ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 2 (2024). С. 67-76.

УДК 517.5

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2 И ЗНАЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

М.Ш. ШАБОЗОВ, Д.К. ТУХЛИЕВ

Аннотация. Пусть $A(U)$ — множество аналитических в круге $U := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ функций, $B_2 := B_2(U)$ — пространство функций $f \in A(U)$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi}\iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $d\sigma$ — элемент площади, а интеграл понимается в смысле Лебега.

В работе изучаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением функций $f \in A(U)$. Получен ряд точных теорем и вычислены значения различных n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка r-й производной $f^{(r)}$ в пространстве B_2.

Ключевые слова: пространство Бергмана, экстремальные задачи, наилучшее полиномиальное приближение, n-поперечники.

Mathematics Subject Classification: 41A17, 41A25

1. Введение

Вопросы наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_p, $p \geqslant 1$, изучались, например, в работах [1]-[15]. Здесь мы рассматриваем некоторые вопросы среднеквадратического приближения комплексных функций в пространстве B_2 и для некоторых классов функций вычислим значения различных n-поперечников в B_2.

Далее будем пользоваться обозначениями из [16].

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел. Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге U.

Определение 1.1 ([2]). *Говорят, что $f \in A(U)$ принадлежит пространству B_2, если*

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi}\iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Производную r-го порядка функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in A(U) \tag{1.1}$$

M.Sh. Shabozov, D.K. Tukhliev, On mean–square approximation of functions in Bergman space B_2 and value of widths of some classes of functions.

Поступила 16 июня 2023 г.

определим, как обычно,

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r}{dz^r}f(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

где

$$\alpha_{k,r} = k!/(k-r)!, \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad k > r; \quad \alpha_{k,0} \equiv 1, \quad \alpha_{k,1} \equiv k.$$

Символом $B_2^{(r)}(z \in \mathbb{Z}_+, B_2^{(0)} = B_2)$ обозначим множество функций $f \in B_2$, производная r-го порядка $f^{(r)}(z)$ которых также принадлежит B_2:

$$B_2^{(r)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty \right\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство комплексных алгебраических многочленов степени n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf \left\{ \|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n \right\} \tag{1.3}$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f \in B_2$ подпространством $\mathcal{P}_n$. Хорошо известно [17, с. 203], что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

где T_{n-1} — частная сумма порядка $n-1$ ряда (1.1).

Представляя норму функции $f \in B_2$ в более удобном виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

символом

$$\Delta_h^m(\rho e^{it}) := \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим конечную разность m-го порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t с шагом h. Равенством

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|\Delta_h^m f(\rho e^{it})\right|^2 \rho d\rho dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

обозначим норму разности m-го порядка функции $f \in B_2$.

Модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in B_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f, \tau)_2 := \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h| \leqslant \tau \right\}. \tag{1.5}$$

Применяя формулу (1.5) к функции (1.2), после несложных вычислений получаем

$$\omega_m^2(f^{(r)}, \tau)_2 = 2^m \sup_{|h| \leqslant \tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m. \tag{1.6}$$

Нам далее понадобится следующая

Лемма 1.1 ([13]). *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.7}$$

Верхнюю грань в (1.7) реализует функция $f_0(z) = z^n \in L_2^{(r)}$.

Основными результатами данной статьи являются следующие нижеприведенные теоремы.

Теорема 1.1. *При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < (n-r)h \leqslant \pi/2$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{\int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)}, t)_2 dt\right\}^{\frac{m}{2}}} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{\frac{n-r}{2[(n-r)\tau - \sin(n-r)\tau]}\right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Без ограничения общности будем рассматривать функции $f \in B_2$, у которых коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то есть введем в рассмотрение функции вида

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k \in B_2.$$

Для таких функций

$$\|\Delta_t^m(f)\|_2^2 = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1 - \cos kt)^m. \tag{1.9}$$

Учитывая (1.4) и (1.9), рассмотрим разность

$$E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kt = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1 - \cos kt)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{m}} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{\frac{1}{m}} (1 - \cos kt).$$

Применив к правой части полученного соотношения неравенство Гельдера для сумм полагая $p := m/(m-1)$, $q := 1/m$ а также учитывая равенство (1.9) имеем

$$E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kt \leqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{m}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1 - \cos kt)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \left(E_{n-1}^2(f)_2\right)^{1-\frac{1}{m}} \frac{1}{2} \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1 - \cos kt)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \left(E_{n-1}^2(f)_2\right)^{1-\frac{1}{m}} \frac{1}{2} \|\Delta_t^m(f)\|_2^{\frac{2}{m}}$$

$$\leqslant E_{n-1}^{2-\frac{2}{m}}(f)_2 \frac{1}{2} \omega_m^{\frac{2}{m}}(f, t)_2.$$

Таким образом, для любой функции $f \in B_2$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kt + E_{n-1}^{2-\frac{2}{m}}(f)_2 \frac{1}{2} \omega_m^{\frac{2}{m}}(f, t)_2. \tag{1.10}$$

Интегрируя обе части неравенства (1.10) по переменному t от 0 до τ, и поделив полученный результат на τ будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \frac{\sin k\tau}{k\tau} + E_{n-1}^{2-\frac{2}{m}}(f)_2 \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f,t)_2 dt. \tag{1.11}$$

Пользуясь тем, что [19]

$$\max_{u \geqslant nt} \left| \frac{\sin u}{u} \right| = \frac{\sin nt}{nt} \quad (0 \leqslant nt \leqslant \pi/2)$$

из неравенства (1.11) получаем

$$\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right) E_{n-1}^2(f)_2 \leqslant E_{n-1}^{2-\frac{2}{m}}(f)_2 \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f,t)_2 dt,$$

откуда

$$E_n(f)_2 \leqslant \left\{ \frac{n}{2(n\tau - \sin n\tau)} \right\}^{\frac{m}{2}} \left\{ \int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f,t)_2 dt \right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{1.12}$$

Если функция $f \in B_2^{(r)}$, то из (1.12) следует, что

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_2 \leqslant \left\{ \frac{n-r}{2[(n-r)\tau - \sin(n-r)\tau]} \right\}^{\frac{m}{2}} \left\{ \int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},t)_2 dt \right\}^{\frac{m}{2}}$$

и применяя формулу

$$E_{n-1}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_2,$$

вытекающую из равенства (1.7), имеем

$$\begin{gathered} E_{n-1}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{n-r}{2[(n-r)\tau - \sin(n-r)\tau]} \right\}^{\frac{m}{2}} \\ \left\{ \int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},t)_2 dt \right\}^{\frac{m}{2}}, \end{gathered} \tag{1.13}$$

где $0 < (n-r)\tau \leqslant \pi/2$. Из (1.13) следует оценка величины, расположенной в левой части равенства (1.8)

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},t)_2 dt \right\}^{\frac{m}{2}}} \leqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{n-r}{2[(n-r)\tau - \sin(n-r)\tau]} \right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{1.14}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины введем в рассмотрение функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, для которой в силу (1.3) и (1.6) имеем

$$E_{n-1}(f_0)_2 = 1/\sqrt{n+1}, \tag{1.15}$$

$$\omega_m^2(f_0^{(r)},t)_2 = 2^m \frac{\alpha_{n,r}}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)^m, \tag{1.16}$$

и поскольку

$$\left\{ \int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f_0^{(r)},t)_2 dt \right\}^{\frac{m}{2}} = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} \left\{ \frac{2[(n-r)\tau - \sin(n-r)\tau]}{n-r} \right\}^{\frac{m}{2}}, \tag{1.17}$$

то учитывая равенства (1.15) и (1.17), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned}\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_2}{\left\{\int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},t)_2dt\right\}^{\frac{m}{2}}} &\geqslant \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f_0)_2}{\left\{\int_0^\tau \omega_m^{\frac{2}{m}}(f_0^{(r)},t)_2dt\right\}^{\frac{m}{2}}}\\ &= \frac{\alpha_{n,r}/\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1}\,\{2[(n-r)\tau-\sin(n-r)\tau]/(n-r)\}^{\frac{m}{2}}}\\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\left\{\frac{n-r}{2[(n-r)\tau-\sin(n-r)\tau]}\right\}^{\frac{m}{2}}, \qquad 0<(n-r)\tau\leqslant\pi/2.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Требуемое равенство (1.8) вытекает из сопоставлений неравенств (1.14) и (1.18), чем и завершаем доказательство теоремы 1.1. □

Теорема 1.2. *Для любых $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$, и $0<h\leqslant\pi/(n-r)$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\sup_{f\in B_2^{(r)}}&\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_2}{\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},h)_2+(n-r)^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},\tau)_2d\tau\right\}^{\frac{m}{2}}}\\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{[(n-r)h]^m}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Доказательство. Умножив обе части (1.10) на число 2, интегрируя обе части по переменному τ от 0 до h, получаем неравенство

$$h^2E_{n-1}^2(f)_2\leqslant 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\frac{1-\cos kh}{k^2}+E_{n-1}^{2-\frac{2}{m}}(f)_2\int_0^h\left(\int_0^\tau\omega_m^{\frac{2}{m}}(f,t)_2dt\right)d\tau,$$

из которого после замены $1/k^2$ на $1/n^2$ под знаком суммы и интегрирования по частям в двойном интеграле приходим к неравенству

$$h^2E_{n-1}^2(f)_2\leqslant\frac{2}{n^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}(1-\cos kh)+E_{n-1}^{2-\frac{2}{m}}(f)_2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f,\tau)_2d\tau. \tag{1.20}$$

В силу (1.10) неравенство (1.20) приобретает вид

$$(nh)^2E_{n-1}^{\frac{2}{m}}(f)_2\leqslant\omega_m^{\frac{2}{m}}(f,h)_2+n^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f,\tau)_2d\tau.$$

Отсюда получаем

$$E_{n-1}(f)_2\leqslant(nh)^{-m}\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(f,h)_2+n^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f,\tau)_2d\tau\right\}^{\frac{m}{2}}.$$

Последнее неравенство запишем для величины $E_{n-r-1}(f^{(r)})_2$ в следующем виде:

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_2\leqslant((n-r)h)^{-m}\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},h)_2+(n-r)^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},\tau)_2d\tau\right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{1.21}$$

Пользуясь леммой 1.1 и учитывая неравенство (1.21), имеем

$$E_{n-1}(f)_2\leqslant\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{1}{((n-r)h)^m}\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},h)_2+(n-r)^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},\tau)_2d\tau\right\}^{\frac{m}{2}}$$

откуда следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (1.19):

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_2}{\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},h)_2+(n-r)^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},\tau)_2d\tau\right\}^{\frac{m}{2}}} \leqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{[(n-r)h]^m}. \tag{1.22}$$

Для получения аналогичной оценки снизу заметим, что для ранее рассмотренной нами функций $f_0(z)=z^n\in B_2^{(r)}$, кроме равенств (1.15)–(1.17) имеет место также равенство

$$\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(f_0^{(r)},h)_2+(n-r)^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f_0^{(r)},\tau)_2d\tau\right\}^{\frac{m}{2}}=\frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}[(n-r)h]^m. \tag{1.23}$$

Учитывая равенства (1.15) и (1.23), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned}&\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_2}{\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},h)_2+(n-r)^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},\tau)_2d\tau\right\}^{\frac{m}{2}}}\\ &\geqslant \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f_0)_2}{\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(f_0^{(r)},h)_2+(n-r)^2\int_0^h(h-\tau)\omega_m^{\frac{2}{m}}(f_0^{(r)},\tau)_2d\tau\right\}^{\frac{m}{2}}}\\ &=\frac{\alpha_{n,r}/\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}/\left(\sqrt{n-r+1}[(n-r)h]^m\right)}=\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}[(n-r)h]^m.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Требуемое равенство (1.19) получаем из сопоставления неравенств (1.22) и (1.24). Теорема 1.2 доказана. □

2. Значение n-поперечников некоторых классов функций

Прежде чем излагать дальнейшие результаты, напомним необходимые понятия и определения. Пусть S — единичный шар в B_2. $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2. $\mathfrak{L}_n\subset B_2$ — n-мерное подпространство; $\mathfrak{L}^n\subset B_2$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda: B_2\to\mathfrak{L}_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящей элементы пространства B_2 в $\mathfrak{L}_n$; $\Lambda^\perp: B_2\to\mathfrak{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства B_2. Величины

$$\begin{aligned}&b_n(\mathfrak{M};B_2)=sup\left\{sup\left\{\varepsilon>0:\varepsilon S\cap\mathfrak{L}_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\mathfrak{L}_{n+1}\subset B_2\right\},\\ &d_n(\mathfrak{M};B_2)=inf\left\{sup\left\{inf\left\{\|f-\varphi\|_2:\varphi\in\mathfrak{L}_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathfrak{L}_n\subset B_2\right\},\\ &\delta_n(\mathfrak{M};B_2)=inf\left\{inf\left\{sup\left\{\|f-\Lambda f\|_2:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda B_2\subset\mathfrak{L}_n\right\}:\mathfrak{L}_n\subset B_2\right\},\\ &d^n(\mathfrak{M};B_2)=inf\left\{sup\left\{\|f\|_2:f\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{L}^n\right\}:\mathfrak{L}^n\subset B_2\right\},\\ &\Pi_n(\mathfrak{M};B_2)=inf\left\{inf\left\{sup\left\{\|f-\Lambda^\perp f\|_2:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda^\perp B_2\subset\mathfrak{L}_n\right\}:\mathfrak{L}_n\subset B_2\right\},\end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* подмножеством $\mathfrak{M}\in B_2$.

Поскольку пространство Бергмана B_2 является гильбертовым, то в силу общей теории n-поперечников (см., например, [18, 3]) между перечисленными n-поперечниками справедливы соотношения

$$b_n(\mathfrak{M};B_2)\leqslant d^n(\mathfrak{M};B_2)\leqslant d_n(\mathfrak{M};B_2)=\delta_n(\mathfrak{M};B_2)=\Pi_n(\mathfrak{M};B_2). \tag{2.1}$$

Вводим классы функций, для которых находим точные значения вышеперечисленных n-поперечников.

Пусть $\Phi(u)$ — произвольная непрерывная возрастающая при $u \geqslant 0$ функция такая, что $\Phi(u) = 0$. Исходя из результата теоремы 1.1, через $W_m^{(r)}(\Phi)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t > 0$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^t \omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \leqslant \Phi(t).$$

Для $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h > 0$ также полагаем

$$W_m^{(r)}(h) := \left\{ f \in B_2^{(r)} : \left[\omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)}, h) + (n-r)^2 \int_0^h \omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)}, \tau) d\tau \right] \leqslant 1 \right\}.$$

Для множества $\mathfrak{M} \subset B_2$, полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_2 := sup\left\{ E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Теорема 2.1. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t > 0$ удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \geqslant \frac{2}{\pi - 2} \begin{cases} (n-r)t - \sin(n-r)t, & \textit{если} \quad 0 < t \leqslant \pi/(n-r); \\ 2(n-r)t - \pi, & \textit{если} \quad t \geqslant \pi/(n-r), \end{cases} \tag{2.2}$$

то при любом $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\lambda_n \left(W_m^{(r)}(\Phi), B_2 \right) = E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi) \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{2.3}$$

Множество мажорант Φ, удовлетворяющих (2.2), не пусто.

Доказательство. Полагая в неравенстве (1.13) $\tau = \pi/2(n-r)$, получаем

$$E_{n-1}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \int_0^{\pi/2(n-r)} \omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)}, t)_2 dt \right\}^{\frac{m}{2}}.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in W_m^{(r)}(\Phi)$ имеем

$$E_{n-1}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{2.4}$$

Используя неравенства (2.1), из (2.4) получаем оценку сверху для всех вышеперечисленных n-поперечников

$$\lambda_n \left(W_m^{(r)}(\Phi), B_2 \right) \leqslant E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi) \right)_2 \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{2.5}$$

С целью получения оценок снизу указанных n-поперечников рассмотрим во множестве $\mathcal{P}_n \cap B_2$ шар

$$S_{n+1} = \left\{ p_n(z) \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_2 \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right) \right\}^{\frac{m}{2}} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_m^{(r)}(\Phi)$. Для этого нам понадобится следующее неравенство:

$$\omega_m^2(p_n^{(r)}, \tau)_2 \leqslant 2^m \alpha_{n,r} \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)\tau)_*^m \|p_n\|_2^2, \tag{2.6}$$

где

$$(1 - \cos u)_*^m := \begin{cases} (1 - \cos u)^m & \text{if} \quad 0 < u \leqslant \pi, \\ 2^m & \text{if} \quad u \geqslant \pi. \end{cases} \tag{2.7}$$

и которое еще надо доказать. Чтобы доказать (2.6) воспользуемся равенством (1.6). Имеем

$$\begin{aligned}\omega_m^2(p_n^{(r)},\tau)_2 &:= 2^m \sup_{|h|\leqslant\tau}\sum_{k=r+1}^{n}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k(p_n)|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)h)^m\\ &= 2^m \sup_{|h|\leqslant\tau}\sum_{k=r+1}^{n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}\frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1}(1-\cos(k-r)h)^m\\ &\leqslant 2^m\max_{r\leqslant k\leqslant n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}(1-\cos(n-r)h)_*^m\sum_{k=0}^{n}\frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1}\\ &= 2^m\max_{r\leqslant k\leqslant n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}(1-\cos(n-r)h)_*^m\,\|p_n\|_2^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Покажем, что

$$\max_{r\leqslant k\leqslant n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}=\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}.\tag{2.9}$$

Так как функция натурального аргумента

$$\begin{aligned}y(k) &:= \alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}=[k(k-1)\cdots(k-r+2)(k-r+1)]^2\,\frac{k+1}{k-r+1}\\ &= [k(k-1)\cdots(k-r+2)]^2\,(k-r+1)(k+1)\end{aligned}$$

при всех $k\in[r,n]$ является возрастающей, то $\max\limits_{r\leqslant k\leqslant n} y(k)=y(n)$ и равенство (2.9) доказано. Пользуясь (2.9) из (2.8) получаем неравенство (2.6).

Пусть $0<t\leqslant\pi/(n-r)$. В силу определения класса $W^{(r)}(\Phi)$, первое из ограничений (2.2) и соотношений (2.7) для любого $p_n\in S_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned}\int_0^t\omega_m^{\frac{2}{m}}(p_n^{(r)},\tau)_2d\tau &\leqslant 2\left(\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}\right)^{\frac{1}{m}}\|p_n\|_2^{\frac{2}{m}}\int_0^t(1-\cos(n-r)\tau)d\tau\\ &\leqslant\frac{2}{\pi-2}((n-r)t-\sin(n-r)t)\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\leqslant\Phi(t).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Пусть теперь $t\geqslant\pi/(n-r)$. В этом случае на основании аналогичных соображений с учетом (2.6), (2.7) и второго неравенства из ограничения (2.2), для любого $p_n\in S_{n+1}$ будем иметь

$$\begin{aligned}\int_0^t\omega_m^{\frac{2}{m}}(p_n^{(r)},\tau)d\tau &= \left(\int_0^{\pi/(n-r)}+\int_{\pi/(n-r)}^t\right)\omega_m^{\frac{2}{m}}(p_n^{(r)},\tau)d\tau\\ &\leqslant\frac{2}{\pi-2}[2(n-r)t-\pi]\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\leqslant\Phi(t).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Из неравенств (2.10) и (2.11) следует включение шара $S_{n+1}\subset W_m^{(r)}(\Phi)$. Используя соотношения (2.1) между перечисленными выше n-поперечниками и определение *бернштейновского n-поперечника* запишем оценки снизу

$$\begin{aligned}\lambda_n\left(W_m^{(r)}(\Phi),B_2\right) &\geqslant b_n\left(W_m^{(r)}(\Phi),B_2\right)\geqslant b_n(S_{n+1},B_2)\\ &\geqslant\frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\left[\frac{n-r}{\pi-2}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right]^{\frac{m}{2}}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Сопоставляя оценки сверху (2.5) и снизу (2.12), получаем требуемое равенство (2.3). Отметим, что ограничение (2.2) при $m=1$ впервые появилось при вычислении точного значения *колмогоровского n-поперечника* классов $W_m^{(r)}(\Phi)$ периодических функций в пространстве $L_2:=L_2[0,2\pi]$ в работе Л.В. Тайкова [19]. Там же доказано, что функция $\Phi(t)=t^{\pi/(\pi-2)}$ удовлетворяет условию (2.2) при $m=1$. Отсюда сразу следует, что и в нашем случае при любом $m \in \mathbb{N}$ ограничению (2.2) удовлетворяет функция $\Phi(t) = t^{\pi/(\pi-2)}$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.1. □

Теорема 2.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Тогда при любом $0 < h \leqslant \pi/(n-r)$ имеют место равенства*

$$\lambda_n\left(W_m^{(r)}(h), B_2\right) = E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(h)\right) = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{1}{[(n-r)h]^m} \tag{2.13}$$

Доказательство. Оценка сверху класса $W_m^{(r)}(h)$ следует из неравенства (1.23):

$$\lambda_n\left(W_m^{(r)}(h), B_2\right) \leqslant E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(h)\right) \leqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{1}{[(n-r)h]^m}. \tag{2.14}$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанных n-поперечников в множестве комплексных полиномов $\mathcal{P}_n$ введём $(n+1)$-мерный шар

$$\sigma_{n+1} := \left\{p_n(z) \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \leqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{1}{[(n-r)h]^m}\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_m^{(r)}(h)$. Учитывая определение класса и пользуясь неравенством (2.6) при $0 < h \leqslant \pi/(n-r)$ получаем

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega_m^{\frac{2}{m}}(p_n^{(r)}, h) + (n-r)^2\int_0^h (h-t)\omega_m^{\frac{2}{m}}(p_n^{(r)}, t)dt\right\} \\
&\leqslant \left\{2\left(\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}\|p_n\|^2\right)^{\frac{1}{m}}\right. \\
&\quad \left.\cdot\left[1-\cos(n-r)t + (n-r)^2\int_0^h (h-t)(1-\cos(n-r)t)dt\right]\right\}^{\frac{m}{2}} \\
&= \frac{1}{[(n-r)h]^m}\left\{2(1-\cos(n-r)h) + 2(n-r)^2\int_0^h\left(t-\frac{\sin(n-r)t}{n-r}\right)dt\right\}^{\frac{m}{2}} \\
&= \frac{1}{[(n-r)h]^m}[(n-r)h]^m = 1.
\end{aligned}$$

Этим доказано, что шар $\sigma_{n+1} \subset W_m^{(r)}(h)$ и согласно определению *бернштейновского n-поперечника* и соотношения (2.1) запишем оценки снизу

$$\lambda_n\left(W_m^{(r)}(h), B_2\right) \geqslant b_n\left(W_m^{(r)}(h), B_2\right) \geqslant b_n(\sigma_{n+1}, B_2) \geqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\frac{1}{[(n-r)h]^m}. \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.14) и (2.15) следуют равенства (2.13), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Horowitz. *Zeros of functions in Bergman Space* // Bull. Amer. Math. Soc. **80**:4, 713–714 (1974)
2. М.З. Двейрин, И.В. Чебаненко. *О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. Теория отображений и приближение функций.* Киев: Наукова думка. 1983.
3. A. Pinkus. *n-Widths in Approximation Theory.* New-York, Tokyo: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 1985.

4. Ю.А. Фарков. *Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре* $\mathbb{C}^n$ // Успехи матем. наук. **45**:5, 197–198 (1990).
5. С.Б. Вакарчук. *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I.* // Укр. матем. журнал. **42**:7, 873–882, 1019–1026 (1990).
6. С.Б. Вакарчук. *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. II.* // Укр. матем. журнал. **42**:8, 1019–1026 (1990).
7. С.Б. Вакарчук. *Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций* // Матем. заметки. **57**:1, 30–39 (1995).
8. М.Ш. Шабозов. *Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана* // Доклады РАН. **383**:2, 768–771 (2002).
9. В.А. Абилов, Ф.В. Абилова, М.К. Керимов. *Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве* $L_2(D, p(z))$ // ЖВМ и МФ. **50**:6, 999–1004 (2010).
10. С.Б. Вакарчук, М.Ш. Шабозов. *О поперечниках классов функций* // Матем. сборник. **201**:8, 3–22 (2010).
11. С.Б. Вакарчук, Б.М. Вакарчук. *Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух переменных и их приложение к теории аппроксимации* // Укр. матем. журнал. **63**:12, 1579–1601 (2011).
12. С.Б. Вакарчук, Б.М. Вакарчук. *О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций* // Вісник Дніпропетровського університету. Серия: Математика. **17**, 82–88 (2012).
13. М.Ш. Шабозов, М.С. Саидусайнов. *Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам* // Труды ИММ УрО РАН. **25**:2, 258–272 (2019).
14. М.Ш. Шабозов, Х.М. Хуромонов. *О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана* // Известия вузов. Математика. **2**, 74–92 (2020).
15. М.Ш. Шабозов, Н.У. Кадамшоев. *Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана* // Матем. заметки. **110**:2, 266–281 (2021).
16. М.Ш. Шабозов. *О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана* // Матем. заметки. **114**:2, 435–446 (2023).
17. В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. *Конструктивная теория функций комплексного переменного.* М.-Л.: Наука. (1964).
18. В.М. Тихомиров. *Некоторые вопросы теории приближений.* Москва: МГУ. (1976).
19. Л.В. Тайков. *Неравенство содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из* L_2 // Матем. заметки. **20**:3, 433–438 (1976).

Мирганд Шабозович Шабозов,
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, д. 17,
734025, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: shabozov@mail.ru

Дилшод Камаридинович Тухлиев,
Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
ул. Мавлонбекова, д. 1,
735700, г. Худжанд, Таджикистан
E-mail: dtukhliev@mail.ru