Акад. наук, сер. мат. **59**:5, 103–126 (1995).
14. А.В. Братищев, Ю.Ф. Коробейник. *Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка* // Изв. Акад. наук СССР, Сер. мат. **40**:5, 1102–1127 (1976).

Михаил Владимирович Кабанко,
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия
E-mail: `kabankom@gmail.com`

Константин Геннадьевич Малютин,
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия
E-mail: `malyutinkg@gmail.com`