УДК 519.2+531.19

КРАЙНИЕ ТОЧКИ ВПОЛНЕ ВЫПУКЛОЙ СТРУКТУРЫ СОСТОЯНИЙ

С.Г. ХАЛИУЛЛИН

Аннотация. Хорошо известно, что множество состояний определённой квантовомеханической системы является замкнутым с точки зрения операционного подхода, если мы хотим образовывать смеси состояний или выпуклые комбинации. То есть, если s_1 и s_2 являются состояниями, то так же и $\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2$, где $0 < \lambda < 1$, должны быть состояниями. Мы можем определить выпуклую комбинацию элементов в линейном пространстве, но, к сожалению, в общем случае линейное пространство является искусственным для множества состояний и не имеет физического смысла, но операция формирования смесей состояний имеет естественный смысл. По этой причине будет дано абстрактное определение смесей, которое не зависит от понятия линейности. Мы будем называть это пространство выпуклой структурой.

В работе будут рассмотрены пространства состояний, пространства обобщённых состояний, в которых выделяются чистые состояния, задаются операции и эффекты, ассоциированные с операциями.

Также мы рассмотрим ультрапроизведения последовательностей этих структур, операций и эффектов.

Ключевые слова: Обобщённые состояния, выпуклая структура, операция, ультрапроизведения.

Mathematics Subject Classification: 81Qxx+46M07

1. Введение

Разные авторы дают различные определения состояния или пространства состояний. Например, у Сигала состояние по определению есть действительная функция на множестве ограниченных наблюдаемых, которая обладает некоторыми свойствами. С точки зрения Дж. Макки ([1]), это определение допускает слишком много состояний, поскольку не каждое состояние в смысле Сигала ставит в соответствие каждой ограниченной наблюдаемой некоторое распределение вероятностей. Состояния Сигала — это все пределы таких состояний, которые действительно ставят в соответствие каждой наблюдаемой вероятностное распределение. В применениях такие идеальные «предельные состояния» часто бывают удобными.

С другой стороны, состояние определяется как некоторая функция, действующая из структуры событий на единичный отрезок (С. Гаддер [2]). При этом значение этой функции интерпретируется как вероятность того, что некоторое событие произойдёт в текущем состоянии.

Наконец, пространство состояний задаётся аксиоматически, при этом оно является выпуклой структурой и даже полным метрическим пространством. В статье рассмотрены пространства состояний и обобщённых состояний.

Такие различные определения состояний делают исследования более гибкими.

S.G. Khaliullin, Extreme points for a total convex structure of states.

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Поступила 1 ноября 2023 г.

В работе также исследуются различные подходы к понятию операции в пространстве состояний (см. [2], [3]), чистые операции и эффекты, ассоциированные с операциями.

Работа посвящена определению и исследованию ультрапроизведений абстрактных пространств состояний. Показано, что вполне выпуклые структуры состояний устойчивы относительно ультрапроизведений. Также рассмотрены ультрапроизведения последовательности операций, при этом доказано, что ультрапроизведение чистых состояний в общем случае не является чистой операцией.

2. Понятие смеси состояний. Предварительные сведения

Напомним вначале некоторые определения.

Определение 2.1 (см., например, S. Gudder, [2]). *Пусть $\mathcal{E}$ — непустое множество, S — множество функций из $\mathcal{E}$ на единичный интервал $[0,1]$. Пара $(\mathcal{E},S)$ называется структурой событий, если выполняются следующие две аксиомы:*

A1. Если $s(a)=s(b)$ для каждого $s\in S$, то $a=b$;

A2. Если $a_1,a_2,\ldots\in\mathcal{E}$ удовлетворяют условию $s(a_i)+s(a_j)\leqslant 1$, $i\neq j$ для каждого $s\in S$, то существует такой элемент $b\in\mathcal{E}$, что

$$s(b)+s(a_1)+s(a_2)+....=1$$

для каждого $s\in S$.

Исследование свойств структур событий и их ультрапроизведений можно найти в работе [6].

Определение 2.2 (см., например, S. Gudder, [2]). *Пусть $(\mathcal{E},S)$ является структурой событий. Будем называть элементы множества $\mathcal{E}$ событиями, а элементы множества S — состояниями. Множество состояний S называется выпуклой структурой, если оно обладает следующими двумя свойствами:*

1. для любых положительных чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, таких, что $\sum_{i=1}^n\lambda_i = 1$, и любых состояний $s_1,s_2,\ldots,s_n$ существует единственный элемент

$$\langle\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n;s_1,s_2,\ldots,s_n\rangle\in S;$$

2. $\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_n;s,s,\ldots,s\rangle=s$.

Определённое таким образом состояние $\langle\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n;s_1,s_2,\ldots,s_n\rangle$ называется смесью состояний $s_1,s_2,\ldots,s_n$. Для смесей двух состояний мы будем использовать более простое обозначение $\langle\lambda,1-\lambda;s,t\rangle=\langle\lambda;s,t\rangle$. Состояние $s\in S$ называется чистым, если оно не может быть записано в виде $s=\langle\lambda;t_1,t_2\rangle$ для некоторых $t_1\neq t_2$.

Введём в выпуклой структуре S понятие расстояния. Близость состояний s и t может быть измерена путём сравнения смесей $\langle\lambda;s_1,s\rangle$ и $\langle\lambda;t_1,t\rangle$ с другими состояниями.

Определение 2.3. *Функцию расстояния $\sigma(s,t)$ для двух состояний $s,t\in S$ определим следующим образом: если существуют два состояния $s_1,t_1\in S$ такие, что выполняется условие, $\langle\lambda;s_1,s\rangle=\langle\lambda;t_1,t\rangle$, то*

$$\sigma(s,t)=\inf\{0<\lambda\leqslant 1:\langle\lambda;s_1,s\rangle=\langle\lambda;t_1,t\rangle\};$$

в противном случае, $\sigma(s,t)=1/2$.

В общем случае эта функция не является метрикой.

Определение 2.4. *Выпуклая структура S называется σ–выпуклой структурой, если выполняются следующие условия:*

1. Если $s_n\in S$ и $\lim_{n,m\to\infty}\sigma(s_n,s_m)=0$, то существует единственное состояние $s\in S$, такое, что $\lim_{n\to\infty}\sigma(s_n,s)=0$.

2. Если $\lambda_i>0$, $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i=1$, $t_1,t_2,\dots\in S$ и

$$s_n=\left\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i;t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}\right\rangle,$$

то $\lim_{n,m\to\infty}\sigma(s_n,s_m)=0$.

Таким образом, мы можем рассматривать смеси бесконечного (счётного) числа состояний.

Определение 2.5. *Отображение* $f:S\to\mathbb{R}$ *называется аффинным функционалом, если*

$$f(\langle\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n;s_1,s_2,\ldots,s_n\rangle)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(s_i)$$

для любого набора состояний $s_1,\ldots,s_n$ *и положительных чисел* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, *для которых* $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$.

Заметим, что множество аффинных функционалов S^* является линейным пространством относительно поточечных операций. Зададим «нулевой» и «единичный» аффинные функционалы: $\mathbf{0}(s) = 0$, $\mathbf{e}(s) = 1$ для всех $s\in S$. Определим на S^* отношение частичного порядка: $f\leqslant g \Leftrightarrow f(s)\leqslant g(s)$ для всех $s\in S$. Функционал $f\in S^*$ называется эффектом, если $\mathbf{0}\leqslant f\leqslant \mathbf{e}$. Множество эффектов обозначим $\mathcal{E}(S)$. Оно образует выпуклое подмножество линейного пространства S^*.

Определение 2.6. *Вполне выпуклая структура — это* σ*–выпуклая структура, обладающая следующим свойством: если* $f(s)=f(t)$ *для каждого эффекта* f, *то* $s=t$.

Смысл введения последнего определения состоит в том, что оно не выполняется в некоторых квантовых системах (см. B. Mielnik [7]). Хорошо известно (см. [2]), что если выполнено определение 2.6, то σ является метрикой, а пространство (S,σ) становится полным метрическим пространством.

Крайние точки выпуклого подмножества $\mathcal{E}(S)$ линейного пространства S^* называются предложениями. Множество предложений $\mathcal{P}(S)\subseteq S^*$ наследует порядок S^* и поэтому является частично упорядоченным множеством с наименьшим элементом $\mathbf{0}$ и наибольшим элементом $\mathbf{e}$.

Теперь мы наделим S^* слабой *–топологией. Это естественная топология для S^*, поскольку в этой топологии последовательность эффектов f_n сходится к эффекту f тогда и только тогда, когда $f_n(s)\to f(s)$ для каждого состояния s, $n\to\infty$.

Пусть S — выпуклая структура, мы определим множество $S_+ = \{(\alpha,s) : \alpha\geqslant 0, s\in S\}$. Положим $(\alpha,s)=(\beta,t)$, если $\alpha=\beta\neq 0$ и $s=t$, и $(0,s)=(0,t)=0$ для всех $s,t\in S$. Если S — множество состояний, то мы будем называть S_+ множеством обобщённых состояний. Далее определим выпуклую структуру на S_+, полагая:

$$\langle\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n;(\alpha_1,s_1),\ldots,(\alpha_n,s_n)\rangle=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i,\left\langle\frac{\lambda_1\alpha_1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i},\ldots,\frac{\lambda_n\alpha_n}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i};s_1,\ldots,s_n\right\rangle\right).$$

Здесь мы идентифицируем элемент вида $(1,s)\in S_+$ как элемент $s\in S$. Точно также, как в случае пространства состояний S, пространство обобщённых состояний можно рассматривать как полное метрическое пространство.

Обозначим через S_+^* множество аффинных функционалов на S_+. Известно ([2]), что если $f\in S^*$, то существует единственное расширение $\hat f\in S_+^*$, и если $\hat f\in S_+^*$, то $\hat f((\alpha,s))=\alpha f(s)$ для всех $(\alpha,s)\in S_+$. В частности, существует единственное расширение единичного функционала $\hat{\mathbf{e}}\in S_+^*$ и $\hat{\mathbf{e}}((\alpha,s))=\alpha$.

Определение 2.7. *Операцией называется аффинное отображение* $F:S_+\to S_+$, *удовлетворяющее условию*

$$\hat{\mathbf{e}}(F(w))\leqslant\hat{\mathbf{e}}(w) \tag{2.1}$$

для всех $w=(\alpha,s)\in S_+$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Отметим здесь, что операция описывает изменение состояния, связанное с некоторым внешним воздействием, и операция сохраняет смеси состояний. Если F — такая операция, что для

$$(\alpha,t)\in S_+,\quad F((\alpha,t))=(\alpha',t'),$$

то она может быть рассмотрена как отображение, состоящее из двух частей: $\alpha \to \alpha'$, $t \to t'$. Часть $t \to t'$ представляет собой «искажение состояния», а $\alpha \to \alpha'$ — «степень ослабления состояния», вызванную воздействием. Для $s \in S$ будем интерпретировать $\hat{e}(F(s))$ как вероятность передачи состояния s, обусловленную операцией F.

Для операции F определим линейное отображение $F^* : S_+^* \to S_+^*$ как

$$(F^* \hat{f})(w) = \hat{f}(F(w))$$

для каждого $\hat{f} \in S_+^*$, $w \in S_+$.

С каждой операцией F свяжем её эффект, определяемый как

$$f = F^*(\hat{\mathbf{e}})|S.$$

Поскольку $\hat{\mathbf{e}}(F(s)) = (F^* \hat{\mathbf{e}})(s) = f(s)$ для каждого $s \in S$, эффект f определяет только вероятность передачи состояния. Таким образом, сама операция содержит больше информации, чем соответствующий её эффект.

Так же, как и в случае обычных состояний, вводится понятие крайних точек (чистых состояний) в пространстве обобщённых состояний S_+.

Определение 2.8. *Операция называется чистой, если она преобразует чистые состояния в чистые состояния.*

Пример 2.1. *Пусть H — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, и S — множество операторов плотности на H. В этом случае S представляет собой σ–выпуклую структуру (см. [2]). Рассмотрим множество ограниченных самосопряжённых операторов A на H, удовлетворяющих условию $0 \leqslant A \leqslant I$. Положим $\mathbf{e} = I$. Определим эффект*

$$A(s) = \mathbf{Tr}(As).$$

Известно (I. Namioka, [4], E. Davies, [3]), что такие эффекты описывают все эффекты на S, а эффект A является предложением тогда и только тогда, когда A является проектором. Обобщённое состояние $w = (\alpha, s) \in S_+$ задаётся здесь как оператор αs, $0 < \alpha \leqslant 1$, $s \in S$. Таким образом, класс S_+ можно рассматривать как класс операторов с положительным следом.

В этом случае

$$\hat{\mathbf{e}}(w) = \mathbf{Tr}(w) = \alpha \mathbf{Tr}(s).$$

Подойдем теперь к концепции операции под несколько иным углом зрения.

Определение 2.9 ([3])**.** *Пусть S_1 и S_2 — пространства состояний в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 (конечномерных или бесконечномерных), являющиеся σ–выпуклыми структурами соответственно. Операция на S_1 определяется как положительное линейное отображение $T : S_1 \to S_2$, удовлетворяющее условию*

$$\mathbf{e}_2(T(s)) \leqslant \mathbf{e}_1(s) \quad \text{или} \quad (\,\mathbf{Tr}(T(s)) \leqslant \mathbf{Tr}(s)\,)$$

для всех $s \in S_1$, где $\mathbf{e}_1$ — единица в S_1, $\mathbf{e}_2$ — единица в S_2.

Если T является чистой операцией, то структура этой операции хорошо известна ([3]), а именно, представляется в одной из следующих форм:

$$T(s) = BsB^*,$$

или

$$T(s) = \mathbf{Tr}(sB)|\psi >< \psi|,$$

где $B : H_1 \to H_2$ линейный ограниченный оператор, $\psi \in H_2$. В последнем случае операция T является вырожденной, то есть отображение T переводит все состояния $s \in S_1$ в одно–единственное состояние в S_2, определяемое вектором $\psi \in H_2$. В этих случаях чистая операция обладает свойством $\mathbf{e}_2(T(s)) = \mathbf{e}_1(s)$, или, другими словами, чистая операция сохраняет эффект.

3. Ультрапризведения вполне выпуклых структур

Определение 3.1. *Пусть (S_n, σ_n) — последовательность вполне выпуклых структур, $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Рассмотрим $\prod_{n=1}^{\infty} S_n$ — декартово произведение последовательности (S_n) и введём в нём отношение эквивалентности, полагая*

$$(s_n) \sim (t_n) \Leftrightarrow \lim_{\mathscr{U}} \sigma_n(s_n, t_n) = 0.$$

Множество всех классов эквивалентности $\prod_{n=1}^{\infty} S_n$, определённые этим соотношением, мы будем называть ультрапроизведением последовательности (S_n) и обозначать $S_{\mathscr{U}} = (S_n)_{\mathscr{U}}$.

В ультрапроизведении $(S_n)_{\mathscr{U}}$ естественным образом введём метрику $\sigma_{\mathscr{U}}$, полагая

$$\sigma_{\mathscr{U}}(s,t) = \lim_{\mathscr{U}} \sigma_n(s_n, t_n), \qquad t = (t_n)_{\mathscr{U}}, \qquad s = (s_n)_{\mathscr{U}},$$

и эффекты

$$f_{\mathscr{U}}(s) = \lim_{\mathscr{U}} f_n(s_n), \qquad f_n \in \mathcal{E}(S_n), \qquad s = (s_n)_{\mathscr{U}}.$$

Пара $(S_{\mathscr{U}}, \sigma_{\mathscr{U}})$ называется ультрапроизведением последовательности вполне выпуклых структур.

Теорема 3.1. *Пусть $(S_n, \sigma_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность вполне выпуклых структур, $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Тогда ультрапроизведение $(S_{\mathscr{U}}, \sigma_{\mathscr{U}})$ является вполне выпуклой структурой.*

Доказательство. Покажем, что ультрапроизведение сохраняет структуру вполне выпуклого пространства.

Смеси состояний вводятся естественным образом: для любых положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, таких, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, и любых состояний $(s_n^1)_{\mathscr{U}}, (s_n^2)_{\mathscr{U}}, \ldots, (s_n^m)_{\mathscr{U}}$ положим

$$\left\langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; (s_n^1)_{\mathscr{U}}, (s_n^2)_{\mathscr{U}}, \ldots, (s_n^m)_{\mathscr{U}} \right\rangle = \left\langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; s_n^1, s_n^2, \ldots, s_n^m \right\rangle_{\mathscr{U}} \in S_{\mathscr{U}}.$$

При этом очевидно, что $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_m; (s_n)_{\mathscr{U}}, (s_n)_{\mathscr{U}}, \ldots, (s_n)_{\mathscr{U}} \rangle = (s_n)_{\mathscr{U}}$.

Рассмотрим далее такую последовательность $((s_n^k)_{\mathscr{U}})_{k\geqslant 1}$, что

$$\lim_{k,m\to\infty} \sigma_{\mathscr{U}}((s_n^k)_{\mathscr{U}}, (s_n^m)_{\mathscr{U}}) = 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $U \in \mathscr{U}$, существует $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \in U$ и для всех $k > N$, $m > N$ выполнено $\sigma_n(s_n^k, s_n^m) < \varepsilon$. Тогда для всех $n \in U$ существует такое состояние s_n, что $\lim_{k\to\infty} \sigma_n(s_n^k, s_n) = 0$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\mathscr{U}}((s_n^k)_{\mathscr{U}}, (s_n)_{\mathscr{U}}) = 0.$$

Это показывает, что ультрапроизведение σ–выпуклых структур является σ–выпуклой структурой. Из определения ультрапроизведения $(S_n)_{\mathscr{U}}$ и эффекта на нём непосредственно следует, что $(S_{\mathscr{U}}, \sigma_{\mathscr{U}})$ является вполне выпуклой структурой. □

Обозначим через $\hat{\sigma}$ метрику в S_+. Поскольку $(S_+, \hat{\sigma})$ является полной выпуклой структурой относительно этой метрики, определение ультрапроизведения последовательности пространств обобщённых состояний совпадает с предыдущим определением. Заметим, что в этом случае

$$S_{\mathscr{U}+} = S_{+\mathscr{U}} = (\tilde{\mathbb{R}}_+)_{\mathscr{U}} \times S_{\mathscr{U}},$$

где $(\tilde{\mathbb{R}}_+)_{\mathscr{U}} = \{(\alpha_n)_{\mathscr{U}} : \alpha_n \geqslant 0, \sup_n \alpha_n < \infty\}$.

Теорема 3.2. *Пусть $(S_{n+}, \hat{\sigma}_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность пространств обобщённых состояний, $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Тогда ультрапроизведение $(S_{\mathscr{U}+}, \hat{\sigma}_{\mathscr{U}})$ является вполне выпуклой структурой.*

Доказательство. Следует из теоремы 3.1. □

Определение 3.2. *Пусть заданы две последовательности пространств состояний* $(S_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ *и* $(S_n^{(2)})_{n\geqslant 1}$*, являющихся вполне выпуклыми структурами,* $T_n : S_n^{(1)} \to S_n^{(2)}$ *— операции,* $\mathscr{U}$ *— нетривиальный ультрафильтр в множестве натуральных чисел* $\mathbb{N}$*. Ультрапроизведение последовательности операций* (T_n) *определим как отображение* $T_{\mathscr{U}} : S_{\mathscr{U}}^{(1)} \to S_{\mathscr{U}}^{(2)}$*, где*

$$T_{\mathscr{U}}(s_{\mathscr{U}}^{(1)}) = (T_n(s_n^{(1)}))_{\mathscr{U}}, \qquad s_{\mathscr{U}}^{(1)} = (s_n^{(1)})_{\mathscr{U}}.$$

Легко видеть, что ультрапроизведение последовательности операций является операцией. Естественно встаёт вопрос: будет ли ультрапроизведение последовательности чистых операций чистой операцией? Оказывается, что в общем случае ответ отрицательный. Это показывает следующий контрпример. Построим такие две последовательности пространств состояний и последовательность чистых операций, что ультрапроизведение последних не является чистой операцией.

Пусть $S_n^{(1)}$ — множество $H_n^{(1)}$–квазиинвариантных вероятностных мер, заданных на измеримом пространстве $(\Omega_n^{(1)}, \Sigma_n^{(1)}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, где $H_n^{(1)} = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \infty\}$, $n \in \mathbb{N}$. Хорошо известно, что гауссовсие меры являются $H_n^{(1)}$–квазиинвариантными и эргодичными относительно сдвигов на элементы $H_n^{(1)}$, а, значит, (см., например, [5]), являются крайними точками в множестве $H_n^{(1)}$–квазиинвариантных мер, то есть, в множестве $S_n^{(1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Пара $(\Sigma_n^{(1)}, S_n^{(1)})$ является структурой событий (см., например, [6]), при этом $S_n^{(1)}$ является вполне выпуклой структурой, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть далее $S_n^{(2)}$ — множество $H_n^{(2)}$–квазиинвариантных вероятностных мер $\mu^n = \prod_{k=1}^n \mu_k$, $\mu_k \in S_n^{(1)}$, заданных на измеримом пространстве $(\Omega_n^{(2)}, \Sigma_n^{(2)}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, где $H_n^{(2)} = \{x_n \in \mathbb{R}^n : \|x_n\| < \infty\}$, $n \in \mathbb{N}$. При этом гауссовские меры также являются крайними точками $S_n^{(2)}$, поскольку они $H_n^{(2)}$–эргодичны, $n \in \mathbb{N}$. Пара $(\Sigma_n^{(2)}, S_n^{(2)})$ является структурой событий, $S_n^{(2)}$ является вполне выпуклой структурой, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим чистую операцию $T_n : S_n^{(1)} \to S_n^{(2)}$, полагая

$$T_n(\mu_n) = \mu^n,$$

где μ_n — гауссовская мера из $S_n^{(1)}$ с параметрами $N(0,1)$, μ^n — гауссовская мера из $S_n^{(2)}$ с параметрами $N(0, I_n)$, где I_n — единичная матрица, $(n \in \mathbb{N})$.

Далее рассмотрим ультрапроизведения последовательностей двух структур событий $(\Sigma_n^{(1)}, S_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ и $(\Sigma_n^{(2)}, S_n^{(2)})_{n\geqslant 1}$ относительно нетривиального ультрафильтра $\mathscr{U}$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. В этом случае пространства состояний представляются как

$$S_{\mathscr{U}}^{(1)} = \{\mu_{\mathscr{U}}^{(1)} : \mu_{\mathscr{U}}^{(1)}(\cdot) = \lim_{\mathscr{U}} \mu_n(\cdot)\}, \qquad S_{\mathscr{U}}^{(2)} = \{\mu_{\mathscr{U}}^{(2)} : \mu_{\mathscr{U}}^{(2)}(\cdot) = \lim_{\mathscr{U}} \mu^n(\cdot)\}$$

(подробнее см. [6]). Тогда мера $\mu_{\mathscr{U}}^{(1)}$ является $(\tilde{H}_n^{(1)})_{\mathscr{U}}$–квазиинвариантной, где

$$\tilde{H}_n^{(1)} = \{x_n \in \mathbb{R} : \sup_n |x_n| < \infty\},$$

мера $\mu_{\mathscr{U}}^{(2)}$ является $(\tilde{H}_n^{(2)})_{\mathscr{U}}$–квазиинвариантной,

$$\tilde{H}_n^{(2)} = \{x_n \in \mathbb{R}^n : \sup_n \|x_n\| < \infty\}.$$

Мера $\mu_{\mathscr{U}}^{(1)}$ является также и $(\tilde{H}_n^{(1)})_{\mathscr{U}}$–эргодической, следовательно, крайней точкой множества $S_{\mathscr{U}}^{(1)}$, но мера $\mu_{\mathscr{U}}^{(2)}$ не является крайней точкой $S_{\mathscr{U}}^{(2)}$, поскольку не является $(\tilde{H}_n^{(2)})_{\mathscr{U}}$–эргодической (см. [5]).

Зададим операцию $T_{\mathscr{U}} : (S_n^{(1)})_{\mathscr{U}} \to (S_n^{(2)})_{\mathscr{U}}$, полагая $T_{\mathscr{U}}(\cdot) = \lim_{\mathscr{U}} T_n(\cdot)$. Тогда ультрапроизведение чистых операций

$$T_{\mathscr{U}}(\mu_{\mathscr{U}}^{(1)}) = \lim_{\mathscr{U}} T_n(\mu_n) = \lim_{\mathscr{U}} \mu^n = \mu_{\mathscr{U}}^{(2)}$$

не является чистой операцией. Сформулируем результат.

Теорема 3.3. *Существуют такие две последовательности пространств состояний и последовательность чистых операций, что ультрапроизведение последних не является чистой операцией.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дж. Макки. *Лекции по математическим основам квантовой механики.* М.: Редакция литературы по математическим наукам (1965).
2. S. Gudder. *Stochastic Methods in Quantum Mechanics.* Dover Publications (2014).
3. E.B. Davies. *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, London (1976).
4. I. Namioka. *Partially ordered linear topological spaces.* Mem. Amer. Math. Soc. **24** (1957).
5. D.H. Mushtari, S.G. Haliullin. *Linear spaces with a probability meassure, ultraproducts and contiguity* // Lobachevskii J Math. **35**:2, 138–146 (2014).
6. S.G. Haliullin. *Ultraproducts of quantum mechanical systems* // Ufa Math. J. **14**:2, 94–100 (2022).
7. B. Mielnik. *Generalized quantum mechanics* // Commun. Math. Phys. **37**, 221–256 (1974).

Самигулла Гарифуллович Халиуллин,
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: Samig.Haliullin@kpfu.ru