ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 2 (2024). С. 27-36.

УДК 514.76

ГЕОМЕТРИЯ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ, ОСНАЩЕННЫХ ПОЛУМЕТРИЧЕСКОЙ ЧЕТВЕРТЬ–СИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

А.В. БУКУШЕВА, $\boxed{\text{С.В. ГАЛАЕВ}}$

Аннотация. На субримановом многообразии контактного типа вводится полуметрическая четверть–симметрическая связность посредством задания внутренней метрической связности и двух структурных эндоморфизмов, сохраняющих распределение субриманова многообразия. Находятся условия метричности введенной связности. Выясняется строение структурных эндоморфизмов полуметрической связности, согласованной с субримановой квази–статистической структурой. Изучаются свойства полуметрической четверть–симметрической связности, заданной на неголономном многообразии Кенмоцу и на почти квази–сасакиевом многообразии. Находятся условия, при которых указанные многообразия являются многообразиями Эйнштейна относительно четверть–симметрической связности.

Ключевые слова: четверть-симметрическая связность, субриманова квази-статистическая структура, неголономные многообразия Кенмоцу, почти квази-сасакиевы многообразия.

Mathematics Subject Classification: 53B20

1. Введение

Изучению почти контактных метрических многообразий, оснащенных метрической связностью с кручением и, в частности, метрической четверть–симметрической связностью, посвящено большое количество работ [1], [4], [5], [7]–[11], [23]. Э. Картан [13] первым рассмотрел линейную метрическую связность с кручением наряду со связностью Леви–Чивита. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность [7], [9], [10], систематическое исследование которой проведено К. Яно в работе [22]. Четверть–симметрическая связность определена в 1975 г. С. Голабом [19].

Интерес исследователей к связностям с кручением связан главным образом с использованием таких связностей в теоретической физике [14], [16], [20]. В работе [5] указывается на тот факт, что большинство из изучаемых связностей с кручением можно описать с использованием эндоморфизмов, сохраняющих распределения почти контактных метрических многообразий.

В настоящей работе на субримановом многообразии контактного типа M рассматривается полуметрическая четверть–симметрическая связность D_X, ассоциируемая с тройкой (∇, N, S), где ∇ — внутренняя метрическая связность, а N, S — эндоморфизмы, сохраняющие распределение D. В дальнейшем термин «полуметрическая» будет, как правило, опускаться.

Понятие контактного субриманова многообразия встречается в работе [15]. Контактное субриманово многообразие — это гладкое многообразие M нечетной размерности

A.V. Bukusheva, S.V. Galaev, Geometry of sub–Riemannian manifolds equipped with a semimetric quarter–symmetric connection.

Поступила 7 июля 2023 г.

$n = 2m + 1$ с заданным на нем максимально неинтегрируемым распределением D коразмерности 1. На распределении D задана положительно определенная метрика, определяющая скалярное произведение только для векторов самого распределения. Пусть η — дифференциальная 1–форма, порождающая распределение $D : ker(\eta) = D$. Тогда на многообразии M посредством равенств $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $i_{\vec{\xi}}\omega = 0$ определяется уникальное трансверсальное распределению D векторное $\vec{\xi}$. Здесь $\omega = d\eta$ — дифференциальная 2–форма ранга $2m$. Многообразие M естественным образом превратится в риманово многообразие, если потребовать, чтобы $\vec{\xi}$ было единичным векторным полем, ортогональным относительно метрики многообразия M распределению D. В настоящем исследовании рассматривается более общее понятие, чем контактное субриманово многообразие. Мы изучаем субримановы многообразия контактного типа. В нашем случае многообразие M изначально предполагается римановым многообразием, существование векторного поля $\vec{\xi}$ постулируется, а распределение D может иметь любую степень интегрируемости и, в частности, быть инволютивным. Идея обобщения используемого в работе [15] понятия контактного субриманова многообразия вызвана необходимостью использования широкого класса почти контактных метрических структур, получающихся на пути конкретизации субримановой структуры. Используемые в настоящей работе структуры неголономного многообразия Кенмоцу и почти квази–сасакиева многообразия получаются из структуры субриманова многообразия контактного типа введением структурного эндоморфизма специального строения.

Изучаемая в настоящей работе четверть–симметрическая связность D_X выражается через связность Леви–Чивита $\tilde{\nabla}$ посредством следующего равенства

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + C(X,Y)\vec{\xi} + \eta(X)(N - C - \psi)Y + \eta(Y)(S - C - \psi)X.$$

Здесь эндоморфизм $\psi : TM \to TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$. N, $S : TM \to TM$ — эндоморфизмы касательного расслоения многообразия M такие, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$, $S\vec{\xi} = \vec{0}$, $S(D) \subset D$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X,Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y)$, $g(CX,Y) = C(X,Y)$.

Такое определение связности D_X представляет собой далеко идущее обобщение связности, традиционно определяемой в почти контактном метрическом многообразии равенством

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - \eta(X)\phi Y.$$

Кручение $T(X,Y)$ определяемой нами связности D_X имеет вид

$$T(X,Y) = \eta(X)\tilde{N}Y - \eta(Y)\tilde{N}X.$$

Здесь $\tilde{N} = N - S$.

Работа состоит из четырех разделов. В каждом из разделов определяется строение структурных эндоморфизмов N, S с учетом специфики изучаемой в данном разделе структуры — римановой структуры, субримановой квази–статистической структуры, структуры неголономного многообразия Кенмоцу и структуры почти квази–сасакиева многообразия. Находятся условия метричности введенной связности. Выясняется строение структурных эндоморфизмов полуметрической связности, согласованной с субримановой квази–статистической структурой. Изучаются свойства полуметрической четверть–симметрической связности, заданной на неголономном многообразии Кенмоцу и на почти квази–сасакиевом многообразии. Находятся условия, при которых указанные многообразия являются многообразиями Эйнштейна относительно четверть–симметрической связности.

Заметим, что понятия структур субриманова квази–статистического многообразия, неголономного многообразия Кенмоцу и почти квази–сасакиева многообразия введены авторами настоящей работы [1], [3], [6].

2. Задание четверть–симметрической связности на субримановых многообразиях контактного типа

Пусть M — риманово многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем субримановой структурой $(\vec{\xi}, \eta, g, D)$ контактного типа, где g — метрический тензор, заданный на многообразии M, η и $\vec{\xi}$ 1–форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$: $ker(\eta) = D$, $D^{\perp} = \langle\vec{\xi}\rangle$. Потребуем, чтобы $\omega(\vec{\xi}, \cdot\,) = d\eta(\vec{\xi}, \cdot\,) = 0$, $rk(\omega) \geqslant 2$. Будем называть в дальнейшем M субримановым многообразием.

На протяжении всей статьи мы активно используем адаптированные координаты. Карту $k(x^i)$ $(i, j, k = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., 2m)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$. Здесь $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = (\partial_1, ..., \partial_n)$ — поле реперов, задаваемое адаптированной картой.

Пусть $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^i)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы в каждой точке и в области определения соответствующей карты порождают распределение D : $D = Span(\vec{e}_a)$. Неголономному полю базисов $(\vec{e}_i) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ соответствует поле кобазисов $(dx^a, \eta = \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$.

Для адаптированных карт $k(x^i)$ и $k'(x^{i'})$ выполняются следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на субримановом многообразии, назовем допустимым (к распределению D) или трансверсальным, если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону: $t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Адаптированные координаты играют роль «голономных» координат для неинволютивного распределения. Имеет место равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\vec{\xi}$. Отсюда, в частности, вытекает важное для дальнейшего утверждение: условие $d\eta(\vec{\xi}, \cdot\,) = 0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Внутренней линейной связностью ∇ ([17], [18]) на субримановом многообразии называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \longrightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,
2) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
3) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Отсюда, в частности, следует, что производные $\partial_n \Gamma^d_{ac}$ являются компонентами допустимого тензорного поля.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем, соответственно, допустимые тензорные поля:

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-P[X,Y],$$
$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{P[X,Y]}Z-P[Q[X,Y],Z],$$

где $Q=I-P,\quad X,Y,Z\in\Gamma(D)$.

Тензор $R(X,Y)Z$ носит название тензора кривизны Схоутена субриманова многообразия. Компоненты тензора кривизны Схоутена в адаптированных координатах определяются равенством

$$R^d_{abc}=2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c}+2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}.$$

Имеет место

Предложение 2.1. *На субримановом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_X g(Y,Z)=0$, $X,Y,Z\in\Gamma(D)$.*

Доказательство предложения 2.1 почти дословно повторяет доказательство теоремы о существовании и единственности связности Леви–Чивита.

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам

$$\Gamma^a_{bc}=\frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}).$$

Пусть, далее, $\tilde{\nabla}$ — связность Леви–Чивита.

Предложение 2.2. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ связности Леви–Чивита $\tilde{\nabla}$ субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:*

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab}=\Gamma^c_{ab},\quad \tilde{\Gamma}^n_{ab}=\omega_{ba}-C_{ab},\quad \tilde{\Gamma}^b_{an}=\tilde{\Gamma}^b_{na}=C^b_a+\psi^b_a,\quad \tilde{\Gamma}^n_{na}=-\partial_n\Gamma^n_a,\quad \tilde{\Gamma}^a_{nn}=g^{ab}\partial_n\Gamma^n_b,$$

где $\Gamma^a_{bc}=\frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc})$, $\psi^b_a=g^{bc}\omega_{ac}$, $C_{ab}=\frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^b_a=g^{bc}C_{ac}$.

Доказательство. Напомним, что эндоморфизм $\psi: TM\to TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y)=g(\psi X,Y)$. Кроме того, выполняются следующие соотношения:

$$C(X,Y)=\frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y),\quad g(CX,Y)=C(X,Y).$$

Доказательство предложения сводится к применению известной формулы для нахождения коэффициентов связности Леви–Чивита в неголономном репере (A_i) :

$$2\Gamma^m_{ij}=g^{km}(A_i g_{jk}+A_j g_{ik}-A_k g_{ij}+\Omega^l_{kj}g_{li}+\Omega^l_{ki}g_{lj})+\Omega^m_{ij}.$$

□

Объект Ω^m_{ij} носит название объекта неголономности репера (A_i). Для используемого в работе поля реперов $(\vec{e}_i)=(\vec{e}_a,\partial_n)$ выполняется равенство $\Omega^n_{ab}=2\omega_{ba}$.

Замечание 2.1. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ примут более простой вид, если принять требование $d\eta(\vec{\xi},X)=0$. В этом случае $\tilde{\Gamma}^n_{na}=-\partial_n\Gamma^n_a=0$ и $\tilde{\Gamma}^a_{nn}=g^{ab}\partial_n\Gamma^n_b=0$.*

Внутренняя связность обеспечивает параллельный перенос допустимых векторов (векторов, принадлежащих распределению D) вдоль допустимых кривых (кривых, в каждой точке касающихся распределения D). В то же время, для решения ряда проблем возникает необходимость расширения внутренней связности до связности на всем многообразии. Иногда достаточно промежуточной конструкции — связности в векторном расслоении (M,π,D). Существуют разные способы продолжения внутренней связности. В ряде статей [1], [4]–[6], [12], [17], [18] обсуждается так называемая N–связность ∇^N. На субримановом многообразии M N–связность ∇^N определяется парой (∇, N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, $N : TM \to TM$ — эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$.

Определим полуметрическую четверть–симметрическую связность D_X на субримановом многообразии с помощью следующего равенства:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + C(X,Y)\vec{\xi} + \eta(X)(N - C - \psi)Y + \eta(Y)(S - C - \psi)X,$$

где эндоморфизм $\psi : TM \to TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$. N, $S : TM \to TM$ — эндоморфизмы касательного расслоения многообразия M такие, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$, $S\vec{\xi} = \vec{0}$, $S(D) \subset D$.

Из определения четверть–симметрической связности D_X следует, что ее кручение $T(X,Y)$ задается равенством

$$T(X,Y) = \eta(X)\tilde{N}Y - \eta(Y)\tilde{N}X.$$

Здесь $\tilde{N} = N - S$.

Имеет место

Предложение 2.3. *Ненулевые коэффициенты G^k_{ij} связности D_X субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:*

$$G^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab}, \quad G^n_{ab} = \omega_{ba}, \quad G^b_{na} = N^b_a, \quad G^b_{an} = S^b_a.$$

Для доказательства предложения достаточно подставить в формулу для четверть–симметрической связности D_X соответствующие базисные векторы. Например, если $X = \vec{e_a}$, $Y = \vec{e_b}$, то получаем следующее:

$$G^c_{ab}\vec{e}_c + G^n_{ab}\partial_n = \tilde{\Gamma}^c_{ab}\vec{e}_c + \tilde{\Gamma}^n_{ab}\partial_n + C_{ab}\partial_n.$$

Отсюда, с учетом предложения 2, получаем $G^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab}$, $G^n_{ab} = \omega_{ba}$.

Выясним, при каких ограничениях, наложенных на эндоморфизмы N, S связность D_X является метрической связностью. Непосредственно проверяется, что если $N = C$, то $D_n g_{ab} = 0$. Далее, имеем:

$$D_a g_{nb} = -G^c_{an} g_{cb} - G^n_{ab} = -S^c_a g_{cb} - \omega_{ba} = 0.$$

Отсюда получаем: $S = \psi$.

Предложение 2.4. *Четверть–симметрическая связность D_X, ассоциируемая с тройкой (∇, C, S), является метрической связностью тогда и только тогда, когда $S = \psi$.*

Замечание 2.2. *Мы рассматриваем здесь случай $N = C$ по той причине, что именно в этом случае удается получить метрическую связность, что само по себе является важным обстоятельством.*

3. Субримановы квази–статистические многообразия, наделенные полуметрической четверть–симметрической связностью

В работе [3] на неголономном многообразии Кенмоцу введена и изучена субриманова квази–статистическая структура. Неголономные многообразия Кенмоцу образуют специальный класс субримановых многообразий контактного типа. В основе субримановой квази–статистической структуры, заданной на неголономном многообразии Кенмоцу, лежит связность с кручением специального строения. Такая связность определяется внутренней связностью и структурным эндоморфизмом, сохраняющим распределение неголономного многообразия Кенмоцу. В работе [3] доказано, что внутренняя связность согласована с метрикой, индуцированной на распределении рассматриваемого многообразия. Найдено строение структурного эндоморфизма.

Триплет (M, g, ∇) называется субримановой квази–статистической структурой [3], если имеет место равенство

$$\Phi(X,Y,Z) = \nabla_X g(Y,Z) - \nabla_Y g(X,Z) + \tilde{T}(X,Y,Z) - 2\omega(X,Y)\eta(Z) = 0,$$

где $\tilde{T}(X,Y,Z) = g(T(X,Y),Z)$, $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах ненулевые компоненты тензора $\tilde{T}(X,Y,Z)$ будут иметь следующий вид:

$$\tilde{T}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 0,$$
$$\tilde{T}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(\tilde{N}\vec{e}_a, \vec{e}_b),$$
$$\tilde{T}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = g(\tilde{N}\vec{e}_a, \vec{e}_b).$$

Теорема 3.1. *Четверть–симметрическая связность тогда и только тогда является связностью субримановой квази–статистической структуры, когда выполняются равенства* $N = 2C + \psi$, $g(SX,Y) = g(X,SY)$.

Доказательство теоремы сводится к проверке эквивалентности равенства $g(SX,Y) = g(X,SY)$ равенству $\Phi(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 0$, а также к проверке эквивалентности равенства $\Phi(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = 0$ равенству $N = 2C + \psi$.

Рассмотрим, для примера, случай $\Phi(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = 0$. Учитывая предложение 2.3 и выражение для $\Phi(X,Y,Z)$, имеем:

$$\Phi(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = \nabla_a g_{nb} - \nabla_n g_{ab} - g_{cb}\tilde{N}^c_a = -S^c_a g_{cb} - \omega_{ba} - \partial_n g_{ab} + N^c_a g_{cb} + N^c_b g_{ca} - g_{cb}\tilde{N}^c_a = 0.$$

Учитывая равенства $\psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac}$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^b_a = g^{bc}C_{ac}$, убеждаемся в справедливости теоремы.

4. Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные полуметрической четверть–симметрической связностью

Нормальное почти контактное метрическое многообразие M называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$. Легко показать, что для многообразия M также выполняется условие $L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$. Неголономное многообразие Кенмоцу введено одним из авторов настоящей работы [1]. В отличие от «классического» случая многообразия Кенмоцу ([2], [21]), от распределения неголономного многообразия Кенмоцу не требуется инволютивности.

Внутренняя геометрия неголономного многообразия Кенмоцу M обладает рядом замечательных свойств [1]. Ранее установлено, что тензорное поле Схоутена–Вагнера $P = L_{\vec{\xi}}\Gamma = 0$ обращается в нуль [1]. Компоненты поля Схоутена–Вагнера в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$.

Рассмотрим случай, когда четверть–симметрическая связность D_X ассоциируется с тройкой (∇, C, ψ). Как было показано в предложении 2.4, в этом случае связность D_X является метрической связностью.

Ненулевые коэффициенты G^k_{ij} связности D_X неголономного многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:

$$G^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab}, \quad G^n_{ab} = \omega_{ba}, \quad G^b_{na} = \delta^b_a, \quad G^b_{an} = \psi^b_a.$$

Вычислим необходимые нам для дальнейшего компоненты тензора кривизны K связности D_X. Имеем:

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} - \psi^d_b\omega_{ca} + \psi^d_a\omega_{cb} + 2\omega_{ab}\delta^d_c, \quad K^n_{anb} = \omega_{ba}.$$

Пусть $k(X,Y)$ — соответствующий тензору $K(X,Y)Z$ тензор Риччи. Имеет место равенство:

$$k_{ac} = r_{ac} + \psi^b_a\omega_{cb} + \omega_{ac},$$

где r_{ac} — компоненты тензора Схоутена–Риччи $r(X,Z) = tr(Y \to R(X,Y)Z)$, $X,Y,Z \in \Gamma(D)$ [1].

Предложение 4.1. *Для неголономного многообразия Кенмоцу размерности $n = 2m+1$ выполняется следующее равенство: $r_{[ac]} = 2m\omega_{ca}$.*

Доказательство. Доказательство предложения опирается на следующее равенство [1]:

$$\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}.$$

В случае неголономного многообразия Кенмоцу это равенство перепишется в виде:

$$0 = 4\omega_{ea}g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}.$$

Проводя необходимые преобразования и используя алгебраическое тождество Бьянки для тензора кривизны Схоутена, приходим к равенству

$$2m\omega_{ca} = \frac{1}{2}(r_{ac} - r_{ca}).$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 4.1. *Если неголономное многообразие Кенмоцу M является многообразием Эйнштейна относительно четверть–симметрической связности D_X, то его размерность равна трем.*

Доказательство. Пусть M — многообразие Эйнштейна относительно четверть–симметрической связности $D_X : k_{ij} = \lambda g_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем, что

$$k_{ac} = r_{ac} + 2mg_{ac} + 2\omega_{ac} = \lambda g_{ac}.$$

Последнее равенство влечет следующее: $r_{[ac]} = -2\omega_{ac} = 2\omega_{ca}$. Сравнивая полученное равенство с равенством $r_{[ac]} = 2m\omega_{ca}$, убеждаемся в том, что $2m = 2$ или $m = 1$. Теорема доказана. □

Пример 1. Неголономное многообразие Кенмоцу размерности 3. Пусть $M = \mathbb{R}^3$. (∂_α) $(\alpha = 1,2,3)$ — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1–форму η, полагая, $\eta = dx^3 + x^2dx^1$. Пусть, далее $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_3$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \vec{\xi} = \partial_3$, $D = Span(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Определим метрический тензор, полагая $g(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = g(\vec{e}_2,\vec{e}_2) = e^{2x^3}$, $g(\vec{e}_3,\vec{e}_3) = 1$. Непосредственно убеждаемся в справедливости равенства $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$. Первый структурный эндоморфизм зададим равенствами

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \quad \varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1, \quad \varphi(\vec{e}_3) = \vec{0}.$$

Проводя непосредственные вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами внутренней связности являются следующие коэффициенты: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22} = -x^2$. Далее, получаем:

$$r_{12} = R^2_{122} = 1, \quad r_{21} = R^1_{211} = -1.$$

Таким образом, $r_{12} - r_{21} = 2$. С другой стороны: $4\omega_{12} = -2$. Из равенства

$$k_{12} = r_{12} + 2g_{12} + 2\omega_{12} = 1 + g_{12} - 1 = 2g_{12},$$

в частности, следует, что M — многообразие Эйнштейна относительно четверть–симметрической связности D_X.

5. Почти квази–сасакиевы многообразия, оснащенные полуметрической четверть–симметрической связностью

Под почти квази–сасакиевым многообразием понимается почти нормальное почти контактное метрическое многообразие с замкнутой фундаментальной формой, для которого выполняется условие $d\eta(\vec{\xi}, \cdot\,) = 0$ ([6], [17]).

Почти контактное метрическое многообразие названо одним из авторов настоящей работы почти нормальным, если оказывается справедливым равенство $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi * d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$. Для нормального почти контактного метрического пространства выполняется условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$. Целесообразность введения понятия почти нормального почти контактного метрического многообразия была осознана после изучения так называемых продолженных почти контактных метрических структур, естественным образом возникающих на распределениях субримановых многообразиях контактного типа ([4], [6], [12], [18]).

Пусть четверть–симметрическая связность D_X ассоциируется с тройкой (∇, C, ψ). Так как для почти квази–сасакиева многообразия выполняется условие $C = 0$ [17], то ненулевые коэффициенты G^k_{ij} связности D_X в адаптированных координатах примут вид:

$$G^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab}, \quad G^n_{ab} = \omega_{ba}, \quad G^b_{an} = \psi^b_a.$$

Компоненты тензора кривизны K связности D_X примут следующий вид:

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} - \psi^d_b \omega_{ca} + \psi^d_a \omega_{cb}, \quad K^d_{abn} = \nabla_a \psi^d_b - \nabla_b \psi^d_a.$$

Пусть $k(X,Y)$ — соответствующий тензору $K(X,Y)Z$ тензор Риччи. Имеют место равенства: $k_{ac} = r_{ac} + \psi^b_a \omega_{cb}$, $k_{an} = -\nabla_b \psi^b_a$, $k_{nn} = 0$, где r_{ac} — компоненты тензора Схоутена–Риччи $r(X,Z) = tr(Y \to R(X,Y)Z)$, $X, Y, Z, \in \Gamma(D)$.

Пусть, теперь, $\nabla\psi = 0$. Тогда оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть M — почти квази–сасакиево многообразие и пусть структурный эндоморфизм ψ ковариантно постоянен относительно внутренней связности, тогда многообразие M является многообразием Эйнштейна относительно четверть–симметрической связности тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$r_{ac} + \psi^b_a \omega_{cb} = 0.$$

Пример 2. Почти квази–сасакиево многообразие Эйнштейна. В качестве простейшего примера почти квази–сасакиева многообразия Эйнштейна рассмотрим косимплектическое многообразие [21]. Введем на многообразии $M = \mathbb{R}^5$ косимплектическую структуру, полагая:

1) $D = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle$, где $\vec{e}_1 = \partial_1$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^5$,

2) $\vec{\xi} = \partial_5$,

3) $\eta = dv$,

4) $\varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_2$, $\varphi\vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_3 = \vec{e}_4$, $\varphi\vec{e}_4 = -\vec{e}_3$, $\varphi\vec{\xi} = 0$,

5) в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{\xi})$ метрический тензор задается равенством $g = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (du)^2 + (dv)^2$.

Равенство $r_{ab} = \omega_{da}\psi^d_b$ в рассматриваемом случае выполняется тривиальным образом, так как его левая и правая части обращаются в нуль.

6. Заключение.

В настоящей статье на субримановом многообразии контактного типа определена полуметрическая четверть–симметрическая связность посредством задания внутренней метрической связности и двух структурных эндоморфизмов, сохраняющих распределение субриманова многообразия. В работе последовательно развивается идея о фундаментальной роли внутренней геометрии в контексте исследования почти контактных метрических структур ([12], [17]). Коротко говоря, внутренняя геометрия отвечает за параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. К внутренней геометрии почти контактных метрических многообразий мы также относим изучаемые в настоящей статье эндоморфизмы, сохраняющие распределения субримановых многообразий. Невозможно описать в работе ограниченного объема многообразие существующих на сегодняшний день подходов, позволяющих определять связности с кручением в почти контактных метрических пространствах. Частично это сделано в работе [5]. В то же время, предложение 2.2 настоящей статьи указывает на возможность конструирования связностей с кручением путем введения в геометрию изучаемых многообразий дополнительных допустимых тензорных полей. В нашем случае — это эндоморфизмы N, S.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Букушева. *Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки–Вебстера* // Дифференц. геомет. многообр. фигур. **52**, 42–51 (2021).
2. А.В. Букушева. *Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны* // Вестн. Томск. гос. ун–та. Матем. и мех. **64**, 5–14 (2020).
3. А.В. Букушева, С.В. Галаев. *Субримановы квази–статистические структуры на неголономных многообразиях Кенмоцу* // Прикл. матем. & Физика. **54**:4, 205–212 (2022).
4. С.В. Галаев. *Почти контактные метрические пространства с N–связностью* // Изв. Сарат. ун–та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. **15**:3, 258–263 (2015).
5. С.В. Галаев. ∇^N*–Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия* // Вестн. Томск. гос. ун–та. Матем. и мех. **70**, 5–15 (2021).
6. С.В. Галаев. *Геометрия почти 3–квази–сасакиевых многообразий второго рода* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **222**, 3–9 (2023).
7. П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова. *О секционной кривизне связностей с векторным кручением* // Изв. вузов. Матем. **6**, 86–92 (2020).
8. В.И. Паньженский, А.О. Растрепина. *Левоинвариантная сасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского* // Чебышевский сб. **24**:1, 114–126 (2023).
9. I. Agricola, M. Kraus. *Manifolds with vectorial torsion* // Diff. Geometry and its Applications. **46**, 130–146 (2016).
10. B. Barua, A.Kr. Ray. *Some properties of a semi–symmetric metric connection in a Riemannian manifold* // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. **16**:7, 736–740 (1985).
11. S.C. Biswas, U.C. De. *Quarter–symmetric metric connection in an SP–Sasakian manifold* // Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series. **46**, 49–56 (1997).
12. A.V. Bukusheva, S.V. Galaev. *Almost contact metric structures defined by connection over distribution* // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. **4(53)**:2, 13–22 (2011).
13. E. Cartan *Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative generalisee. Part II* // Ann. Ec. Norm. **42**, 17–88 (1925).
14. I. Ernst, A.S. Galaev. *On Lorentzian connections with parallel skew torsion* // Documenta Mathematica. **27**, 2333–2383 (2022).
15. E. Falbel, C. Gorodski. *On contact sub–riemannian symmetric spaces* // Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, Serie 4. **28**:5, 571–589 (1995).
16. T. Friedrich, S. Ivanov. *Parallel spinors and connections with skewsymmetric torsion in string theory* // Asian J. Math. **6**:2, 303–335 (2002).
17. S.V. Galaev. *Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds* // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. **31**:1, 35–46 (2015).
18. S.V. Galaev. *Admissible Hyper–Complex Pseudo–Hermitian Structures* // Lobachevskii Journal of Mathematics. **39**:1, 71–76 (2018).

19. S. Golab, *On semi–symmetric and quarter–symmetric linear connections* // Tensor N.S. **29** 249–254 (1975).
20. A. Murcia, C. S. Shahbazi. *Contact metric three manifolds and Lorentzian geometry with torsion in six–dimensional supergravity* // J. Geom. Phys. **158**, 103868 (2020).
21. G. Pitis. *Geometry of Kenmotsu manifolds.* Brasov: Publishing House of Transilvania University of Brasov. 2007.
22. K. Yano. *On semi–symmetric metric connection* // Rev. Roum. Math. Pure Appl. **15**, 1579–1586 (1970).
23. K. Yano, T. Imai. *Quarter–symmetric metric connections and their curvature tensors* // Tensor, N.S. **38**, 13–18 (1982).

Алия Владимировна Букушева,
ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»,
ул. Астраханская, 83,
410012, г. Саратов, Россия
E-mail: bukushevaav@sgu.ru

Сергей Васильевич Галаев,
ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»,
ул. Астраханская, 83,
410012, г. Саратов, Россия
E-mail: sgalaev@mail.ru