ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 2 (2024). С. 3-15.

УДК 517.958

О ВЛОЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА (ДАЛЕКИЙ СЛУЧАЙ)

А.Т. БАЙДАУЛЕТ, К.М. СУЛЕЙМЕНОВ

Аннотация. В работе изучается оценка сверху невозрастающей неотрицательной функции из пространства $L^p(0,1)$ через модуль непрерывности переменного приращения $\omega_{p,\alpha,\psi}(f,\delta)$. Показано, что для приращения функции вида $f(x)-f(x+hx^{\alpha}\psi(x))$ в оценке модуль непрерывности примет вид $\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f,\frac{\delta}{\delta^{\alpha}\psi(\frac{1}{\delta})}\right)$. Также изучается вложение $\tilde{H}^{\omega}_{p,\alpha,\psi}\subset L(\mu,\nu)(\mu\neq\nu)$ (далекий случай). Получены необходимые и достаточные условия на параметры p, α, μ, ν и функции ψ, ω для данного вложения.

Ключевые слова: Классы функций, модуль непрерывности переменного приращения, невозрастающая перестановка функций, пространства Лоренца.

Mathematics Subject Classification: 34B45, 81Q15

1. Введение

Пусть $\omega(\delta)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$0=\omega(0)\leqslant\omega(\delta)\leqslant\omega(\eta)\leqslant\omega(\delta+\eta)\leqslant\omega(\delta)+\omega(\eta),\quad (0\leqslant\delta\leqslant\eta\leqslant\delta+\eta\leqslant 1).$$

Такие функции называют *модулями непрерывности.*

Пусть $\omega_p(f,\delta)$ модуль непрерывности функции f в пространстве $L^p(0,1)$, т.е.

$$\omega_p(f,\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left(\int_0^{1-h}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\quad (0<\delta\leqslant 1).\tag{1.1}$$

Положим

$$H^{\omega}_p=\{f\in L^p(0,1):\omega_p(f,\delta)\leqslant\omega(\delta)\}\quad (0<\delta\leqslant 1),\tag{1.2}$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности.

Положительная функция $\psi(x)$, определенная для $x>x_0$ называется слабо колеблющейся, если при любом $\delta>0$ функция $x^{\delta}\psi(x)$ при достаточно больших x возрастает, а $x^{-\delta}\psi(x)$ убывает ([1, стр. 29]).

Пусть $1\leqslant p<\infty$, $0\leqslant\alpha<1$. Пусть $f\in L^p(0,1)$, тогда функцию

$$\omega_{p,\alpha,\psi}(f,\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int_{E_{h,\alpha,\psi}}|f(x+hx^{\alpha}\psi(x))-f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\quad (0<\delta<1),\tag{1.3}$$

где $E_{h,\alpha,\psi}=\{x\in(0,1):x+hx^{\alpha}\psi(x)\in(0,1)\}$, назовем *модулем непрерывности переменного специального вида приращения функции f в $L^p(0,1)$.*

Заметим, что Z. Ditzian и V.Totik [7] ввели и изучали общий случай, который получается при замене в определении (1.3) функции $x^{\alpha}\psi(x)$ на непрерывную на $[0,1]$ функцию $\phi(x)$.

A.T. Baidaulet, K.M. Suleimenov, On embedding into Lorentz spaces (a distant case).

Поступила 29 апреля 2023 г.

Ясно, что, при $\alpha = 0$, $\psi(x) = 1$ имеем $\omega_{p,0,1}(f,\delta) = \omega(f,\delta)$.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\psi(\delta)$ — слабо колеблющаяся функция и $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности. Через $\tilde{H}^{\omega}_{p,\alpha,\psi}$ обозначим класс всех невозрастающих неотрицательных функций $f \in L^p(0,1)$ таких, что

$$\omega_{p,\alpha,\psi}(f,\delta) \leqslant \omega(\delta).$$

Отметим, что при $\alpha = 0$, $\psi(x) = 1$ получим $\tilde{H}^{\omega}_{\alpha,p,\psi} \subset H^{\omega}_p$.

Пусть $0 < \nu$, $\mu < \infty$. Пространство Лоренца $L(\mu,\nu)$ определяется как множество всех измеримых в смысле Лебега на $[0,1]$ функций f, для каждой из которых конечна величина

$$\| f \|^{\nu}_{\mu,\nu} = \left\{ \int\limits_0^1 x^{\frac{\nu}{\mu}-1} [f]^{\nu}\, dx \right\}.$$

Подробное обсуждение пространства Лоренца $L(\mu,\nu)$ приведено в [3], а также в работе [5].

В дальнейшем через $C(\alpha,\beta,\ldots) = C_{\alpha,\beta,\ldots}$ обозначаются положительные величины, зависящие лишь от входящих параметров $\alpha,\beta,\ldots$ и, вообще говоря, разные в различных формулах. Пусть A и B — некоторые числовые функции, причем A неотрицательна. Тогда запись $B = 0_{\alpha,\beta,\ldots}(A)$, $B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} A$ будет обозначать $|B| \leqslant C(\alpha,\beta,\ldots)A$.

В работе [4, стр. 283] получена оценка сверху невозрастающих неотрицательных функций $f \in L^p(0,1)$:

$$f(x) \ll \left\{ \int\limits_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha}\left(f, 2^{-1}\left(2^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1\right) t^{1-\alpha}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\, dt + \| f \|_p \right\} (0 \leqslant x \leqslant 1) \quad (1 \leqslant p < \infty,\ 0 \leqslant \alpha < 1).$$

Настоящая статья является продолжением работы [5]. В работе получены оценка сверху неотрицательной и невозрастающей функций через модуль непрерывности переменного специального вида приращений, а также теорема вложений классов функций $\tilde{H}^{\omega}_{p,\alpha,\psi}$ в пространство Лоренца $L(\mu,\nu)$.

Применение методов, основанных на оценках невозрастающих перестановок в теории вложения классов функций восходит к работам П.Л. Ульянова (см., напр., [6]).

В работе [4] применяется оценка сверху невозрастающей неотрицательной функции через модуль непрерывности переменного специального вида приращения.

Первая общая теорема вложения, носящая характер необходимых и достаточных условий, выраженных через произвольный модуль непрерывности, состоит в следующем:

Теорема A ([6, стр. 285]). *Пусть даны $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности и числа $1 \leqslant p < q < \infty$. Тогда*

$$H^{\omega}_p \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Приведем критерий вложения классов функций H^{ω}_p в пространство Лоренца $L(\mu,\nu)$, который связан с постановкой задачи данной работы.

Теорема B ([5, стр. 160]). *Пусть даны $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности и числа $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \nu < \infty$, $0 < \mu < \infty$. Тогда*
1) если $\mu > p$, $0 < \nu < \infty$, то

$$H^{\omega}_p \subset L(\mu,\nu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}-1\right)} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty;$$

2) если $\mu = p$ и $0 < \nu < p$, то

$$H_p^\omega \subset L(p,\nu) \Leftrightarrow \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\nu}{p}}} \omega^\nu \left(\frac{1}{n}\right) < +\infty$$

(в случае необходимости предполагается $\omega(\delta) = O\{\omega(\delta^2)\}$ $(0 < \delta < 1)$).

Теорема C ([4, стр. 283]). *Пусть даны числа $1 \leqslant p < \mu$, $0 \leqslant \alpha < 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)$, $0 < \nu < \infty$. Пусть также дан некоторый модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда*

$$\tilde{H}_{p,\alpha}^\omega \subset L(\mu,\nu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{1-\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^\nu \left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Замечание 1.1. *При $\alpha = 0$ условие вложения совпадает с условием вложения в теореме П.Л. Ульянова (см. теорему A).*

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2.1. ([2, стр. 216]) *Для любых положительных чисел τ, q и последовательности $\{a_t\}_{t=0}^\infty$, $a_t \geqslant 0$ имеет место неравенство:*

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\tau} \left(\sum_{t=0}^{l} a_t\right)^q \ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^{-l\tau} a_t^q.$$

Лемма 2.2. ([6], стр. 659) *Пусть конечная неотрицательная функция $\beta(x)$ не возрастает на $[1; +\infty)$ и $\tau \in (-\infty, +\infty)$ — некоторое действительное число. Тогда*

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^{n(1-\tau)} \beta(2^n) \underset{\tau}{\ll} \sum_{n=3}^{\infty} n^{-\tau} \beta(n) \underset{\tau}{\ll} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\tau)} \beta(2^n).$$

Лемма 2.3. ([6], стр. 660) *Пусть даны числа $\nu > 0$, $r \in (1-\nu, 1)$, модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда, если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r} \omega^\nu \left(\frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

то найдутся числа B_n $(n = 1, 2, ...)$ такие, что:
1) $B_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ и $B_n \leqslant \omega\left(\frac{1}{n}\right)$ для всех n;
2) $\sum_{n=1}^{N} B_n = O\left\{N\omega\left(\frac{1}{N}\right)\right\}$ при $N \to +\infty$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-r)} \left[B_{2^n} - B_{2^{n+1}}\right]^\nu = +\infty$.

Лемма 2.4. *Пусть даны числа $\nu > 0$, $r \in (1-\nu, 1)$, модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Пусть также дана неубывающая последовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty : \tau_n = n^{1-\alpha}\psi\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда, если*

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^{-r} \omega^\nu \left(\frac{1}{\tau_n}\right) = +\infty,$$

то найдутся числа $B_n (n = 1, 2, ...)$ такие, что:
1) $B_n \downarrow 0$ при $n \uparrow +\infty$ и $B_n \leqslant \omega\left(\frac{1}{\tau_n}\right)$ для всех n;
2) $\sum_{n=1}^{N} B_n = O\left\{\tau_N \omega\left(\frac{1}{\tau_N}\right)\right\}$ при $N \to +\infty$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-r)} \left[B_{2^n} - B_{2^{n+1}}\right]^\nu = +\infty$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.3. Будем следовать схеме доказательства леммы 2.3. Согласно лемме Стечкина, можем считать, что $\omega(\delta)$ — выпуклый модуль непрерывности и поэтому $\delta^{-1}\omega(\delta)\uparrow$ при $\delta\downarrow 0$.

Пусть $n_0=0$, $n_1=1$. Тогда если числа $n_1<n_2<\ldots<n_k$ подобраны, то, с учетом неубывающей последовательности $\{\tau_n\}$, положим m_{k+1} равным наименьшему среди тех целых чисел N, для которых

$$\tau_N\omega\left(\frac{1}{\tau_N}\right)>2\tau_{nk}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right).$$

Таким образом

$$\tau_n\omega\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\leqslant 2\tau_{nk}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right) \text{ при } n_k\leqslant n<n_{k+1} \tag{2.1}$$

и

$$\tau_{mk+1}\omega\left(\frac{1}{\tau_{mk+1}}\right)>2\tau_{nk}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right). \tag{2.2}$$

Так как $\omega(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$ и последовательность $\{\tau_n\}$ неубывающая, $\tau_n\omega\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\leqslant 2\tau_{nk}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right)$ при $n_k\leqslant n<2n_k$ и тогда

$$m_{k+1}>2n_k. \tag{2.3}$$

Если

$$\omega\left(\frac{1}{\tau_{mk+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right), \tag{2.4}$$

то полагаем

$$n_{k+1}=m_{k+1}. \tag{2.5}$$

Если же $\omega\left(\frac{1}{\tau_{mk+1}}\right)>\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right)$, то полагаем n_{k+1} равным наименьшему среди всех целых чисел N, для которых $\omega\left(\frac{1}{\tau_{mN}}\right)\leqslant\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right)$. В этом случае

$$n_{k+1}>m_{k+1}>2n_k,\ \omega\left(\frac{1}{\tau_{mk+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right)$$

и

$$\omega\left(\frac{1}{\tau_n}\right)>\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk}}\right)\quad\text{при}\quad n_k\leqslant n<n_{k+1}. \tag{2.6}$$

Положим

$$B_1=\omega(1), B_n=\omega\left(\frac{1}{\tau_{nk+1}}\right),\quad n_k\leqslant n<n_{k+1}(k=1,2,\ldots). \tag{2.7}$$

Так как $\omega(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$, то из (2.7) вытекает свойство 1) Пусть дано целое число N с $n_{p-1}\leqslant n<n_p$ $(p\geqslant 2)$. Тогда, с учетом лакунарности $\tau_{nk}B_{nk}$

$$\sum_{n=1}^{N}B_n=\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}B_n+\sum_{n=n_{p-1}+1}^{N}B_n\sum_{k=1}^{p-1}\tau_{nk}B_{nk}+\tau_{nN}B_{nN}$$
$$\ll 2\tau_{np-1}B_{np-1}+\tau_{nN}B_N\ll 2\tau_{np-1}\omega\left(\frac{1}{\tau_{np-1}}\right)+\tau_{nN}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nN}}\right)\ll 3\tau_{nN}\omega\left(\frac{1}{\tau_{nN}}\right).$$

Доказательство 3) аналогично лемме 2.3.

Лемма 2.4 доказана. □

3. Оценка сверху невозрастающей неотрицательной функции

Имеет место

Теорема 3.1. *Пусть даны числа* $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \alpha < 1$. *Пусть также дана слабоколеблющаяся на* $[0,1]$ *функция* $\psi(x)$. *Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции* $f \in L^p(0,1)$ *справедливо*

$$f(x) \leqslant C(p,\alpha,\psi)\left\{\int\limits_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha)\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt + \|f\|_p\right\}(0<x<1). \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $f \in L^p(0,1)$. Выберем число $k_0 \in N$ так, что

$$k_0(1-\alpha) \geqslant \log_2(2^{1+2\alpha}+1) \quad \text{и} \quad \psi\left(\frac{1}{2^{k_0}}\right) \geqslant 1.$$

Тогда, в частности, справедливо $k_0 \geqslant \log_2(2^{1+2\alpha}+1)$. Определим последовательность h_k, следующим образом:

$$h_k = \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}, \tag{3.2}$$

где $C(\alpha) = 2^{2\alpha+1}$ и целое $k \geqslant k_0$.

Пусть целое $k \geqslant k_0$ и пусть $\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$, следовательно

$$\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}} < x^\alpha \leqslant \frac{1}{2^{k\alpha}}.$$

Тогда имеют место следующие неравенства:

$$0 < h_k < 1, \tag{3.3}$$

$$x + hx^\alpha\psi(x) \leqslant 1, \tag{3.4}$$

$$x + hx^\alpha\psi(x) \geqslant \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{3.5}$$

Действительно, при $k \geqslant k_0$, имеем

$$h_k = \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} = \frac{2^{2\alpha+1}}{2^{k(1-\alpha)}\psi(\frac{1}{2^k})} \leqslant \frac{2^{2\alpha+1}}{2^{k_0(1-\alpha)}\psi(\frac{1}{2^{k_0}})} \leqslant \frac{2^{2\alpha+1}}{2^{1+2\alpha}+1} < 1,$$

тем самым, неравенство (3.3) доказано.

Пусть целое $k \geqslant k_0$ и пусть $\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$, тогда справедливо

$$\begin{aligned} x + hx^\alpha\psi(x) &\leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k} + \frac{C(\alpha)}{2^{k-k\alpha}2^{k\alpha}} \\ &= \frac{1}{2^k} + \frac{C(\alpha)}{2^k} = \frac{1+C(\alpha)}{2^k} \leqslant \frac{1+C(\alpha)}{2^{k_0}} \leqslant \frac{1}{2^{k_0}}\left(1+2^{2\alpha+1}\right) \leqslant \frac{2^{2\alpha+1}+1}{2^{2\alpha+1}+1} = 1, \end{aligned}$$

то есть неравенство (3.4) доказано.

При целом $k \geqslant k_0$ и $\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$, получим

$$\begin{aligned} x + hx^\alpha\psi(x) &\geqslant \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}}\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}}\frac{1}{2^{-(k+1)\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}}\frac{1}{2^{2(k+1)\alpha}}\frac{1}{2^{-k\alpha}} = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha)}{2^{k+2\alpha}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{2^{k-1-k+1}} + \frac{C(\alpha)}{2^{k+2\alpha-k+1}}\right] = \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{4} + \frac{C(\alpha)}{2^{2\alpha+1}}\right]$$
$$= \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{4} + \frac{2^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha+1}}\right] = \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{4} + 1\right] \geqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

стало быть, неравенство (3.5) доказано. Теперь перейдем к оценке снизу модуля непрерывности $\omega_{p,\alpha,\psi}(f,t)$ $(0 \leqslant t < 1)$. Сначала, докажем что

$$E_{h_k,\alpha,\psi} \supset \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]. \tag{3.6}$$

Действительно, при $\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$ и $C(\alpha) = 2^{2\alpha+1}$ имеем

$$x + h_k x^\alpha \psi(x) \geqslant \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{2^k} > \frac{1}{2^k},$$

тем самым, (3.6) доказано.

Из соотношения (3.6) имеем

$$\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right) \geqslant \left\{\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} |f(x + hx^\alpha\psi(x)) - f(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}(2-1) = \frac{1}{2^{k+1}}$, то, в силу (2.5), получим

$$\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right) \gg \frac{1}{2^{\frac{k}{p}}}\left[f\left(\frac{1}{2^k}\right) - f\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right].$$

Отсюда,

$$\left[f\left(\frac{1}{2^k}\right) - f\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right] \leqslant 2^{\frac{k}{p}}\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right). \tag{3.7}$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$2^{\frac{k}{p}}\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right) \ll \int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha)\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\, dt. \tag{3.8}$$

Действительно, в силу монотонности модуля непрерывности, получим

$$\int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha)\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\, dt \gg \omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, \frac{C(\alpha)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right)\int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} t^{-\frac{1}{p}-1}\, dt,$$

далее,

$$\int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} t^{-\frac{1}{p}-1}\, dt = \frac{1}{-\frac{1}{p}}\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}}\Bigg|_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} = p\left[2^{\frac{k}{p}} - 2^{\frac{k-1}{p}}\right] = p2^{\frac{k}{p}}\left[1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\right] \underset{p,\alpha,\psi}{\gg} 2^{\frac{k}{p}}.$$

Таким образом, соотношение (3.8) доказано. Из (3.7) и (3.8) имеем

$$\left[f\left(\frac{1}{2^k}\right) - f\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right] \ll \int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha)\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\, dt. \tag{3.9}$$

Используя оценку

$$\| f \|_p^p = \int_0^1 [f(x)]^p \, dx \geqslant \int_0^\lambda [f(x)]^p \, dx \geqslant [f(x)]^p \lambda$$

при $\lambda = \frac{1}{2^{k_0}}$, получим

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) \ll \left\{ \int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k+1}}} \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha)\frac{t}{t^\alpha \psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt + \| f \| \right\}.$$

Отсюда, для любого $0 \leqslant x < 1$, будем иметь

$$f(x) \ll \left\{ \int_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha)\frac{t}{t^\alpha \psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt + \| f \| \right\}. \tag{3.10}$$

Тем самым, теорема 3.1 доказана полностью. □

Замечание 3.1. *При $\psi(t) \equiv 1$ из (3.10) вытекает оценка*

$$f(x) \ll \left\{ \int_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha}\left(f, 2^{-1}\left(2^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1\right) t^{1-\alpha}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt + \| f \|_p \right\} (0 \leqslant x \leqslant 1) \ \ (1 \leqslant p < \infty, \ 0 \leqslant \alpha < 1).$$

4. О вложении $\tilde{H}^\omega_{\alpha,p,\psi} \subset L(\mu,\nu)(\mu \neq p)$

Теорема 4.1. *Пусть даны числа $1 \leqslant p < \mu < \infty$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1 - (1/p - 1/\mu)$, $0 < \nu < \infty$. Пусть также дан некоторый модуль непрерывности $\omega(\delta)$, слабоколеблющаяся функция $\psi(x), x \in [0,1]$. Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$\tilde{H}^\omega_{p,\alpha,\psi} \subset L(\mu,\nu) \tag{4.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^\infty 2^{k\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)} \omega^\nu \left(\frac{1}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} \right) < +\infty. \tag{4.2}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (4.2) и $f \in \tilde{H}^\omega_{p,\alpha,\psi}$. Тогда

$$\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right) \ll \omega_{p,\alpha,\psi}\left(C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right)\omega_{p,\alpha,\psi}\left(\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right) \ (0 < t < 1).$$

Для неотрицательной невозрастающей функции $f(x) \in L^p(0,1)$, в силу теоремы 3.1, будем иметь

$$f(x) \ll \left\{ \int_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt + \|f\|_p \right\} \quad (0 < x < 1).$$

Возможны следующие случаи:

1) $\lim\limits_{x\to+0} \int_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^\alpha\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt < +\infty$. Тогда существует $C_1 > 0$ такое, что $0 \leqslant f(x) \leqslant C_1$ при всех $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$\| f \|^\nu_{(\mu,\nu)} \ll \int_0^1 x^{\frac{\nu}{\mu}-1} C_1^\nu \, dx < +\infty$$

и включение $f \in L(\mu,\nu)$ имеет место при всех $0<\mu,\ \nu<\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+0}\int\limits_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt=+\infty$. Тогда, применяя теорему 3.1 получим

$$f(x)\ll\int\limits_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt \quad 0<x\leqslant 1.$$

Применяя лемму 2.1 при $\tau=\frac{\nu}{\mu}$, $a_n=2^{\frac{n}{p}}\omega\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right)$, имеем

$$\begin{aligned}
\| f \|_{(\mu,\nu)}^{\nu}=\int\limits_0^1 x^{\frac{\nu}{\mu}-1}[f(x)]^{\nu}\,dx &\ll \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} x^{\frac{\nu}{\mu}-1}\left[\int\limits_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^{\nu} dx\\
&\ll \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} x^{\frac{\nu}{\mu}-1}\left[\int\limits_x^1 \frac{\omega\left(\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^{\nu} dx\\
&\ll \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} 2^{-k\left(\frac{\nu}{\mu}-1\right)}\left[\sum_{n=0}^{k}\int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{\omega\left(\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^{\nu} dx\\
&\ll \sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\frac{\nu}{\mu}}\left[\sum_{n=0}^{k}2^{n\left(\frac{1}{p}+1\right)}\frac{1}{2^n}\omega\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right)\right]^{p}\\
&\ll \sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\frac{\nu}{\mu}}\left[\sum_{n=0}^{k}2^{\frac{n}{p}}\omega\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right)\right]^{p}\\
&\ll \sum_{k=0}^{\infty}2^{k\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{2^{k(1-\alpha)}\omega\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right).
\end{aligned}$$

В силу (4.2) будем иметь $\tilde{H}_{p,\alpha,\psi}^{\omega}\subset L(\mu,\nu)$. Вложение (4.1), и тем самым достаточная часть доказана.

Необходимость. Пусть не выполнено условие (4.2), т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right)=\infty. \tag{4.3}$$

По лемме 2.2, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right)\succ\prec\sum_{k=1}^{\infty}k^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{k^{1-\alpha}\psi\left(\frac{1}{k}\right)}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{k^{1-\alpha}\psi\left(\frac{1}{k}\right)}\right)\succ\prec\sum_{k=1}^{\infty}k^{\frac{\nu}{1-\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{k\psi\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)}\right).$$

При $0 \leqslant \alpha \leqslant 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)$ имеем

$$r = 1 - \nu\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) \subset (1-\nu, 1]. \tag{4.4}$$

Условия (4.3) и (4.4) дают возможность воспользоваться леммой 2.4.
Искомую функцию определим равенством

$$f(x) = \int\limits_x^1 \frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\, dx \quad x \in [0,1),$$

$$\eta(t) = \begin{cases} B_{2^k} - B_{2^{k+1}} & x \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right], \\ 0, x \notin \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right], \end{cases} \tag{4.5}$$

где $\{B_n\}$ — числовая последовательность из леммы 2.4. Функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает на $[0,1]$. Докажем включение $f \in \tilde{H}_{p,\alpha,\psi}$. Для этого достаточно для включения

$$I(h) = \int\limits_{E_{h,\alpha,\psi}} \left[f(x) - f\left(x + hx^\alpha \psi(x)\right)\right]^p dx, \tag{4.6}$$

где $E_{h,\alpha,\psi} = \{x \in (0,1): \; x + hx^\alpha\psi(x) \in (0,1)\}$ получим оценку

$$I(h) = O\{\omega^p(h)\}, \quad (h \to 0). \tag{4.7}$$

Отсюда, в частности будет следовать и включение $f \in L^p(0,1)$.

Пусть дано число n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $h_n = \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)}$. При $0 \leqslant k \leqslant n$ и $\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$ имеет соотношение

$$\frac{1}{2^{k+1}} < x + hx^\alpha\psi(x) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \tag{4.8}$$

В самом деле, при $0 \leqslant k \leqslant n$, учитывая соотношение $2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right) \geqslant 2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+1}} < x + hx^\alpha\psi(x) &\leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)} \frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{2^k 2^{-k+1}} + \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)2^{-k+1}} \frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k(1-\alpha)}2^{-k+1}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} \frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}, \end{aligned}$$

и, тем самым соотношение (4.8) доказано. Далее, при $k \geqslant n$ и $\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$ справедливо

$$\frac{1}{2^{k+1}} < x + hx^\alpha\psi(x) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{4.9}$$

Так как при $k \geqslant n$ справедливо $\frac{1}{2^k}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+1}} < x + hx^\alpha\psi(x) &\leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)} \frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{1}{2^k 2^{-n+1}} + \frac{1}{2^{-n+1}2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)} \frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{1}{2^{k-n+1}} + \frac{1}{2^{-n+1}2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)}\frac{1}{2^{k\alpha}}\frac{2^{-k\alpha}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}{2^{-k\alpha}}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{1}{2^{k-n+1}} + \frac{2^{-n\alpha}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)}{2\cdot 2^{-n\alpha}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right] = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{1}{2^{k-n+1}} + \frac{1}{2}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},
\end{aligned}
$$

то есть соотношение (4.9) доказано.

Оценим модуль непрерывности $\omega_{p,\alpha,\psi}(f,t)$, $0 < t \leqslant 1$:

$$
\begin{aligned}
\omega_{p,\alpha,\psi}(f,h_n) &\leqslant \int\limits_0^1 \left[f(x) - f\left(x + h_n x^\alpha \psi(x)\right)\right]^p dx \\
&= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_x^1 \frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt - \int\limits_{x+h_n x^\alpha\psi(x)}^1 \frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_x^{x+h_n x^\alpha\psi(x)} \frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx \\
&= \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \left[\int\limits_x^{x+h_n x^\alpha\psi(x)} \frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx + \sum_{k=n+1}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \left[\int\limits_x^{x+h_n x^\alpha\psi(x)} \frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx = I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Оценим I_1. При $0 \leqslant k \leqslant n$ и $\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$ будем иметь (см. (3.10))

$$
[x, x + h_n x^\alpha \psi(x)] \subset \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]
$$

и поэтому

$$
\eta(x) = \eta_k + \eta_{k+1}.
$$

Отсюда для I_1, учитывая

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \left[\int\limits_x^{x+h_n x^\alpha\psi(x)} \frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \left[(\eta_k + \eta_{k+1})\int\limits_x^{x+h_n x^\alpha\psi(x)} \frac{1}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx \\
&\ll \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \left[(\eta_k + \eta_{k+1})\left(h_n x^\alpha \psi(x)\right) 2^{\frac{k}{p}} 2^k\right]^p dx \\
&\ll \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\left[(\eta_k + \eta_{k+1})\left(h_n \frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) 2^{\frac{k}{p}} 2^k\right]^p dx \\
&\ll \sum_{k=0}^{n}\left[\eta_k\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)}\frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)2^k\right)\right]^p dx \\
&\ll \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)}\sum_{k=0}^{n}\left[\eta_k\left(2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)\right]^p
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)} \sum_{k=0}^{n} 2^{kp(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^k}\right)\eta_k^p.$$

Применив (4.5) определение последовательности η_k и лемму 2.4 для $\tau_{2^k} = 2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)$, будем иметь

$$I_1 \ll \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)} \sum_{k=0}^{n} 2^{kp(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^k}\right)\eta_k^p$$

$$\ll \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)} \sum_{k=0}^{n} 2^{kp(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^k}\right)\left[B_{2^k} - B_{2^{k+1}}\right]^p$$

$$\ll \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)} \sum_{k=0}^{n} \left[2^{k(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^k}\right)B_{2^k}\right]^p$$

$$\ll \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)} \sum_{k=0}^{n} \left[2^{k(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^k}\right)B_{2^k}\right]^{p-1}\left[2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)B_{2^k}\right]$$

$$\ll \frac{\left[2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)B_{2^n}\right]^{p-1}}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)} \left(2^{n(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\sum_{k=0}^{n}[B_{2^k}]$$

$$\ll [B_{2^n}]^{p-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=2^{k-1}+1}^{2^k} B_s \ll |\text{по л.4}| \ll [B_{2^n}]^p \ll \omega\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right).$$

Отсюда, с учетом $h_n = \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)}$, получим

$$I_1 \ll \omega(h).$$

Оценим I_2. при $k \geqslant n$ и $\frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$, учитывая соотношение (4.8) и лемму 2.1,

$$I_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}}\left[\int_{x}^{x+h_n x^\alpha\psi(x)}\frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}}\left[\int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}\frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx$$

$$\ll \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}}\left[\sum_{m=n-1}^{k}\int_{\frac{1}{2^{m+1}}}^{\frac{1}{2^m}}\frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx$$

$$\ll \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left[\sum_{m=n-1}^{k}\int_{\frac{1}{2^{m+1}}}^{\frac{1}{2^m}}\frac{\eta(t)}{t^{\frac{1}{p}+1}}\,dt\right]^p dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left[\sum_{m=n-1}^{k}\eta_m 2^{m\left(\frac{1}{p}+1\right)}2^{-m}\right]^p$$

$$\ll \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}2^k\eta_k^p = \sum_{k=n+1}^{\infty}\eta_k^p.$$

Применяя определение (4.5) последовательности η_k получим

$$I_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty}\eta_k^p = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[B_{2^k} - B_{2^{k+1}}\right]^p \ll \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[B_{2^k}\right]^{p-1}\left[B_{2^k} - B_{2^{k+1}}\right]^p$$

$$\ll \left[\omega\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right)\right]^{p-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[B_{2^k}-B_{2^{k+1}}\right]$$

$$\ll \left[\omega\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right)\right]^{p-1} B_{2^{n+1}}$$

$$\ll \left[\omega\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right)\right]^{p-1}\omega\left(\frac{1}{2^{n(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right)=\omega^p(h),$$

тем самым соотношение $I_2 \ll \omega^p(h)$ доказано. Отсюда получим (4.7)

$$I(h)=O\{\omega^p(h)\} \quad (h\to 0),$$

т.е. $f\in \tilde{H}^{\omega}_{p,\alpha,\psi}$. Остается показать $f\notin L(\mu,\nu)$. В силу леммы 2.4 выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(1-r)}\left[B_{2^n}-B_{2^{n+1}}\right]^{\nu}=+\infty.$$

При $x=\frac{1}{2^k}$, имеем

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right)=\int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{1}\eta(t)t^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)}\,dt \gg \int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}}\eta(t)t^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)}\,dt \gg \eta_k 2^{k\left(\frac{1}{p}+1\right)}2^{-k}=\eta_k 2^{\frac{k}{p}}.$$

Отсюда и из определения пространства Лоренца, определения последовательности η_k и леммы 2.4, получим $r=1-\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)$

$$\| f \|^{\nu}_{(\mu,\nu)}=\int\limits_0^1 x^{\frac{\nu}{\mu}-1}[f(x)]^{\nu}\,dx \gg \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} x^{\frac{\nu}{\mu}-1}[f(x)]^{\nu}\,dx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)}[B_{2^n}-B_{2^{n+1}}]^{\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}2^{n(1-r)}[B_{2^n}-B_{2^{n+1}}]^{\nu}=+\infty.$$

Утверждение $f\notin L(\mu,\nu)$ и тем самым, необходимая часть теоремы доказана.
Теорема 4.1 доказана полностью. □

Следствие 4.1. *Пусть $\omega(\delta)=\delta^{\tau}$, $0<\tau<1$. При $0<\alpha<1-\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)$*

$$\tilde{H}^{\delta^{\tau}}_{p,\alpha,\psi}\subset L(\mu,\nu)$$

имеет место при любой функции $\psi(x)$.

Следствие 4.2. *Пусть $\omega(\delta)=\delta^{\tau}$, $0<\tau<1$, $\psi(x)=\ln^{\beta}\frac{1}{x}$. Пусть также*

$$\alpha=1-\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right).$$

Тогда $\tilde{H}^{\delta^{\tau}}_{p,\alpha,\psi}\subset L(\mu,\nu)\Leftrightarrow \beta>\frac{1-\alpha}{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)}$.

Следствие 4.3. *Пусть $\mu=\nu=q$ и даны числа $1\leqslant p<q<\infty$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Пусть также дан некоторый модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда*

$$\tilde{H}^{\omega}_{p,\alpha,\psi}\subset L^q(0,1)\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}2^{kq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\omega^q\left(\frac{1}{2^{k(1-\alpha)}\psi^p\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right)<+\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Зигмунд. *Тригонометрические ряды. Том 1.* Москва: Мир. 1965.
2. С.М. Никольский. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука. 1977.
3. И. Стейн, Г. Вейс. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М.: Мир. 1974.
4. К. Сулейменов, Н. Темиргалиев. *Критерий вложения $H^{\omega}_{\alpha,p}$ в пространства Лоренца* // Analysis Math. **32**, 283–317 (2006).
5. Н. Темиргалиев. *О вложении классов H^{ω}_{p} в пространоства Лоренца* // Сиб. мат. журнал. **24**:2, 160–172 (1983).
6. П.Л. Ульянов. *Вложение некоторых функций H^{ω}_{p}* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **32**:3, 649–686 (1968).
7. Z. Ditzian, V. Totik. *Moduli of smothness.* New York: Springer. 1987.

Амангелды Токенулы Байдаулет,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Кажымукана, 13,
010000, г. Астана, Казахстан
E-mail: baidauletov.at@gmail.com

Кенесары Машимович Сулейменов,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Кажымукана, 13,
010000, г. Астана, Казахстан
E-mail: kenessarymath@gmail.com