ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 1 (2024). С. 54-80.

УДК 517.956.328:517.956.8

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ВИНКЛЕРА–СТЕКЛОВА НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ВЕСОМОГО ТЕЛА

С.А. НАЗАРОВ

Аннотация. Рассмотрена спектральная задача для пространственной системы уравнений теории упругости. На малых участках поверхности тела поставлены условия Винклера–Стеклова, моделирующие пружинные крепления, а остальная часть границы свободна от внешних воздействий. В нескольких случаях (варьируются относительная жесткость пружинок и их взаимное расположение) построена асимптотика собственных частот колебаний тела и соответствующих собственных мод. В качестве предельных задач выступают задача для самого тела (спектральная или стационарная в некоторых случаях) и задачи теории упругости для полупространства с условиями Винклера–Стеклова на плоских множествах (изолированные или объединенные в единую спектральную задачу в некоторых случаях). Дискретность спектра задачи в полупространстве обеспечена полиномиальным свойством системы уравнений теории упругости. Разобраны частные случаи, сформулированы открытые вопросы и обсуждены патологические ситуации, в которых спектр теряет привычные свойства. Построены асимптотические модели задачи, предоставляющие двучленные асимптотики собственных пар исходной задачи и использующие технику самосопряженных расширений дифференциальных операторов или гильбертовы весовые пространства с отделенной асимптотикой.

Ключевые слова: упругое тело, пружинные крепления Винклера–Стеклова, сингулярное возмущение, асимптотика частот собственных колебаний.

Mathematics Subject Classification: 35P05, 74B05, 35J47

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть Ω — выпуклая область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с гладкой (класса C^∞ для простоты; ср. п. 4.1) границей $\Gamma = \partial\Omega$ и компактным замыканием $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. На поверхности $\partial\Omega$ выберем попарно различные точки $P^1, \dots, P^J$ и введем мелкие множества

$$\omega_j^\varepsilon = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega : (\varepsilon^{-1} s_1^j, \, \varepsilon^{-1} s_2^j) \in \varpi_j\}, \quad j = 1, \dots, J. \tag{1.1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, ϖ_j — области на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченные простыми гладкими замкнутыми контурами $\gamma_j = \partial\varpi_j$, $x^j = \theta^j(x - P^j)$ — локальные декартовы координаты, причем θ^j — ортогональная (3×3)-матрица, введенная для того, чтобы ось x_3^j была направлена вдоль внешней нормали $n(P^j)$ к поверхности Γ в точке P^j, а оси x_1^j и x_2^j располагаются в касательной плоскости $\Pi^j \ni P^j$. Наконец, (s_1^j, s_2^j, n^j) — криволинейные координаты в окрестности $\mathcal{V}^j \ni P^j$, n^j — ориентированное расстояние до Γ, $n^j < 0$ в $\Omega \cap \mathcal{V}^j$, а s_i^j — ориентированное расстояние до точки P^j, измеренное вдоль проекции оси x_i^j на Γ, $i = 1, 2$. Множеств точек $P^1, \dots, P^J$ обозначим $\mathcal{P}$.

S.A. Nazarov, Influence of the Winkler–Steklov conditions on natural oscillations of an elastic weighty body.

Поступила 24 декабря 2022 г.

В области Ω рассмотрим задачу теории упругости

$$L(\nabla)u(x) := D(-\nabla)^\top AD(\nabla)u(x) = \lambda\rho u(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$N(x,\nabla)u(x) := D(n(x))^\top AD(\nabla)u(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \overline{\omega^\varepsilon}, \tag{1.3}$$

$$N(x,\nabla)u(x) = \lambda\rho_\varepsilon Q(x)u(x), \quad x \in \omega^\varepsilon = \omega_1^\varepsilon \cup \ldots \omega_J^\varepsilon. \tag{1.4}$$

При этом используется матричная[1] запись определяющих соотношений линейной теории упругости, т.е. вектор смещений $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ интерпретируется как столбец в $\mathbb{R}^3$ ($\top$ — знак транспонирования), $N(x,\nabla)u(x)$ — вектор нормальных напряжений, найденный по столбцу напряжений

$$\sigma(u) = \Big(\sigma_{11}(u), \sigma_{22}(u), \sigma_{33}(u), \sqrt{2}\sigma_{23}(u), \sqrt{2}\sigma_{31}(u), \sqrt{2}\sigma_{12}(u)\Big)^\top, \tag{1.5}$$

где $\sigma_{pq}(u)$ — декартовы компоненты тензора напряжений, вызванного смещениями u и подчиненного линейному закону Гука

$$\sigma(u) = AD(\nabla)u,$$

$\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^\top$ — градиент-оператор, $D(\nabla)u$ — столбец деформаций той же структуры (1.5) и

$$D(\nabla)^\top = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 2^{-1/2}\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 & 2^{-1/2}\partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x_p}. \tag{1.6}$$

Множители $2^{\pm 1/2}$ введены в формулы (1.5) и (1.6) для того, чтобы уравнять естественные нормы тензора второго ранга и изображающего его столбца высотой шесть. Наконец, в уравнениях (1.2) колебаний тела Ω фигурируют симметричная положительно определенная (6×6)-матрица A упругих модулей, постоянная плотность $\rho > 0$ материала и спектральный параметр λ, т.е. квадрат частоты колебаний, а в спектральных краевых условиях (1.4), называемых условиями Винклера–Стеклова и моделирующих [4] густые семейства мелких жестких пружинок, которые реагируют только на нормальные смещения поверхности Γ, — ортогональный проектор в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$

$$Q(x) = n(x)n(x)^\top \tag{1.7}$$

и коэффициент податливости пружинок

$$\rho_\varepsilon = \varepsilon^\alpha \rho_0, \quad \rho_0 > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

В следующих разделах показатель α варьируется для достижения разных асимптотических эффектов. Наконец, условия (1.3) означают, что поверхность $\Gamma \setminus \overline{\omega^\varepsilon}$ свободна от внешних воздействий.

Вариационная формулировка задачи (1.2)–(1.4) апеллирует к интегральному тождеству [5], [6]

$$E(u,\psi;\Omega) = \lambda\left(\rho(u,\psi)_\Omega + \rho_\varepsilon(u,\psi)_{\omega^\varepsilon}\right), \quad \psi \in H^1(\Omega)^3, \tag{1.9}$$

где $(\ ,\ )_\Omega$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, скалярном или векторном, а собственная вектор-функция u ищется в пространстве Соболева $H^1(\Omega)^3$, причем верхний индекс 3 указывает количество компонент вектора, но такой индекс отсутствует в обозначениях норм и скалярных произведений. Кроме того, $E(u,u;\Omega)$ — удвоенная упругая энергия, запасенная телом Ω и порождающая билинейную форму

$$E(u,\psi;\Omega) = (AD(\nabla)u, D(\nabla)\psi)_\Omega. \tag{1.10}$$

[1] В англоязычной литературе она называется the Voigt-Mendel notation, но в русскоязычной связывается с именем С.Г. Лехницкого; см. соответственно монографии [1] и [2], [3].

Благодаря неравенству Корна (см., например, [7])

$$\|u; H^1(\Omega)\|^2 \leqslant K(E(u,u;\Omega) + \rho\|u; L^2(\Omega)\|^2),$$

в котором множитель K зависит от параметров задачи, билинейную форму

$$\langle u, \psi \rangle = E(u,\psi;\Omega) + \rho(u,\psi)_\Omega + \rho_\varepsilon(u,\psi)_{\omega^\varepsilon} \tag{1.11}$$

можно назначить скалярным произведением в пространстве Соболева $\mathcal{H} = H^1(\Omega)^3$. Введем еще положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряженный оператор $\mathcal{K}$ в $\mathcal{H}$ при помощи тождества

$$\langle \mathcal{K}u, \psi \rangle = \rho(u,\psi)_\Omega + \rho_\varepsilon(u,\psi)_{\omega^\varepsilon}, \quad u, \psi \in \mathcal{H}. \tag{1.12}$$

Этот оператор компактный, и согласно теоремам 10.1.5 и 10.2.2 [8] его существенный спектр состоит из единственной точки $\kappa = 0$, а дискретный образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность

$$1 \geqslant \kappa_1 \geqslant \kappa_2 \geqslant \kappa_3 \geqslant \ldots \geqslant \kappa_\ell \geqslant \cdots \to +0. \tag{1.13}$$

В силу определений (1.11) и (1.12) интегральное тождество (1.9) эквивалентно абстрактному уравнению

$$\mathcal{K}u = \kappa u \quad \text{в} \quad \mathcal{H}, \tag{1.14}$$

причем спектральные параметры связаны соотношением

$$\kappa = (1+\lambda)^{-1}, \tag{1.15}$$

которое переделывает последовательность (1.13) в монотонную неограниченную последовательность собственных чисел задачи (1.2)–(1.4)

$$0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_6 < \lambda_7 \leqslant \lambda_8 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m \leqslant \cdots \to +\infty. \tag{1.16}$$

Соответствующие собственные векторы $u^\varepsilon_{(1)}, \ldots u^\varepsilon_{(m)}, \cdots \in \mathcal{H}$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$\langle u_{(m)}, u_{(p)} \rangle = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N}, \tag{1.17}$$

где $\delta_{m,p}$ — символ Кронекера и $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ — натуральный ряд.

Корневое подпространство для $\lambda = 0$ — шестимерный линеал жестких смещений

$$\mathcal{R} = \{u(x) = d(x)c \,|\, c = (c_1, \ldots, c_6)^\top \in \mathbb{R}^6\}, \tag{1.18}$$

где

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}x_3 & -2-1/2x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2^{1/2}x_3 & 0 & 2{-}1/2x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2^{-1/2}x_2 & -2^{1/2}x_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Столбцы $a^t = (a_1, a_2, a_3)^\top$ и $a^r = (a_4, a_5, a_6)^\top$ отвечают поступательным и вращательным смещениям. Столбцы матриц (1.19) и (1.6) образуют базис в двенадцатимерном пространстве линейных вектор-функций в $\mathbb{R}^3$.

Форма (1.10) обладает полиномиальным свойством [9], т.е. для любой области $\Xi \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей и компактным замыканием имеет место импликация

$$u \in H^1(\Xi)^3, \quad E(u,u;\Xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{R}|_\Xi. \tag{1.20}$$

Это свойство предоставляет полезную информацию о разрешимости и свойствах решений рассматриваемых задач (см. обзор [10]).

1.2. Содержание статьи. В статье исследуется поведение спектра (1.16) при $\varepsilon \to +0$, $\rho > 0$ и при $\rho \to +0$, $\varepsilon > 0$, причем сопутствующие объекты снабжаются индексами ε и ρ соответственно. В п. 1.3 выводится асимптотически точное относительно названных параметров неравенство Корна.

В разделе 2 строится асимптотика собственных пар $\{\lambda_m^\varepsilon; u_{(m)}^\varepsilon\}$ задачи (1.9) (или (1.2)–(1.4) в дифференциальной форме), а оценки асимптотических остатков приведены в разделе 3. Эти результаты нуждаются в дополнительном описании. Именно, при фиксированной плотности $\rho > 0$ рассматриваются три случая: $\alpha > -1$, $\alpha < -1$ и $\alpha = -1$. В первом спектр (1.16) получается возмущением спектра задачи в области Ω, причем условия Неймана (1.3) распространены на всю границу $\partial\Omega$. Во втором случае положительные собственные числа задачи (1.9) принимают вид

$$\lambda_{6+m}^\varepsilon = \varepsilon^{-1-\alpha}\mu_m^\varepsilon,$$

а последовательность $\{\mu_m^0\}_{m\in\mathbb{N}}$ пределов множителей μ_m^ε — дискретный спектр совокупности ($j = 1, \dots, J$) задач о пограничных слоях около точек $P^1, \dots, P^J$, которые (задачи) состоят из статических — без спектрального параметра — систем дифференциальных уравнений в полупространстве $\mathbb{R}^3_-$ со спектральными условиями Винклера–Стеклова на подобласти $\varpi_j \subset \partial\mathbb{R}^3_-$ и условиями Неймана на остальной части $\partial\mathbb{R}^3_- \setminus \overline{\varpi_j}$ плоскости. Примечателен тот факт, что каждое условие Винклера–Стеклова на ϖ_j становится интегро-дифференциальным и включает все средние собственных вектор-функций по множествам ϖ_k, $k = 1, \dots, J$, объединяя тем самым задачи с индексами $j = 1, \dots, J$ в единую спектральную задачу. Подобное «дальнодействие» малых сингулярных спектральных возмущений уже появлялось в иных задачах (см. [11], [12] и др. публикации). В особом случае $\alpha = 1$ обсуждаемое взаимодействие предельных задач пропадает, однако последовательность $\{\lambda_m^0\}_{m\in\mathbb{N}}$ пределов собственных чисел Λ_m^ε задачи (1.2)–(1.4) становится объединением спектров задач в количестве $J+1$ штуки, а именно, J экземпляров независимых задач в полупространстве $\mathbb{R}^3_-$ и одной задачи в области Ω.

Оценки асимптотических остатков в полученных представлениях собственных пар $\{\lambda_m^\varepsilon; u_m^\varepsilon\}$ основаны на асимптотически точном неравенстве Корна, выведенном в п. 1.3, а также предложении 3.1 о сходимости и классической леммы 3.1 о «почти собственных» числах и векторах. Впрочем, теоремы 3.1 и 3.2 относятся к наиболее представительному, но частному случаю, разобранному в п. 2.3, хотя их приспособление к иным случаям, например, рассмотренным в п. 1 и п. 2.2, а также для изучения частичных сумм бесконечных асимптотических рядов (ср. п. 4.1) легкодоступно и вполне традиционно. Так или иначе обоснование асимптотик при $\alpha < -1$ или $\alpha > -1$ можно извлечь из публикаций [13, гл. 4] и [12].

В последнем, четвертом, параграфе представлен сопутствующий материал. Сначала обсуждаются возможные обобщения: кусочно-гладкая граница, бесконечные ряды и пр. Затем проводится асимптотический анализ спектра задачи (1.2)–(1.4) при исчезающе малой плотности тела Ω, т.е. при $\rho \to +0$. Кроме того, исследуется предельный случай $\rho = 0$, когда спектральный параметр отсутствует в системе (1.2). Своеобразие такой задачи состоит в том, что в некоторых ситуациях ее спектр заполняет всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, так как элементы некоторого нетривиального подпространства $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$ удовлетворяет соотношениям (1.2)–(1.4) при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Укажем несколько таких ситуаций.

1^0. *Допустим, что* $\Upsilon = \{x \in \Gamma : x_3 = 0\}$ — *непустая область на плоскости и* $\mathcal{P} \subset \Upsilon$, *т.е.* $\omega^\varepsilon \subset \Upsilon$. *Тогда* $\mathcal{R}_0 = \{d(x)c \,|\, c_3 = c_4 = c_5 = 0\}$ *и* $\dim \mathcal{R}_0 = 3$.

2^0. *Если участок* $\Upsilon \supset \mathcal{P}$ *поверхности* Γ *расположен на сфере* $\{x : |x| = R\}$ *и* $\omega^\varepsilon \subset \Upsilon$, *то* $\mathcal{R}_0 = \{d(x)c \,|\, c_1 = c_2 = c_3 = 0\}$ *и* $\dim \mathcal{R}_0 = 3$.

3^0. *Пусть* Ω — *цилиндр* $\{x : x_1^2 + x_2^2 < R^2, |x_3| < L\}$. *Тогда* $\mathcal{R}_0 \subset \{d(x)c \,|\, c_1 = \dots = c_5 = 0\}$, *но в случае* $\mathcal{P} \subset \{x \in \partial\Omega : |x_3| < L\}$ *(точки* $P^1, \dots, P^J$ *лежат на цилиндрической поверхности) размерность* $\dim \mathcal{R}_o$ *равна двум, так как в* $\mathcal{R}_0$ *попадают и поступательные смещения вдоль оси* x_3.

Во многих разделах статьи вводится исключающее упомянутую патологию требование: линейная оболочка $\mathcal{L}$ столбцов (ср. обзор [14, § 2])

$$d(P^1)n(P^1)^\top, \dots, d(P^J)n(P^J)^\top \tag{1.21}$$

имеет размерность шесть, т.е. совпадает с пространством $\mathbb{R}^6$ и, в частности, $J \geqslant 6$.

Наконец, в п. 4.3 обсуждаются вопросы моделирования сингулярно возмущенной задачи (1.2)–(1.4). Первый способ традиционен и состоит в построении подходящего самосопряженного расширения $\mathfrak{S}^\varepsilon$ симметричного замкнутого неограниченного оператора $\mathfrak{S}$ в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)^3$ с дифференциальным выражением $L(\nabla_x)$ и областью определения

$$\mathcal{D}(\mathfrak{S}) = \{u \in H^2(\Omega)^3 \,:\, N(x,\nabla_x)u(x) = 0,\, x \in \partial\Omega,\; u(P^j) = 0, j = 1 \dots J\}. \tag{1.22}$$

К сожалению, характеристики нужного расширения зависят от спектрального параметра, что снижает прикладную значимость первой модели. Второй способ соотносится с постановкой задачи на пространстве вектор-функций с отделенной асимптотикой (допускаются сингулярности $O(|x-P^j|^{-1})$ в точках $P^j, j = 1, \dots, J$) и назначением в этих точках асимптотических условий (алгебраических связей, наложенных на коэффициенты в разложениях собственных вектор-функций). Как продемонстрировано в [15], [16] и [17, гл. 7], оба подхода тесно связаны с методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [18], [19], [13, гл. 2] и другие монографии).

1.3. Неравенство Корна. Пусть сначала $\rho \in (0, \rho_*]$ и $\rho_* > 0$. Представим поле $u \in H^1(\Omega)^3$ в виде

$$u(x) = d(x)u^0 + u_\perp(x), \quad \int\limits_\Omega d(x)^\top u_\perp(x)\, dx = 0 \in \mathbb{R}^6, \tag{1.23}$$

где

$$u^0 = d_\Omega^{-1} \int\limits_\Omega d(x)^\top u(x) dx \in \mathbb{R}^6, \quad d_\Omega = \int\limits_\Omega d(x)^\top d(x) dx. \tag{1.24}$$

При этом (6×6)-матрица Грама d_Ω симметрична и положительно определена, так как столбцы матрицы (1.19) линейно независимы в пространстве Лебега $L^2(\Omega)^3$. Ввиду последних условий ортогональности в списке (1.23) справедливо такое неравенство Корна [7]:

$$\|u_\perp; H^1(\Omega)\|^2 \leqslant CE(u_\perp, u_\perp; \Omega) = CE(u, u; \Omega). \tag{1.25}$$

Здесь множитель C зависит от Ω и A, но, разумеется, не от параметров ρ и ε. Кроме того,

$$d_\Omega u^0 = \int\limits_\Omega d(x)^\top (u(x) - u_\perp(x)) dx \quad \Rightarrow \quad \|u^0; \mathbb{R}^6\| \leqslant c(\|u; L^2(\Omega)\|^2 + \|u_\perp; L^2(\Omega)\|^2),$$

а значит,

$$\|du^0; H^1(\Omega)\|^2 \leqslant c(\|u; L^2(\Omega)\|^2 + E(u, u; \Omega)).$$

Окончательно получаем, что

$$\|u; H^1(\Omega)\|^2 \leqslant c\rho^{-1}\|u; \mathcal{H}\|^2. \tag{1.26}$$

Теперь рассмотрим случай $\rho = 0$ при дополнительном требовании $\dim \mathcal{L} = 6$ к линейной оболочке $\mathcal{L}$ столбцов (1.21). Присоединим к формуле (1.25) соотношение

$$\|r_j^{-1} u_\perp; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-1}\|u_\perp; L^2(\omega_j^\varepsilon)\|^2 \leqslant c_j \|u_\perp; H^1(\Omega)\|^2, \tag{1.27}$$

где $r_j = |x - P^j| = |x^j|$ и $j = 1, \dots, J$. Оценка первой — весовой — нормы в левой части обеспечена классическим неравенством Харди

$$\int\limits_0^{+\infty} |U(r)|^2\, dr \leqslant 4 \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{dU}{dr}(r)\right|^2 r^2 dr, \qquad U \in C_c^\infty[0, +\infty), \tag{1.28}$$

примененного к произведению $\chi_j u_\perp$, которое (неравенство) записано в сферических координатах (r_j, φ^j) и проинтегрировано по угловым переменным φ^j. Здесь и далее χ_j — гладкая срезающая функция с носителем в окрестности $\mathcal{V}^j$, равная единице вблизи точки P^j, причем $\operatorname{supp}\chi_j \cap \operatorname{supp}\chi_k = \varnothing$ при $j \neq k$ (см. (2.5)). Оценка второй нормы из левой части (1.27) получается при помощи растяжения координат $x \mapsto \xi^J = \varepsilon^{-1} x^J$ и использования обычного следового неравенства (см., например, [5, гл. 1]).

Умножим первое равенство в (1.23) слева на $d(x)^\top n(x) n(x)^\top$ и проинтегрируем по ω^ε. Просуммировав результаты по $j = 1, \dots, J$, приходим к системе алгебраических уравнений

$$M^\varepsilon u^0 = H^\varepsilon := \sum_{j=1}^J \int\limits_{\omega_j^\varepsilon} d(x)^\top n(x) n(x)^\top (u(x) - u_\perp(x))\, dx, \tag{1.29}$$

где для (6×6) матрицы M^ε и столбца $H^\varepsilon \in \mathbb{R}^6$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &M^\varepsilon = M^\varepsilon_{(1)} + \dots + M^\varepsilon_{(J)}, \quad \|M^\varepsilon_{(j)} - \varepsilon^2 M^0_{(j)}; \mathbb{R}^{6\times 6}\| \leqslant c\varepsilon^3, \\ &M^0_{(j)} = |\varpi_j| d(P^j)^\top n(P^j) n(P^j)^\top d(P^j), \quad j = 1, \dots, J, \end{aligned} \tag{1.30}$$

и

$$\|H^\varepsilon; \mathbb{R}^6\|^2 \leqslant c \sum_{j=1}^J |\omega_j^\varepsilon| \, (\|n^\top u; L^2(\omega_j^\varepsilon)\|^2 + \|u_\perp; L^2(\omega_j^\varepsilon)\|^2), \tag{1.31}$$

а $|\omega_j^\varepsilon| = O(\varepsilon^2)$ — площадь фигуры (1.1). Матрица $M^0_{(1)} + \dots + M^0_{(J)}$ симметрична и положительно определена в силу ограничения $\dim \mathcal{L} = 6$. В самом деле, симметричность и положительность матриц M^j очевидны; кроме того, в силу ограничения, наложенного на столбцы (1.21), имеем

$$b^\top M b = 0 \;\Rightarrow\; b^\top M_{(j)} b = 0,\ j = 1, \dots, J, \;\Rightarrow\; n(P^j)^\top d(P^j) b = 0,\ j = 1, \dots, J, \;\Rightarrow\; b = 0 \in \mathbb{R}^6.$$

Итак, выводим из формул (1.27)–(1.31) и (1.25) оценку

$$\begin{aligned} \|u^0; \mathbb{R}^6\|^2 &\leqslant c\varepsilon^2 (\|n^\top u; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon \|u_\perp; H^1(\Omega)\|^2) \\ &\leqslant c\varepsilon^{-1} (E(u, u; \Omega) + \varepsilon^{-1} \|n^\top u; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2), \end{aligned} \tag{1.32}$$

а затем и неравенство Корна

$$\|u; H^1(\Omega)\|^2 \leqslant C(\|u_\perp; H^1(\Omega)\|^2 + \|u^0; \mathbb{R}^6\|^2) \leqslant C\varepsilon^{-1}(E(u, u; \Omega) + \varepsilon^{-1}\|n^\top u; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2), \tag{1.33}$$

в котором множитель C не зависит от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$.

Соотношения (1.33) и (1.26) предоставляют оценки для собственных чисел задачи (1.2)–(1.4), однако в разделе 2 и п. 4.2 будет получена более точная информация об их поведении при $\varepsilon \to +0$ и $\rho \to +0$ соответственно.

2. Формальная асимптотика.

2.1. Преамбула. В данном параграфе для разных значений показателя α в представлении (1.8) построена асимптотика собственных пар $\{\lambda_m^\varepsilon, u_{(m)}^\varepsilon\}$ задачи (1.2)–(1.4). В п. 2.2 и п. 2.4 расположение множеств (1.1) на границе $\partial\Omega$ не играет роли, но в п. 2.3 считаем выполненным ограничение $\dim \mathcal{L} = 6$ для линейной комбинации столбцов (1.21). Кроме того, для упрощения изложения п. 2.4 предполагаем, что участки $\Gamma^j = \partial\Omega \cap \mathcal{V}^j$ плоские (ср. п. 4.2). При построении главных асимптотических членов это допущение не играет существенной роли, но при нетривиальных кривизнах границы в точках P^j поправочные члены нуждаются в правильном истолковании (см. п. 2.5).

2.2. Простейший случай $\alpha > -1$. Назначим следующие асимптотические анзацы для собственных пар задачи (1.2)–(1.4):

$$\lambda_m^\varepsilon = \lambda_m^0 + \varepsilon^{2+\alpha}\lambda_m' + \dots, \tag{2.1}$$

$$u_{(m)}^\varepsilon(x) = U_{(m)}^0(x) + \varepsilon^{1+\alpha}\sum_{j=1}\chi_j(x)w_{(m)}^j(\xi^j) + \varepsilon^{2+\alpha}u_{(m)}'(x) + \dots. \tag{2.2}$$

Здесь многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом анализе, $\{\lambda_m^0, u_{(m)}^0\}$ — собственная пара предельной задачи

$$L(\nabla_x)u^0(x) = \lambda^0\rho u^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$N(x,\nabla_x)u^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.4}$$

а пара $\{\lambda_m', u_{(m)}'\}$ подлежит определению вместе с членами пограничного слоя $w_{(m)}^1, \dots, w_{(m)}^J$, записанными при помощи растянутых координат $\xi^j = \varepsilon^{-1}x^j$. Кроме того, срезающие функции $\chi_j \in C_c^\infty(\mathcal{V}^j)$ введены для локализации пограничных слоев, причем

$$\chi_j = 1 \text{ вблизи точки } P^j \quad \text{и} \quad \operatorname{supp}\chi_j \cap \operatorname{supp}\chi_k = \varnothing \text{ при } j \neq k. \tag{2.5}$$

Наконец, множитель $\varepsilon^{1+\alpha}$ при сумме по $j = 1, \dots, J$ в (2.2) подобран так, что замена $x \mapsto \xi^j$ и формальный переход к $\varepsilon = 0$, спрямляющие границу Γ и трансформирующие область Ω в полупространство $\mathbb{R}_-^3 = \{\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j) : \xi_3^j < 0\}$, после подстановки анзацев (2.2) и (2.1) в задачу (1.2)–(1.4) и сбора коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε дают систему дифференциальных уравнений

$$L^j(\nabla_{\xi^j})w_{(m)}^j(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \mathbb{R}_-^3, \tag{2.6}$$

с краевыми условиями

$$N^j(\nabla_{\xi^j})w_{(m)}^j(\xi_\natural^j, 0), \quad \xi_\natural^j := (\xi_1^j, \xi_2^j) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega_j}, \tag{2.7}$$

$$N^j(\nabla_{\xi^j}w_{(m)}^j(\xi_\natural^j, 0) = g^j(\xi_\natural^j) := \lambda_m^0\rho_0 n(P^j)n(P^j)^\top u_{(m)}^0(P^j), \quad \xi_\natural^j \in \varpi_j. \tag{2.8}$$

Подчеркнем, что правая часть краевого условия (2.8) возникла в результате замораживания ортогонального проектора (1.7) в точке P^j, формулы (1.8) с показателем $\alpha = -1$ и учета определения (1.1) малых множеств ω_j^ε. При этом переход к локальным координатам сопровождаем преобразованием дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} &L^j(\nabla_{\xi^j}) = D^j(-\nabla_{\xi^j})^\top AD^j(\nabla_{\xi_j}), \quad N^j(\nabla_{\xi^j}) = D^j(e_{(3)})^\top AD^j(\nabla_{\xi^j}), \\ &D^j(\nabla_{\xi^j}) = D((\theta^j)^{-1}\nabla_{\xi^j}), \quad e_{(3)} = (0,0,1)^\top, \end{aligned} \tag{2.9}$$

но поля смещений в противоположность правилам механики не изменяем. Благодаря полиномиальному свойству (1.20) общие результаты [10, п. 3 § 5] и [17, гл. 3 и 6] показывают, что задача (2.6)–(2.8) имеет единственное затухающее на бесконечности решение

$$w_{(m)}^j(\xi^j) = X(\xi^j)\Phi^j(\xi^j)b^j + \widetilde{w}^j(\xi^j), \tag{2.10}$$

где остаток $\widetilde{w}_{(m)}^j \in H^1(\mathbb{R}_-^3)^3$ допускает оценки

$$|\nabla_{\xi^j}^p w_{(m)}^j(\xi^j)| \leqslant c_{mp}(1+\rho_j)^{-2-p}, \quad \rho_j > R_\varpi, \quad p \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N},$$

радиус R_ϖ зафиксирован так, что $\overline{\varpi_j} \subset \mathbb{B}^2(R_\varpi) = \{\xi_\sharp^j : \rho_j < R_\varpi\}$, а срезающая функция $X \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ определена формулами

$$X(\xi^j) = 0 \text{ при } \rho_j \leqslant R_\varpi \quad \text{и} \quad X(\xi^j) = 1 \text{ при } \rho_j \geqslant 2R_\varpi.$$

Кроме того, (3×3)-матрица $\Phi^j = \bigl(\Phi^j_{(1)}, \Phi^j_{(2)}, \Phi^j_{(3)}\bigr)$ составлена из столбцов — решений трехмерной задачи Фламана (сосредоточенные силы на границе полупространства), удовлетворяющих соотношениям

$$\Phi^j(\xi^j) = \rho_j^{-1}\Phi^j(\rho_j^{-1}\xi^j), \tag{2.11}$$

и

$$-\int\limits_{\mathbb{S}^2_-(R_\varpi)} N^j_\cup(\xi^j, \nabla_{\xi^j}\Phi^j(\xi^j)\, ds_{\xi^j} = \mathbb{I}_3, \tag{2.12}$$

где фигурирует единичная $(n \times n)$-матрица $\mathbb{I}_n$ и оператор

$$N^j_\cup(\xi^j, \nabla_{\xi^j}) = D^j(\rho_j^{-1}\xi^j)^\top A D^j(\nabla_{\xi^j})$$

краевых условий на поверхности полусферы $\mathbb{S}^2_-(R_\varpi) = \{\xi^j : \rho_j = R_\varpi, \xi^j_3 < 0\}$. Наконец, столбец коэффициентов $b^j \in \mathbb{R}^3$ вычисляется по формуле

$$b^j = \int\limits_{\varpi_j} g^j(\xi^j_\natural) d\xi^j_\natural = \lambda^0_m \rho_0 n(P^j) n(P^j)^\top u^0_{(m)}(P^j)|\varpi_j|, \tag{2.13}$$

причем, как и ранее, $|\varpi_j|$ — площадь фигуры $\varpi_j \subset \Pi^j$. Представление (2.13) выводится при помощи соотношения (2.12) интегрированием по частям в полушаре $\{\xi^j \in \mathbb{R}^3 : \rho_j < 0\}$ и предельным переходом при $R \to +\infty$.

Найдем поправку гладкого типа в анзаце (2.2). Еще раз подставим разложения (2.2) и (2.1) в задачу (1.2)–(1.4) и соберем коэффициенты при $\varepsilon^{2+\alpha}$, записанные в координатах x при учете вытекающего из (2.11) равенства $\Phi^j(\xi^j) = \varepsilon\Phi^j(x^j)$. В результате приходим к задаче

$$L(\nabla_x)u'_{(m)}(x) - \lambda^0_m \rho u'_{(m)}(x) = \lambda'_m \rho u^0_{(m)}(x) - f'(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.14}$$

$$N(x, \nabla_x)u'_{(m)}(x) = -g'_{(m)}(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.15}$$

в которой

$$\begin{pmatrix} c f'_{(m)}(x) \\ g'_{(m)}(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{J} \begin{pmatrix} c[L(\nabla_x), \chi_j(x)] \\ [N(x, \nabla_x), \chi_j(x)] \end{pmatrix} \Phi^j(x^j) b^j, \tag{2.16}$$

а $[\mathsf{P}, \mathsf{Q}] = \mathsf{PQ} - \mathsf{QP}$ — коммутатор операторов P и Q.

Для того чтобы определить пару $\{\lambda'_m, u'_{(m)}\}$, уточним информацию об исходной паре $\{\lambda^0_m, u^0_{(m)}\}$, а именно, предположим что $\lambda^0_m = \boldsymbol{\lambda}_q$ — собственное число задачи (2.3), (2.4) с кратностью $\varkappa_q$, т.е.

$$\boldsymbol{\lambda}_{q-1} < \boldsymbol{\lambda}_q = \cdots = \boldsymbol{\lambda}_{q+\varkappa_q-1} < \boldsymbol{\lambda}_{q+\varkappa_q}. \tag{2.17}$$

Вектор-функцию $u^0_{(m)}$ представим в виде

$$u^0_{(m)}(x) = a^m_q \mathbf{u}_{(q)}(x) + \cdots + a^m_{q+\varkappa_q-1}\mathbf{u}_{q+\varkappa_q-1}(x), \tag{2.18}$$

где базис $\mathbf{u}_{(q)}, \ldots, \mathbf{u}_{q+\varkappa_q-1}$ в корневом подпространстве подчинен равенствам

$$\rho(\mathbf{u}_{(m)}, \mathbf{u}_{(p)})_\Omega = \delta_{m,p}, \quad m, p = q, \ldots, q + \varkappa_q - 1, \tag{2.19}$$

а столбцы коэффициентов $a^m = (a^m_q, \ldots, a^m_{q+\varkappa q-1})^\top \in \mathbb{R}^{\varkappa_q}$ — равенствам

$$(a^p)^\top a^m = \delta_{m,p}, \quad m, p = q, \ldots, q + \varkappa_q - 1. \tag{2.20}$$

В такой ситуации у задачи (2.14), (2.15) имеется $\varkappa_q$ условий разрешимости, которые соблюдаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda'_m a^m_k =&\lambda'_m \rho(u^0_{(m)}, \mathbf{u}_{(k)})_\Omega - \lim_{R\to+0} \int\limits_{\Omega(R)} \mathbf{u}_{(k)}(x)^\top (f'_{(m)}(x) \\ &+ (L(\nabla_x) - \lambda^0_m \rho \mathbb{I}_3) u'_{(m)}(x))\, dx = \sum_{j=1}^{J} \lim_{R\to+0} \int\limits_{\Sigma^j(R)} (\mathbf{u}_{(k)}(x)^\top N_\cup(x^j\nabla_{x^j})\Phi^j(x^j) \\ &- (N^j_\cup(x^j, \nabla_{x^j})\mathbf{u}_{(k)}(x))^\top \Phi^j(x^j))\, ds_x b^j = -\sum_{j=1}^{J} \mathbf{u}_{(k)}(P^j)^\top b^j.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Выкладка нуждается в пояснениях. Сначала умножили систему (2.14) скалярно на $\mathbf{u}_{(k)}(x)$ и, приняв во внимание соотношения (2.19) и (2.20), применили формулу Грина в области $\Omega(R) = \{x \in \Omega : r_j = |x^j| > R\}$. Затем оставшиеся интегралы по сферическим множествам $\Sigma^j(R) = \{x \in \Omega : r_j = R\}$ малого радиуса $R > 0$ вычислили согласно формуле (2.12). При этом учтены несколько обстоятельств. Во-первых, вектор-функция f' гладкая, так как область Ω выпуклая $L^j(\nabla_{x^j})\Phi^j(x^j) = 0$ при $x \in \Omega \cap \mathcal{V}^j$, а вектор-функция g' ограниченная благодаря гладкости поверхностей $\Gamma \cap \mathcal{V}^j$, т.е. интегралы сходящиеся. Во-вторых, множество $\Sigma^j(R)$ отличается от полусферы $\{x : r_j = R, x^j_3 < 0\}$ лишь внутри полоски шириной $O(R^2)$ около экватора, не замечаемой в результате предельного перехода $R \to +0$. Наконец, равенства (2.18) и (2.13) позволяют преобразовать соотношения (2.21) с индексами $k = q, \dots, q + \varkappa_q - 1$ в систему алгебраических уравнений

$$M^q a_m = \lambda'_m a^m,$$

где элементы симметричной $(\varkappa_1 \times \varkappa_q)$-матрицы M^q имеют вид

$$M^q_{kp} = -\lambda^0_m \rho_0 \sum_{j=1}^{J} |\varpi_j| \mathbf{u}_{(k)}(P^j)^\top n(P^j) n(P^j)^\top \mathbf{u}_{(p)}(P^j)^\top. \tag{2.22}$$

Эта отрицательная матрица обладает собственными числами

$$\lambda'_q \leqslant \lambda'_{q+1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_{q+\varkappa_q-1} \leqslant 0, \tag{2.23}$$

которые вместе с соответствующими собственными векторами $a^q, \dots, a^{q+\varkappa_q-1} \in \mathbb{R}^{\varkappa_q}$, подчиненными условиям ортогональности и нормировки (2.19), и найденными из ставших разрешимыми задач (2.14), (2.15) поправками гладкого типа $u'_{(q)}, \dots, u'_{(q+\varkappa_q-1)}$ конкретизируют отделенные члены асимптотических анзацев (2.1) и (2.2). Впрочем, упомянутые поправки определены с точностью до линейных комбинаций вида (2.18), коэффициенты $a^{m\prime}$ которых вычисляются на следующих шагах асимптотической процедуры (ср. п. 4.1).

Сформулируем вытекающие из общих результатов [13, гл. 4 и 9, 10] оценки остатков в асимптотических представлениях (2.1) собственных чисел.

Теорема 2.1. *Пусть $\alpha > -1$ и $\boldsymbol{\lambda}_q$ — собственное число задачи* (2.3), (2.4) *в области Ω с кратностью $\varkappa_q$ (см. соотношение* (2.17)*), причем $q > 6$. Тогда найдутся такие положительные ε_q и c_q, что собственные числа $\lambda^\varepsilon_q, \dots, \lambda^\varepsilon_{q+\varkappa_q-1}$ задачи* (1.2)–(1.4) *удовлетворяют неравенству*

$$|\lambda^\varepsilon_m - \boldsymbol{\lambda}_q - \varepsilon^{2-\alpha}\lambda'_m| \leqslant c_q \varepsilon^{3-\alpha} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_q], \tag{2.24}$$

где фигурируют собственные числа (2.23) *матрицы M^q с элементами* (2.22). *Первые шесть собственных чисел $\lambda^\varepsilon_1, \dots, \lambda^\varepsilon_6$ нулевые.*

Отметим, что количество и расположение множеств (1.1) на поверхности Γ не играют роли. Итерационные процессы, разработанные в монографии [13], позволяют построить бесконечные асимптотические ряды для собственных пар $\{\lambda^\varepsilon_m, u^\varepsilon_{(m)}\}$.

2.3. Взаимодействие пограничных слоев при $\alpha < -1$**.** Согласно общим результатам [12] при таком показателе α в формуле (1.8) асимптотические анзацы изменяются существенно:

$$\lambda^\varepsilon_{6+m} = \varepsilon^{-1-\alpha}\mu_m + \dots, \tag{2.25}$$

$$u^\varepsilon_{(6+m)}(x) = d(x)c^0_{(m)} + \sum_{j=1}^{J} \chi_j(x) w^j_{(m)}(\xi^j) + \varepsilon u'_{(m)}(x) + \dots. \tag{2.26}$$

При этом число μ_m, столбец $c^0 \in \mathbb{R}^6$ и вектор-функции $w^1_{(m)}, \dots, w^J_{(m)}$ удовлетворяют задачам в полупространстве, которые состоят из дифференциальных уравнений (2.6), а также краевых условий (2.7) и

$$N^j(\nabla_{\xi^j}) w^j_{(m)}(\xi^j_\natural, 0) = \mu_m \rho_0 n(P^j) n(P^j)^\top \big(w^j_{(m)}(\xi^j_\natural; 0) + d(P^j)c^0_{(m)}\big), \quad \xi^j_\natural \in \varpi_j. \tag{2.27}$$

Подчеркнем, что правая часть краевого условия (2.27) включает постоянное слагаемое $d(P^j)c^0_{(m)}$, порожденное первым членом анзаца (2.26).

Решение задачи (2.6), (2.7), (2.27) допускает представление (2.10), в котором столбец коэффициентов $b^j \in \mathbb{R}^3$ выглядит так:

$$b^j = \mu_m \rho_0 n(P^j) n(P^j)^\top \Bigg(\int\limits_{\varpi_j} w^j_{(m)}(\xi^j_\natural, 0)\, d\xi^j_\natural + d(P^j) C^0 |\varpi_j| \Bigg) \tag{2.28}$$

(ср. формулу (2.13)). Поскольку для $\alpha < -1$ множитель $\varepsilon^{-1-\alpha}$ при μ_m в анзаце (2.25) мал, приходим к задаче для поправочного члена гладкого типа: стационарной системе уравнений

$$L(\nabla_x) u'_{(m)}(x) = -f'_{(m)}(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.29}$$

и краевым условиям (2.15). Правые части $f'_{(m)}$ и $g'_{(m)}$ вычисляются по формуле (2.16), но сама задача, свободная от спектрального параметра, приобретает шесть условий разрешимости

$$\int\limits_\Omega d(x)^\top f'_{(m)}(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} d(x)^\top g'_{(m)}(x)\, ds_x = 0 \in \mathbb{R}^6. \tag{2.30}$$

Повторив с понятными изменениями выкладку (2.21), обнаруживаем, что согласно (2.28) соотношение (2.30) принимает вид алгебраической системы

$$Mc^0 = -\sum_{k=1}^{J} |\varpi_k| d(P^k)^\top n(P^k) n(P^k)^\top \overline{w}^j_{(m)}, \tag{2.31}$$

где

$$M = \sum_{j=1}^{J} |\varpi_j| d(P^j)^\top n(P^j) n(P^j)^\top d(P^j) \in \mathbb{R}^{6\times 6}, \quad \overline{w}^j = \frac{1}{|\varpi_j|} \int\limits_{\varpi_j} w^j(\xi^j_\natural, 0) d\xi^j_\natural \in \mathbb{R}^3. \tag{2.32}$$

Ограничение $\dim \mathcal{L} = 6$, наложенное на линейную оболочку столбцов (1.21), обеспечивает положительную определенность симметричной (6×6)-матрицы M, а значит, решив систему линейных алгебраических уравнений (2.31) и подставив результат в (2.27), получим краевые условия

$$\begin{aligned} N^j(\nabla_\xi^j)w^j_{(m)}(\xi^j_\natural,0)&=\mu_m\rho_0 n(P^j)n(P^j)^\top\Big(w^j_{(m)}(\xi^j_\natural,0)\\ &-d(P^j)M^{-1}\sum_{k=1}^J|\varpi_k|d(P^k)^\top n(P^k)n(P^k)^\top\overline{w}^k_{(m)}\Big),\quad \xi^j_\natural\in\varpi_j,\quad j=1,\dots,J, \end{aligned}\tag{2.33}$$

замыкающие совокупность задач (2.6), (2.7).

Присутствие в правой части (2.33) всех средних $\overline{w}^k_{(m)}$ вектор-функций $w^k_{(m)},\dots,w^J_{(m)}$, связывают задачи (2.6), (2.7), (2.33) в единую спектральную задачу, вариационная формулировка которой принимает вид интегрального тождества

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J E(w^j,\psi^j;\mathbb{R}^3_-)&=\mu\rho_0\sum_{j=1}^J\Big((n(P^j)^\top w^j,n(P^j)^\top\psi^j)_{\varpi_j}\\ &-\Big(d(P^j)^\top n(P^j)n(P^j)\overline{\psi}^j\Big)^\top M^{-1}\sum_{k=1}^J d(P^k)^\top n(P^k)n(P^k)^\top\overline{w}^j\Big),\\ \overrightarrow{\psi}&=\big(\psi^1,\dots,\psi^J\big)\in\mathcal{E}\big(\mathbb{R}^3_-\big)^J. \end{aligned}\tag{2.34}$$

При этом $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-)$ — пространство, полученное пополнением линеала $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^3_-})^3$ (бесконечно дифференцируемые вектор-функции с компактными носителями) по «энергетической» норме $E(w^j,w^j;\mathbb{R}^3_-)^{1/2}$. Подчеркнем, что неравенство Корна [7]

$$\|\nabla_{\xi^j}w^j;L^2(\mathbb{R}^3_-)\|^2\leqslant c_A E\big(w^j,w^j;\mathbb{R}^3_-\big),\quad w^j\in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^3_-})^3,$$

и следствие одномерного неравенства Харди (1.28)

$$\|\rho_j^{-1}w^j;L^2(\mathbb{R}^3_-)\|^2\leqslant c\|\nabla_{\xi^j}w^j;L^2(\mathbb{R}^3_-)\|^2,\quad w^j\in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^3_-})^3,\tag{2.35}$$

показывают, что левая часть (2.34) — скалярное произведение в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-)^J$, которое состоит из векторов $w\in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3_-)^{3\times J}$, обладающих конечными энергетической нормой и весовой нормой из левой части (2.35). Благодаря неравенствам Коши–Буняковского, алгебраическому и интегральному, множитель $B(w,\psi)$ при $\mu\rho_0$ в правой части (2.34) удовлетворяет соотношению $B(w,w)\geqslant 0$. Осталось упомянуть, что жесткие смещения из линеала (1.18), аннулирующие левую часть (2.34), не попадают в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-)$ из-за расходимости интегралов по $\mathbb{R}^3_-$ в нормах из (2.35).

Теорема 2.2. *При условии* $\dim\mathcal{L}=6$, *наложенном на столбцы* (1.21), *задача* (2.34) *обладает дискретным спектром, представляющим собой монотонную положительную неограниченную последовательность*

$$0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\ldots\leqslant\mu_m\leqslant\dots\to+\infty.\tag{2.36}$$

Соответствующие собственные векторы $w_{(1)},w_{(2)},\dots,w_{(m)},\dots\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-)^J$ *можно подчинить условиям ортогональности и нормировки*

$$B(w_{(m)},w_{(p)})=\delta_{m,p},\quad m,p\in\mathbb{N}.$$

Очередное утверждение установлено в статье [12].

Теорема 2.3. *При условиях* $\alpha<-1$ *и* $\dim\mathcal{L}=6$ *для любого* $m\in\mathbb{N}$ *найдутся величины* $\varepsilon_m>0$ *и* $c_m>0$, *при которых положительные собственные числа задачи* (1.2)–(1.4) *удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda^\varepsilon_{6+m}-\varepsilon^{-1-\alpha}\mu_m|\leqslant c_m\varepsilon^{-\alpha}\quad\text{при}\quad\varepsilon\in(0,\varepsilon_m],$$

где μ_m — *члены последовательности* (2.36) *собственных чисел задачи* (2.7).

Ограничение, наложенное на столбцы (1.21), сыграло существенную роль в представленном асимптотическом анализе — при снятии этого ограничения анзацы становятся совершенно другими (см. работы [12] и [20]). После построения главных членов асимптотик можно при помощи процедур из монографии [13] соорудить бесконечные ряды для собственных пар задачи (1.2)–(1.4). Конструкции поправочных членов в анзацах (2.25) и (2.26) можно извлечь из материала п. 2.2, впрочем, при упрощающем предположении об уплощенности участков $\Gamma^j = \Gamma \cap \mathcal{V}^j$ границы $\partial\Omega$ области Ω (ср. п. 4.1).

2.4. Совмещение спектров в предельных задач при $\alpha = -1$. Прежние асимптотические анзацы нуждаются в существенных изменениях. Прежде всего, асимптотические разложения приходится вести по степеням параметра $\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, собственные вектор-функции задачи (1.2)–(1.4) ищем в виде

$$\begin{aligned} u^\varepsilon_{(m)}(x) = & u^0_{(m)}(x) + \sqrt{\varepsilon} u'_{(m)}(x) + \varepsilon u''_{(m)}(x) \\ & + \varepsilon^{-1/2} \sum_{j=1}^{J} \chi_j(x) \Big(w^j_{(m)}(\xi^j) + \sqrt{\varepsilon} w^{j\prime}_{(m)}(\xi^j) + \varepsilon w^{j\prime\prime}_{(m)}(\xi^j) \Big) + \ldots . \end{aligned} \tag{2.37}$$

При этом главные члены $u^0_{(m)}$ и $\varepsilon^{-1/2}\chi_j w^j_{(m)}$ приобретают $H^1(\Omega)$-нормы одного и того же порядка при $\varepsilon \to +0$. В качестве главных членов асимптотического анзаца для собственного числа

$$\lambda^\varepsilon_m = \boldsymbol{\mu}^0_m + \sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{\mu}'_m + \varepsilon \boldsymbol{\mu}''_m + \ldots \tag{2.38}$$

выступают элементы объединенной последовательности

$$0 = \boldsymbol{\mu}^0_1 = \cdots = \boldsymbol{\mu}^0_6 < \boldsymbol{\mu}^0_7 \leqslant \boldsymbol{\mu}^0_8 \leqslant \ldots \leqslant \boldsymbol{\mu}^0_m \leqslant \cdots \to +\infty \tag{2.39}$$

собственных чисел задачи (2.3), (2.4) в ограниченной области Ω и набора (независимых) задач в полупространстве $\mathbb{R}^3_-$, состоящих из дифференциальных уравнений (2.6), а также краевых условий (2.7) и

$$N^j(\nabla_{\xi^j}) \mathbf{w}^j_{(m)}(\xi^j_\natural) = \mu^j \rho_0 n(P^j) n(P^j)^\top \mathbf{w}^j_{(m)}(\xi^j_\natural, 0), \quad \xi^j_\natural \in \varpi_j. \tag{2.40}$$

По сравнению с п. 2.3 краевое условие (2.40) не содержит дополнительного постоянного члена именно из-за множителя $\varepsilon^{-1/2}$ при пограничном слое.

Как и в теореме 2.2, у задачи (2.6), (2.7), (2.40) имеется дискретный спектр $\wp^j$, образующий последовательность

$$0 < \mu^j_1 \leqslant \mu^j_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu^j_m \leqslant \cdots \to +\infty, \tag{2.41}$$

а соответствующие собственные вектор-функции $\mathbf{w}^j_{(1)}, \mathbf{w}^j_{(2)}, \ldots, \mathbf{w}^j_{(m)}, \cdots \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$\rho_0 (\mathbf{w}^j_m, \mathbf{w}^j_p)_{\varpi_j} = \delta_{m,p} \quad m, p \in \mathbb{N}. \tag{2.42}$$

Напомним, что собственные вектор-функции задачи (2.3), (2.4), отвечающие ее собственным числам

$$0 = \boldsymbol{\lambda}_1 = \cdots = \boldsymbol{\lambda}_6 < \boldsymbol{\lambda}_7 \leqslant \boldsymbol{\lambda}_8 \leqslant \ldots \leqslant \boldsymbol{\lambda}_m \leqslant \cdots \to +\infty, \tag{2.43}$$

удовлетворяют соотношениям (2.19). Спектр (2.43) обозначаем $\wp^0$.

Покажем, как определяются поправки в анзацах (2.38) и (2.37). В общей ситуации формулы слишком громоздки, и поэтому разберем лишь несколько представительных случаев.

1°. *Задача в* Ω. Пусть $\boldsymbol{\mu}^0_m = \boldsymbol{\lambda}_q \in \wp^0$ — простое собственное число, но

$$\boldsymbol{\mu}^0_m \notin \wp^j, \quad j = 1, \ldots, J. \tag{2.44}$$

Тогда $u^0_{(m)} = \mathbf{u}_{(q)}$ — соответствующая собственная вектор-функция задачи (2.3), (2.4), нормированная согласно равенству (2.19) и

$$\boldsymbol{\mu}'_m = 0, \quad u'_{(m)} = 0, \quad w^j_{(m)} = 0, \ j = 1, \ldots, J.$$

Кроме того, $w^j_{(m)}$ — решение (2.10) задачи (2.6)–(2.8), в которой $\lambda^0_m = \boldsymbol{\lambda}_q$, а значит, ввиду предположенной однозначной разрешимости задачи (см. требование (2.44)) формула (2.13) принимает вид

$$b^j = \boldsymbol{\lambda}_q \rho_0 n(P^j) n(P^j)^\top \mathbf{u}_{(q)}(P^j)|\varpi_j|, \quad j = 1, \dots, J.$$

В результате вторые поправки $u''_{(m)}$ и $\boldsymbol{\mu}''_m$ находятся из задачи (2.14), (2.15) с правыми частями (2.16). Окончательно при помощи упрощенной выкладки (2.21) обнаруживаем, что

$$\boldsymbol{\mu}''_m = -\boldsymbol{\lambda}_q \rho_0 \sum_{j=1}^{J} |\varpi_j| \mathbf{u}_{(q)}(P^j)^\top n((P^j) n(P^j)^\top \mathbf{u}_{(q)}(P^j) \leqslant 0.$$

2°. *Задачи в полупространстве.* Пусть $\boldsymbol{\mu}^0_m = \mu^j_{mg} \in \wp^j$ — простые собственные числа при $j = 1, \dots, K$, но $\boldsymbol{\mu}^0_m \notin \wp^0$ и $\boldsymbol{\mu}^0_m \notin \wp^j$ при $j = 1 + K, \dots, J$. Тогда

$$w^j_{(m)} = a^m_j \mathbf{w}^j_{(m(j))}, \quad j = 1, \dots, K, \tag{2.45}$$

где собственные вектор-функции $\mathbf{w}^j_{(m(j))}$ задач (2.6), (2.7), (2.27) и столбцы $a^m = (a^m_1, \dots, a^m_k)^\top$ подчинены условиям ортонормировки (2.42) и (2.20) соответственно. Кроме того,

$$w^j_{(m)} = 0, \quad j = 1 + K, \dots, J, \quad u^0_{(m)} = 0, \quad \boldsymbol{\mu}'_m = 0,$$

а $u'_{(m)}$ — решение задачи (2.14), (2.15), в которой $\lambda^0_m = \boldsymbol{\mu}^0_m$, $\lambda'_m = 0$ и правые части (2.16) включают коэффициенты

$$\begin{aligned} &b^j_{(m)} = \mathbf{m}_j n(P^j) a^m_j, \quad \mathbf{m}_j = \boldsymbol{\mu}^0_m \rho_0 n(P^j)^\top |\varpi_j| \overline{\mathbf{w}}^j_{(m(j))}, \quad j = 1, \dots, K, \\ &b^j_{(m)} = 0, \quad j = 1 + K, \dots, J. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Благодаря предположению $\boldsymbol{\mu}^0_m \notin \wp^0$ сформированная задача в области Ω задача однозначно разрешима, причем ее решение представимо в виде

$$u'_{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{K} \widehat{G}^k(x) b^k, \tag{2.47}$$

где $\widehat{G}^j$ — регулярная часть тензора Грина G^j (матрицы-функции размером 3×3) с сингулярностью в точке P^j, т.е. решение однородной ($f'_{(m)} = 0$ и $g'_{(m)} = 0$) задачи (2.14), (2.15) в области Ω, допускающее представление

$$G^j(x) = \chi_j(x) \Phi^j(x^j) + \widehat{G}^j(x). \tag{2.48}$$

При этом подстановка матриц G^j и G^k в формулу Грина на области $\Omega(R)$ и предельный переход $R \to +0$ (ср. выкладку (2.21)) показывают, что $\widehat{G}^j(P^k) = \widehat{G}^k(P^j)$, а значит $(K \times K)$-матрица

$$\mathbf{G} = \big(\mathbf{G}_{jk}\big)^K_{j,k=1} = (n(P^j)^\top \widehat{G}^k(P^j) n(P^k))^K_{j,k=1} \tag{2.49}$$

симметричная.

Таким образом, в силу формул (2.47) и (2.46) получаем, что

$$n(P^j)^\top u'_{(m)}(P^j) = \sum_{k=1}^{k} \mathbf{m}_k \mathbf{G}_{jk} a^m_k, \tag{2.50}$$

и следовательно, число $\boldsymbol{\mu}''_m$ и вектор-функция $w^{j\prime\prime}_{(m(j))}$ из анзацев (2.38) и (2.37) соответственно удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (2.6), а также краевым условиям (2.7) и

$$\begin{aligned}N^j(\nabla_{\xi^j} w^{j\prime\prime}_{(m)}(\xi^j_\natural, 0) =& \rho_0 n(P^j)n(P^j)^\top\big(\boldsymbol{\mu}^0_m w^{j\prime\prime}_{(m)}(\xi^j_\natural, 0)\\ &+ \boldsymbol{\mu}''_m \mathbf{w}^j_{(m(j))}(\xi^j_\natural, 0)a^m_j + \boldsymbol{\mu}^0_m w\prime_{(m)}(P^j)\big), \quad \xi^j_\natural \in \varpi_j.\end{aligned}$$

Поскольку $\boldsymbol{\mu}^0_m$ — простое собственное число задач (2.6), (2.7), (2.40) при $j = 1, \ldots, K$ у каждой из полученных задач для $w^{j\prime\prime}_{(m)}$ имеется только одно условие разрешимости, которому согласно нормировке (2.42), а также формулам (2.50) и (2.46) придаем вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}''_m a^m_j &= \boldsymbol{\mu}''_m \rho_0 \|n(P^j)^\top \mathbf{w}^j_{(m(j))}; L^2(\varpi_j)\|^2 a^m_j\\ &= -\boldsymbol{\mu}^0_m |\varpi_j| \big(n(P^j)^\top \overline{w}^j_{(m(j))}\big)^\top n(P^j)^\top u'_{(m)}(P^j)\\ &= -\sum_{k=1}^K \mathbf{m}_j \mathbf{G}_{jk} \mathbf{m}_k a^m_k =: \sum_{k=1}^K M_{jk} a^m_k.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Итак, собственные числа (6×6)-матрицы M с определенными в (2.51) элементами предоставляют вторые поправки в анзаце (2.38) для собственных чисел, а соответствующие собственные векторы $a^m \in \mathbb{R}^K$ конкретизируют главные члены (2.45) в анзаце (2.37) для собственных вектор-функций задачи (1.2)–(1.4).

3°. *Общее собственное число задач в Ω и $\mathbb{R}^3_-$.* Пусть $\boldsymbol{\mu}^0_m$ — простое собственное число задачи (2.3), (2.4) в области Ω и задач (2.6), (2.7), (2.40) в полупространстве $\mathbb{R}^3_-$ при $j = 1, \ldots, K$, а соответствующие собственные вектор-функции $\mathbf{u}_{(m(0))}$ и $\mathbf{w}^1_{(m(1))}, \ldots, \mathbf{w}^k_{(m(k))}$ ортонормированы согласно формулам (2.19) и (2.42).

В анзаце (2.37) возьмем

$$u^0_{(m)} = a^m_0 \mathbf{u}_{(m(0))}, \quad w^j_{(m)} = a^m_j \mathbf{w}^j_{(m(j))}, \ j = 1, \ldots, K, \quad \sum_{p=0}^K |a^m_p|^2 = 1, \tag{2.52}$$

а столбцы $a^m = (a^m_0, \ldots, a^m_K)^\top$ подчиним аналогичным (2.20) условиям ортогональности и нормировки. В итоге обнаруживаем, что поправку $u'_{(m)}$ следует искать из системы дифференциальных уравнений

$$L(\nabla_x) u'_{(m)}(x) - \boldsymbol{\mu}^0_m \rho u_{(m)}(x) = \boldsymbol{\mu}'_m \rho u^0_{(m)}(x) - f'_{(m)}(x), \quad x \in \Omega,$$

с краевыми условиями (2.15), причем в формуле (2.16) для правых частей суммирование ведется по $j = 1, \ldots, K$, а столбцы коэффициентов заданы равенствами (2.46). Кроме того, поправочные члены типа пограничного слоя удовлетворяет системе уравнений (2.6) в полупространстве $\mathbb{R}^3_-$, а также краевым условиям (2.7) и

$$\begin{aligned}N^j(\nabla_{\xi^j}) w^{j\prime}_{(m)}(\xi^j_\natural, 0) =& \xi_0 n(P^j)n(P^j)^\top\big(\boldsymbol{\mu}^0_m w^{j\prime}_{(m)}(\xi^j_\natural, 0)\\ &+ \boldsymbol{\mu}'_m w^j_{(m)}(\xi^j_\natural, 0) + \boldsymbol{\mu}^0_m u^0_{(m)}(P^j)\big), \quad \xi^j_\natural \in \varpi_j.\end{aligned}$$

Теперь условия разрешимости сформированных краевых задач при учете соотношений (2.52) превращаем в систему алгебраических уравнений для столбца a^m

$$M a^m = \mu'_m a^m \in \mathbb{R}^{1+K} \tag{2.53}$$

с симметричной $((1 + K) \times (1 + K))$-матрицей M, у которой верхняя (с индексом $j = 0$) строка принимает вид

$$\big(0, -\mathbf{m}_1 n(P^1)^\top \mathbf{u}_{(m(0))}(P^1), \ldots, -\mathbf{m}_k n(P^k)^\top \mathbf{u}_{(m(0))}(P^k)\big),$$

а остальные строки с номерами $j = 1, \ldots, K$ — вид

$$\big(-\mathbf{m}_j n(P^j)^\top \mathbf{u}_{(m(j))}(P^j), 0, \ldots, 0\big).$$

Несложные вычисления показывают, что у такой матрицы имеется нулевое собственное число с кратностью $K-1$ и еще два собственных числа выглядят следующим образом:

$$\boldsymbol{\mu}'_{m\pm}=\pm\rho_0\boldsymbol{\mu}^0_m\Big(\sum_{j=1}^{K}|\varpi_j|^2|n(P^j)^\top\overline{\mathbf{w}}^j_{(m(j))}|^2|n(P^j)^\top\mathbf{u}_{(m(0))}(P^j)|^2\Big)^{1/2}.$$

Итак, вычислены первые поправки в анзаце (2.38) для собственных чисел задачи (1.2)–(1.4). Собственные столбцы алгебраической системы (2.53) конкретизируют начальные члены (2.37) анзаца для собственных вектор-функций. Полученные формулы демонстрируют, что в рассмотренном случае асимптотические разложения действительно ведутся по степеням малого параметра $\sqrt{\varepsilon}$.

2.5. Заключение. Асимптотические процедуры, описанные для трех конкретных ситуаций, без особого труда приспосабливаются и к другим ситуациям, в частности, для кратных собственных чисел задач (2.6), (2.7), (2.40). Требование уплощенности участков $\Gamma_1,\dots,\Gamma_J$ было востребовано только в ситуации 3° из п. 2.4, в которой пришлось строить пару членов гладкого типа и типа пограничного слоя. В тех случаях, когда главные члены асимптотики определялись на первом же шаге процедуры, растяжение координат

$$x\ \mapsto\ \xi^j=\varepsilon^{-1}(s^j_1,s^j_2,n^j)$$

спрямляет границу, а переменные коэффициенты преобразованных дифференциальных операторов (2.9) проявляются лишь в младших асимптотических членах. Этот вопрос будет прокомментирован в п. 4.1.

3. Обоснование асимптотики.

3.1. Преамбула. Как упоминалось, обоснование асимптотических разложений собственных пар задачи (1.2)–(1.4), построенных в п. 2.1 и п. 2.2, обеспечено общими результатами [13, гл. 4 и 10] и [12] (см. также [20] для схожей задачи теории упругости). В принципе разработанные схемы можно приспособить и к ситуации $\alpha=-1$, рассмотренной в п. 2.3, однако для полноты картины в данном параграфе будет предоставлено оправдание асимптотических конструкций, впрочем не в полном объеме, но только для главных асимптотических членов, так как поправочные члены в анзацах (2.38) и (2.39) были построены в § 2 лишь при определенных ограничениях.

3.2. Теорема о сходимости. Пусть $u^\varepsilon_{(m)}$ — собственная вектор-функция вариационной задачи (1.9), отвечающая собственному числу

$$\lambda^\varepsilon_m\leqslant C_m \tag{3.1}$$

и нормированная согласно равенству (1.17), где $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение (1.11), в котором $\rho_\varepsilon=\varepsilon^{-1}\rho_0$, а $\rho>0$ и $\rho_0>0$ — фиксированные числа. Тогда в силу неравенства Корна [7]

$$\|u^\varepsilon_{(m)};H^1(\Omega)\|^2\leqslant c\left(E(u^\varepsilon_{(m)},u^\varepsilon_{(m)};\Omega)+\rho\|u^\varepsilon_{(m)};L^2(\Omega)\|^2\right)$$

найдется положительная бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, вдоль которой верны сходимости

$$\lambda^{\varepsilon l}_m\to\boldsymbol{\lambda}^0_m, \tag{3.2}$$

$$u^{\varepsilon l}_{(m)}\to\mathbf{u}^0_{(m)}\ \text{слабо в}\ H^1(\Omega)^3\ \text{и сильно в}\ L^2(\Omega)^3. \tag{3.3}$$

Соотношение (3.1) будет проверено в замечании 3.1. Перепишем вектор-функцию $u^\varepsilon_{(m)}$ в локальных криволинейных координатах (см. п. 1.1) и положим

$$w^{j\varepsilon}_{(m)}(\xi^j)=\varepsilon^{1/2}\chi_j(x)u^\varepsilon_{(m)}(s^j,n^j), \tag{3.4}$$

где $\xi_i^j = \varepsilon^{-1} s_i^j$, $i = 1, 2$, и $\xi_3^j = \varepsilon^{-1} n^j$. Имеем

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon_{(m)}; \mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-)\|^2 &\leqslant c\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^3_-} \left(|\nabla_{\xi^i}(\chi_j u^\varepsilon_{(m)})|^2 + (1+\rho_j)^{-2}|\chi_j u^\varepsilon_{(m)}|^2\right) d\xi^j \\ &\leqslant c\varepsilon \int\limits_{\Omega\cap\mathcal{V}^j} \left(\varepsilon^2|\nabla_x u^\varepsilon_{(m)}(x)|^2 + (1+\varepsilon^{-1}r_j)^{-2}|u^\varepsilon_{(m)}(x)|^2\right)\varepsilon^{-3}\,dx \leqslant c\|u^\varepsilon_{(m)}; H^1(\Omega)\|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Пояснение: при переходе от растянутых криволинейных координат ξ^j к исходным декартовым координатам x использованы соотношения

$$\begin{aligned} &\nabla_{\xi^i} = T^\varepsilon(x)\nabla_x, \quad d\xi^i = \varepsilon^{-3} t^\varepsilon(x)\,dx, \\ &\|T^\varepsilon_{(x)} - \theta^j; \mathbb{R}^{3\times 3}\| + |t^\varepsilon(x) - 1| \leqslant cr_j,\ x \in \Omega\cap\mathcal{V}^j, \end{aligned} \tag{3.6}$$

а в последней оценке из выкладки (3.5) применено следствие (1.27) неравенства Харди (1.28).

Итак, вдоль подпоследовательность (не изменяем обозначение $\{\varepsilon_\ell\}$) имеет место сходимость

$$w^{j\varepsilon_\ell}_{(m)} \to \mathbf{w}^{j0}_{(m)} \text{ слабо в } \mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-) \text{ и сильно в } L^2(\varpi_j)^3. \tag{3.7}$$

Далее для краткости индекс ℓ у символа ε_ℓ не пишем.

В интегральное тождество (1.9) подставим пробную вектор-функцию $\psi^0 \in C_c^\infty(\overline{\Omega}\setminus\mathcal{P})^3$. Заметив, что $\psi = 0$ на множестве ω^ε при малом $\varepsilon > 0$, в силу соотношений (3.2) и (3.3) приходим к формуле

$$0 = E(u^\varepsilon_{(m)}, \psi; \Omega) - \lambda^\varepsilon_m \rho(u^\varepsilon_{(m)}, \psi)_\Omega \ \to\ E(\mathbf{u}^0_{(m)}, \psi; \Omega) - \boldsymbol{\lambda}^0_m \rho(\mathbf{u}^0_{(m)}, \psi)_\Omega = 0.$$

Поскольку подпространство $C_c^\infty(\overline{\Omega}\setminus\mathcal{P})$ плотно в $H^1(\Omega)$, получаем интегральное тождество

$$E(\mathbf{u}^0_{(m)}, \psi^0; \Omega) = \boldsymbol{\lambda}^0_m \rho(\mathbf{u}^0_{(m)}, \psi^0)_\Omega, \quad \psi \in H^1(\Omega)^3, \tag{3.8}$$

обслуживающее спектральную задачу (2.3), (2.4).

При $j = 1, \dots, J$ для $\psi^j \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}^3_-)^3$ аналогично формуле (3.4) положим

$$\phi^{j\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1/2}\psi^j(\xi^j).$$

Имеем

$$\lambda^\varepsilon_m \rho|(u^\varepsilon_{(m)}, \phi^{j\varepsilon})_\Omega| \leqslant C_m\|u^\varepsilon_{(m)}; L^2(\Omega)\|\varepsilon^{3/2}\|\varepsilon^{-1/2}\psi^j; L^2(\mathbb{R}^3_-)\| \leqslant c_m\varepsilon\left(\psi^j\right)$$

и

$$\begin{aligned} &E(u^\varepsilon_{(m)}, \phi^{j\varepsilon}; \Omega) \ \to\ E(\mathbf{w}^j_{(m)}, \psi^j; \mathbb{R}^3_-), \\ &\lambda^\varepsilon_m \rho_\varepsilon(u^\varepsilon_{(m)}, \phi^{j\varepsilon})_{\omega^\varepsilon_j} = \lambda^\varepsilon_m \varepsilon^{-1}\rho_0(\varepsilon^{-1/2}w^{j\varepsilon}_{(m)}, \varepsilon^{-1/2}\psi^j)_{\omega^\varepsilon_j} \ \to\ \boldsymbol{\lambda}^0_m \rho_0(\mathbf{w}^j_{(m)}, \psi^j)_{\varpi_j}. \end{aligned}$$

Следовательно, предельный переход при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (1.9) с указанными ингредиентами приводит к интегральному тождеству

$$E(\mathbf{w}^j_{(m)}, \psi^j; \mathbb{R}^3_-) = \boldsymbol{\lambda}^0_m \rho_0(\mathbf{w}^j_{(m)}, \psi^j)_{\varpi_j}, \quad \psi^j \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-), \tag{3.9}$$

т.е. к вариационной формулировке задачи (2.6), (2.7), (2.40).

Предложение 3.1. *Если $\alpha = -1$ в формуле* (1.8)*, то предельный переход* (3.2) *дает собственное число $\boldsymbol{\lambda}^0_m$ одной из задач* (3.8) *и* (3.9)*, $j = 1, \dots, J$, а предельные переходы* (3.3) *и* (3.7) *— набор вектор-функций $\mathbf{u}^0_{(m)} \in H^1(\Omega)^3$ и $\mathbf{w}^{10}_{(m)}, \dots \mathbf{w}^{J0}_{(m)} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3_-)$, удовлетворяющих указанным задачам и подчиненных равенству*

$$\rho\|\mathbf{u}^0_{(m)}; L^2(\Omega)\|^2 + \rho_0\sum_{j=1}^J \|\mathbf{w}^{j0}_{(m)}; L^2(\varpi_j)\|^2 = (1+\boldsymbol{\lambda}^0_m)^{-1}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Осталось проверить равенство (3.10), означающее, в частности, что хотя бы одна из перечисленных вектор-функций не равна нулю, т.е. $\boldsymbol{\lambda}_m^0$ — собственное число в самом деле. Согласно формулам (1.17) и (1.11), (1.9) имеем

$$1 = \langle u^\varepsilon_{(m)}, u^\varepsilon_{(m)} \rangle_\varepsilon = (\lambda^\varepsilon_m + 1)\left(\rho \| u^\varepsilon_{(m)}; L^2(\Omega)\| + \varepsilon^{-1}\rho_0 \sum_{j=1}^{J} \|n(P^j)^\top u^\varepsilon; L^\varepsilon((\omega^\varepsilon_j)\|^2\right)$$

$$\to \ (\boldsymbol{\lambda}^0_m + 1)\left(\rho \|\mathbf{u}^0_{(m)}; L^2(\Omega)\|^2 + \rho_0 \sum_{j=1}^{J} \|\mathbf{w}^{j0}_{(m)}; L^2(\varpi_j)\|^2\right).$$

Предложение доказано. □

3.3. «Почти собственные» числа и векторы. Сформулируем задачу (1.9) как абстрактное уравнение (1.14). Следующее утверждение, известное как лемма о «почти собственных» числах и векторах, вытекает из спектрального разложения резольвенты (см. первоисточник [21] и, например, книгу [8, гл. 6]).

Лемма 3.1. *Пусть $U \in \mathcal{H}$ и $\Lambda \in \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$\|U; \mathcal{H}\| = 1, \quad \|\mathcal{K}U - \Lambda U; \mathcal{H}\| =: \delta \in (0, \Lambda). \tag{3.11}$$

Тогда у оператора $\mathcal{K}$ есть собственное число κ_n на сегменте $[\Lambda - \delta, \Lambda + \delta]$. Более того, для любого $\delta_* \in (\delta, \Lambda)$ найдутся коэффициенты $C_{\mathcal{N}}, \dots, C_{\mathcal{N}+\mathcal{X}-1}$, при которых верны формулы

$$\|U - \sum_{k=\mathcal{N}}^{\mathcal{N}+\mathcal{X}-1} C_k u_{(k)}; \mathcal{H}\| \leqslant 2\frac{\delta}{\delta_*}, \quad \sum_{k=\mathcal{N}}^{\mathcal{N}+\mathcal{X}-1} |C_k|^2 = 1, \tag{3.12}$$

где $u_{(\mathcal{N})}, \dots, u_{(\mathcal{N}+\mathcal{X}-1)}$ — набор всех собственных векторов оператора $\mathcal{K}$, отвечающих его собственным числам из сегмента $[\Lambda - \delta_*, \Lambda + \delta_*]$ и подчиненных условиям ортогональности и нормировки (1.17).

Пусть $\boldsymbol{\mu}^0_q > 0$ — собственное число из объединенной последовательности (2.39) с кратностью $\varkappa_q$, т.е.

$$\boldsymbol{\mu}^0_{q-1} < \boldsymbol{\mu}^0_q = \dots = \boldsymbol{\mu}^0_{q+\varkappa_q-1} < \boldsymbol{\mu}^0_{q+\varkappa_q}, \tag{3.13}$$

причем $\boldsymbol{\mu}^0_q = \dots = \boldsymbol{\mu}^0_{q+\varkappa^0_q-1}$ — собственное число задачи (2.3), (2.4), а $\varkappa^0_q \geqslant 0$ его кратность (не исключается случай $\boldsymbol{\mu}^0_q \notin \wp^0$ и $\varkappa^0_q = 0$). Кроме того, $\boldsymbol{\mu}^0_l = \mu^{j(\ell)}_{m(\ell)}$ — собственное число задачи (2.6), (2.7), (2.40) с номером $j(\ell) \in \{1, \dots, J\}$. Соответствующие собственные вектор-функции $\mathbf{u}_{(m)}$ и $\mathbf{w}^{j(\ell)}_{m(\ell)}$ подчинены условиям ортогональности и нормировки (2.19) и (2.42) соответственно. Кроме того, $m(\ell) \neq m(k)$ при $j(\ell) = j(k)$, но $\ell \neq k$.

Связь (1.15) спектральных параметров подсказывает, что в качестве почти собственных чисел оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$ следует взять $\varkappa_q$ экземпляров величины

$$\Lambda^\varepsilon_\ell = (1 + \boldsymbol{\mu}^0_q)^{-1}, \quad \ell = q, \dots, q + \varkappa_q - 1. \tag{3.14}$$

В согласии с анзацем (2.37) почти собственные векторы

$$U^\varepsilon_{(\ell)}(x) = \|W^\varepsilon_{(\ell)}; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} W^\varepsilon_{(\ell)}(x) \tag{3.15}$$

удовлетворяющие первому соотношению (3.11), включают вектор-функции

$$W^\varepsilon_{(\ell)}(x) = \mathbf{u}_{(\ell)}(x), \quad \ell = q, \dots, q + \varkappa^0_q - 1, \tag{3.16}$$

$$W^\varepsilon_{(\ell)}(x) = \chi_{j(\ell)}(x)\varepsilon^{-1/2}\mathbf{w}^{j(\ell)}_{(m(\ell))}(\xi^{j(\ell)}), \quad \ell = q + \varkappa^0_q, \dots, q + \varkappa_q - 1. \tag{3.17}$$

Лемма 3.2. *В указанных условиях для вектор-функций* (3.16) *и* (3.17) *верны формулы*
$$\left|\langle W^\varepsilon_{(\ell)}, W^\varepsilon_{(k)}\rangle_\varepsilon - \delta_{\ell,k}(1+\boldsymbol{\mu}_q)\right| \leqslant c_q\varepsilon \text{ при } \varepsilon\in(0,\varepsilon_q], \quad \ell,k = q,\dots,q+\varkappa_q-1, \tag{3.18}$$
где $\varepsilon_q > 0$ *и* c_q *— некоторые числа.*

Доказательство. При $\ell,k=q,\dots,q+\varkappa_q^0-1$ неравенство (3.18) вытекает из соотношений (3.8), (2.22) и оценки
$$\rho_\varepsilon\left|(\mathbf{u}_{(\ell)},\mathbf{u}_{(k)})_{\omega^\varepsilon}\right| \leqslant \mathbf{c}_{(\ell k)}\varepsilon^{-1}\rho_0|\omega_\varepsilon| \leqslant c_q\varepsilon,$$
очевидной для гладких вектор-функций $\mathbf{u}_{(l)}$ и $\mathbf{u}_{(k)}$.

Пусть теперь $\ell,k=q+\varkappa_q^0,\dots,q+\varkappa_q-1$. Если $j(\ell)\neq j(k)$, то носители вектор-функций $W^\varepsilon_{(\ell)}$ и $W^\varepsilon_{(k)}$ не пересекаются и формула (3.18) верна даже при $c_q=0$. В случае $j(\ell)=j(k)$ аналогичное выкладке (3.5) преобразование при учете соотношений (3.6) показывают, что
$$\begin{aligned}\langle W^\varepsilon_{(\ell)}, W^\varepsilon_{(k)}\rangle_\varepsilon &= E(\mathbf{w}^{j(\ell)}_{(m(\ell))},\mathbf{w}^{j(k)}_{(m(k))};\mathbb{R}^3_-) + \rho_0(\mathbf{w}^{j(\ell)}_{(m(\ell))},\mathbf{w}^{j(k)}_{(m(k))})_{\varpi_j} + O(\varepsilon)\\ &= (\boldsymbol{\mu}_q^0+1)\rho_0\big(\mathbf{w}^{j(\ell)}_{(m(\ell))},\mathbf{w}^{j(k)}_{(m(k))}\big)_{\varpi_j} + O(\varepsilon) = (1+\boldsymbol{\mu}_q^0)\delta_{\ell,k}+O(\varepsilon).\end{aligned}$$
Здесь приняты во внимание формулы (2.42) и (3.9). Наконец, для $l=q,\dots,q+\varkappa_q^0-1$ и $k=q+\varkappa_q^0,\dots,q+\varkappa_q-1$ оценка (3.18) получается просто:
$$\begin{aligned}\left|\langle W^\varepsilon_{(\ell)}, W^\varepsilon_{(k)}\rangle_\varepsilon\right| &= (1+\boldsymbol{\mu}_q^0)\rho\left(W^\varepsilon_{(\ell)}, W^\varepsilon_{(k)}\right)_\Omega + \varepsilon^{-1}\rho_0\left(W^\varepsilon_{(\ell)}, W^\varepsilon_{(k)}\right)_{\omega^\varepsilon_{j(k)}}\\ &\leqslant c\Bigg(\int\limits_{\Omega\cap\mathcal{V}^j}(1+\varepsilon^{-1}r_j)^{-1}\,dx + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\omega^\varepsilon_j(k)} ds_x\Bigg) \leqslant c\varepsilon.\end{aligned}$$
Лемма доказана. □

3.4. Обработка невязок. Оценим величину δ^ε_ℓ, найденную согласно второй формуле (3.11) по почти собственным числу (3.14) и вектору (3.15). Имеем
$$\begin{aligned}\delta^\varepsilon_\ell =& \sup\left|\langle\mathcal{K}^\varepsilon U^\varepsilon_{(\ell)} - \Lambda^\varepsilon_\ell U^\varepsilon_{(\ell)}, V\rangle_\varepsilon\right|\\ =&(1+\boldsymbol{\mu}_q)^{-1}\|W^\varepsilon_{(\ell)};\mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1}\sup\big|E(W^\varepsilon_{(l)},V;\Omega)\\ &-\boldsymbol{\mu}_q\big(\rho(W^\varepsilon_{(\ell)}),V\big)_\Omega + \varepsilon^{-1}\rho_0\big(n^\top W^\varepsilon_{(\ell)}, n^\top V\big)_{\omega^\varepsilon}\big|,\end{aligned} \tag{3.19}$$
где супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon$, т.е. $\|V;\mathcal{H}^\varepsilon\|\leqslant 1$ и в силу формул (1.11), (1.8), $\alpha=-1$, и (1.26), (1.32) ингредиенты V^0 и $V_\perp$ представления (1.23) пробной вектор-функции V допускают оценки
$$\|V^0;\mathbb{R}^6\|\leqslant c\varepsilon^{-1/2} \quad \text{и} \quad \|V_\perp; H^1(\Omega)\|\leqslant c.$$

При $\ell=q,\dots,q+\varkappa_q^0-1$ рассмотрим выражение $I^\varepsilon_\ell(V)$ между последними знаками модуля в цепочке (3.19). Поскольку $\{\boldsymbol{\mu}_q,\mathbf{u}_{(\ell)}\}$ — собственная пара задачи (3.8), при помощи весового неравенства (1.27) выводим оценку
$$\begin{aligned}\left|I^\varepsilon_\ell(V)\right| &= \varepsilon^{-1}\rho_0|(n^\top\mathbf{u}_{(\ell)}, n^\top(dV^0+V_\perp))_{\omega^\varepsilon}|\\ &\leqslant c_\ell\varepsilon^{-1}|\omega^\varepsilon|^{1/2}\left(|\omega^\varepsilon|\,\|V^0;\mathbb{R}^6\|^2 + \|V_\perp;L^2(\omega^\varepsilon)\|^2\right)^{1/2}\leqslant C_\ell\sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Пусть теперь $\ell=q+\varkappa_q^0,\dots,q+\varkappa_q-1$. Совершим обычные действия: переход к растянутым криволинейным координатам при учете соотношений (3.6), использование интегрального тождества (3.9) для пары $\{\boldsymbol{\mu}_q,\mathbf{w}^{j(\ell)}_{(m(\ell))}\}$, устранение срезающей функции $\chi_{j(\ell)}$ по причине затухания собственной вектор-функции и, наконец, следующая выкладка:
$$\begin{aligned}\varepsilon^{1/2}\rho\left|(\chi_{j(\ell)}\mathbf{w}^{j(\ell)}_{(m(\ell))},V)_\Omega\right| &\leqslant c\varepsilon^{1/2}\big\|(\varepsilon+r_{j(\ell)})^{-1}\mathbf{w}^{j(\ell)}_{(m(\ell))};L^2(\Omega\cap\mathcal{V}^{j(\ell)})\big\|\,\|(\varepsilon+r_{j(\ell)})V;L^2(\Omega)\|\\ &\leqslant c_\ell\varepsilon^{1/2}\varepsilon^{-1/2}\varepsilon^{3/2}\big\|(1+\rho_{j(\ell)})^{-1}\mathbf{w}^{j(\ell)}_{(m(\ell))};L^2(\mathbb{R}^3_-)\big\|\,\big(\|V^0;\mathbb{R}^6\|+\|V_\perp;L^2(\Omega)\|\big)\leqslant C_\ell\sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}$$

В итоге получаем оценку

$$|I^\varepsilon_\ell(V)| \leqslant C_\ell\sqrt{\varepsilon}.$$

Кроме того, лемма 3.1 означает, в частности, что $\|W^\varepsilon_{(\ell)};\mathcal{H}^\varepsilon\| \geqslant (1+\boldsymbol{\mu}_q)/2$ при малом ε, и следовательно,

$$\delta^\varepsilon_\ell \leqslant c_q\sqrt{\varepsilon}, \quad \ell = q,\dots,q+\varkappa_q-1.$$

Итак, согласно лемме 3.1 находим собственные числа $\kappa^\varepsilon_{n(q)},\dots,\kappa^\varepsilon_{n(q+\varkappa_q-1)}$ оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$, для которых выполнены неравенства

$$|\kappa^\varepsilon_{n(\ell)} - (1+\boldsymbol{\mu}_q)^{-1}| \leqslant c_q\sqrt{\varepsilon}, \quad \ell = q,\dots,q+\varkappa_q-1. \tag{3.20}$$

3.5. Теорема об асимптотике собственных чисел. Завершим проведенные вычисления следующим утверждением.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha = -1$. *Положительные члены последовательности* (1.16) *собственных чисел задачи* (1.2)–(1.4) *и последовательности* (2.39), *объединяющей спектры задачи* (2.3), (2.4) *в области* Ω *и задач* (2.6), (2.7), (2.40) *в полупространстве* $\mathbb{R}^3_-$, $j = 1,\dots,J$, *находятся в отношении*

$$|\lambda^\varepsilon_m - \boldsymbol{\mu}^0_m| \leqslant \mathbf{c}_m\sqrt{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon \in (0,\boldsymbol{\varepsilon}_m], \tag{3.21}$$

где $m \in \mathbb{N}$, *а* $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ *и* $\mathbf{c}_m$ — *некоторые положительные числа.*

Доказательство. Ближайшая цель — убедиться в том, что номера $n(q),\dots,n(q-\varkappa_q-1)$ из формулы (3.20) можно считать различными. Для этого употребим вторую часть леммы 3.1, в которой возьмем $\delta = c_q\sqrt{\varepsilon}$ и $\delta_* = \delta/\tau$, где $\tau \in (0,1)$. Обозначим через $C^\varepsilon_{(\ell)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon_q}$ и $S^\varepsilon_{(\ell)}$ столбцы и суммы по $k = \mathcal{N}^\varepsilon_q,\dots,\mathcal{N}^\varepsilon_q+\mathcal{X}^\varepsilon_q-1$, предоставленные формулами (3.12) для почти собственного вектора (3.15), $\ell = q,\dots,q+\varkappa_q-1$. Благодаря этим формулам и условиям ортогональности и нормировки (1.17) находим, что

$$\begin{aligned} |(C^\varepsilon_{(k)})^\top C^\varepsilon_{(\ell)} - \delta_{\ell,k}| &= \left|\langle S^\varepsilon_{(\ell)}, S^\varepsilon_{(k)}\rangle_\varepsilon - \delta_{\ell,k}\right| \\ &\leqslant \left|\langle S^\varepsilon_{(\ell)} - U^\varepsilon_{(\ell)}, S^\varepsilon_{(k)}\rangle_\varepsilon\right| + \left|\langle U^\varepsilon_{(\ell)}, S^\varepsilon_{(k)} - U^\varepsilon_{(k)}\rangle_\varepsilon\right| + \left|\langle U^\varepsilon_{(\ell)}, U^\varepsilon_{(k)}\rangle_\varepsilon - \delta_{\ell,k}\right|. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Каждое из первых двух слагаемых в правой части не превосходит 2τ, а последнее — $c_q\sqrt{\varepsilon}$ (см. формулы (3.12) и (3.18), причем последнюю применяем дважды: сначала при $\ell = k$ для выяснения асимптотики нормы $\|W^\varepsilon_{(\ell)};\mathcal{H}^\varepsilon\|$, а затем при задействованных в (3.22) индексах). Таким образом, при малых τ и ε столбцы $C^\varepsilon_{(q)},\dots,C^\varepsilon_{(q+\varkappa_q-1)}$ «почти ортонормированы» в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon_q}$, что возможно лишь в случае

$$\varkappa_q \leqslant \mathcal{X}^\varepsilon_q.$$

Итак, зафиксировав подходящую величину τ и ограничив малый параметр $\varepsilon \leqslant \varepsilon_q$ обнаруживаем на сегменте

$$\left[(1+\boldsymbol{\mu}^0_q)^{-1} - c_q\tau^{-1}\sqrt{\varepsilon}, (1+\boldsymbol{\mu}^0_q)^{-1} + c_q\tau^{-1}\sqrt{\varepsilon}\,\right]$$

собственные числа $\kappa^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon_q},\dots,\kappa^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon_q+\varkappa_q-1}$, которые благодаря связи (1.16) спектральных параметров превращаются в члены

$$\lambda^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon_q},\dots,\lambda^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon_q+\varkappa_q-1}$$

последовательности (1.16). При этом

$$\begin{aligned} &\left|\kappa^\varepsilon_\ell - (1+\boldsymbol{\mu}^0_q)^{-1}\right| \leqslant c_q\tau^{-1}\sqrt{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon \in (0,\varepsilon_q] \\ &\quad\Rightarrow \begin{cases} c1+\lambda^\varepsilon_\ell \leqslant 1+\boldsymbol{\mu}^0_q + c_q\tau^{-1}\sqrt{\varepsilon}(1+\varkappa^0_q)(1+\lambda^\varepsilon_\ell) \\ |\lambda^\varepsilon - \boldsymbol{\mu}^0_q| \leqslant c_q\tau^{-1}\sqrt{\varepsilon}(1+\boldsymbol{\mu}^0_q)(1+\lambda^\varepsilon_\ell) \end{cases} \quad \text{при } \varepsilon \in (0,\varepsilon_q] \\ &\quad\Rightarrow \begin{cases} c1+\lambda^\varepsilon_\ell \leqslant 2(1+\sqrt{\mu^0_q}) \text{ при } c_q\tau^{-1}\sqrt{\varepsilon}(1+\boldsymbol{\mu}_q) \leqslant 1/2 \\ |\lambda^\varepsilon_\ell - \boldsymbol{\mu}^0_q| \leqslant C_q\sqrt{\varepsilon} := 2c_q\tau^{-1}\sqrt{\varepsilon}(1+\boldsymbol{\mu}_q)^2 \end{cases} \quad \text{при } \varepsilon \in (0,\boldsymbol{\varepsilon}_q], \end{aligned} \tag{3.23}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_q = \min\{\varepsilon_q, \tau^2(2c_q(1+\boldsymbol{\mu}_q^0))^{-2}\}$. □

Замечание 3.1. *Для каждого $\varkappa_q$-кратного собственного числа $\boldsymbol{\mu}_q^0$ (см. формулу* (3.13)*) в его окрестности найдены не менее $\varkappa_q$ собственных чисел задачи* (1.2)–(1.4)*, удовлетворяющих последнему соотношению в* (3.23)*. Отсюда, в частности вытекает неравенство* (3.1)*, а значит, предложение 3.1 доказано в полном объеме.*

Осталось убедиться в том, что $\mathcal{N}_q^\varepsilon = q$. Согласно сказанному в замечании 3.1 имеем $\mathcal{N}_q^\varepsilon \geqslant q$. Если случилось, что $\mathcal{N}_q^\varepsilon > q$, то найдется собственное число задачи (1.9), для которого

$$\lambda^\varepsilon_{\mathcal{M}_q^\varepsilon} \leqslant \boldsymbol{\mu}_q^0 + c_q\sqrt{\varepsilon} < (\boldsymbol{\mu}_q^0 + \boldsymbol{\mu}^0_{q+\varkappa_q})/2 < \varkappa^0_{q+\varkappa_q}, \quad \mathcal{M}_q^\varepsilon \geqslant q + \varkappa_q.$$

При этом собственная вектор-функция подчинена условиям ортогональности

$$\rho(u^\varepsilon_{(\mathcal{M}_q^\varepsilon)}, u^\varepsilon_{(m)})_\Omega + \varepsilon^{-1}\rho_0(n^\top u^\varepsilon_{(\mathcal{M}_q^\varepsilon)}, n^\top u^\varepsilon_{(m)})_{\omega^\varepsilon} = 0, \quad m = 1, \ldots, q+\varkappa_q - 1.$$

Предельные переходы (3.2) и (3.3), (3.7) предоставляют член

$$\boldsymbol{\mu}^0_{\mathcal{M}_q^0} \in [0, \boldsymbol{\mu}^0_{q+\varkappa_q}) \tag{3.24}$$

последовательности (2.39) и нетривиальную линейную комбинацию собственных вектор-функций предельных задач (2.3), (2.4) и (2.6), (2.7), (2.40), $j = 1, \ldots, J$, при сохранении условий ортогональности (2.19) и (2.42). Этот вывод противоречит способу составления монотонной последовательности (2.39): собственное число (3.24) «лишнее».

Доказательство теоремы 3.1 закончено.

3.6. Заключение. Несколько важных моментов схемы обоснования асимптотики сознательно оставлены в стороне. Мажоранта в оценке (3.21) отражают наихудшую из возможных погрешностей в асимптотических формулах для собственных чисел λ_m^ε при $m > 6$, обнаруженную в ситуации 3° из п. 3.3. Построение поправочных членов в анзацах (2.38) и (2.39) и повторение проведенных в этом параграфе выкладок позволяют уточнить теорему 3.1, как непосредственно — в ситуациях 1° и 2° мажоранта становится равной $\mathbf{c}'_q\varepsilon$, так и после детализации асимптотики, а именно,

$$|\lambda_m^\varepsilon - \boldsymbol{\mu}_m^0 - \varepsilon\boldsymbol{\mu}''_m| \leqslant \mathbf{c}''_q\varepsilon^{3/2}, \quad m = q, \ldots, q+K-1, \tag{3.25}$$

в ситуациях 1° (при $K = 1$) и 2°, а также

$$|\lambda_m^\varepsilon - \boldsymbol{\mu}_m^0 - \sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{\mu}'_m| \leqslant \mathbf{c}'_q\varepsilon, \quad m = q, \ldots, q+K, \tag{3.26}$$

в ситуации 3^0. Здесь принять обозначения из п. 3.3 и теоремы 3.1.

Как обычно, обоснование асимптотических представлений для собственных вектор-функций проводится при помощи лемм 3.1 и 3.2, точнее неравенств из списков (3.12) и (3.18). Поскольку поправочные члены в анзаце (2.37) находятся только с точностью до линенйных комбинаций собственных вектор-функций предельных задач, оценки остатков в формулах для $u^\varepsilon_{(m)}$ хуже, чем в формулах (3.21) или (3.25), (3.26) для собственных чисел λ_m^ε. Более того, в случае кратного собственного числа λ_m^0 спектр матриц M из алгебраических систем (2.51) или (2.53) также может быть кратным, а значит, их собственные векторы, удовлетворяющие соотношениям (2.20), не определяются однозначно, а вместе с ними и главные члены анзаца (2.39). В итоге утверждения об асимптотике собственных вектор-функций становятся излишне громоздкими, и поэтому ограничимся частным случаем простого собственного числа предельных задач.

Теорема 3.2. *В ситуации, описанной в п. 2.3 (1°), в частности, при $\alpha = -1$, для собственной вектор-функции задачи* (1.2)–(1.4)*, отвечающей ее собственному числу λ_m^ε из формулы* (3.25) *и нормированной согласно равенству* (1.17)*, верна оценка*

$$\|u^\varepsilon_{(m)} - \mathbf{u}_{(q)}; H^1(\Omega)\| \leqslant c_m\sqrt{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m],$$

где $\mathbf{u}_{(q)}$ *— собственная вектор-функция задачи* (2.3), (2.4) *для ее простого собственного числа* $\boldsymbol{\lambda}_q = \boldsymbol{\mu}_m^0$, *причем выполнено соотношение* (2.19), *а* $\varepsilon_m > 0$ *и* c_m *— некоторые числа.*

4. Варианты, обобщения и открытые вопросы.

4.1. Гладкость границы и бесконечные асимптотические ряды. Разумеется, все рассуждения и выкладки сохраняют силу в предложении о гладкости участков $\Gamma^j = \partial\Omega \cap \mathcal{V}^j$, а остальная часть границы области Ω может быть только липшицевой. Уплощенность этих участков упрощает асимптотический анализ тогда, когда требуются по крайней мере два члена пограничного слоя (ср. п. 2.3 (1^0),), однако итерационные процессы, разработанные в монографии [13], дают возможность распространить результат и на случай ненулевых кривизн. Более того, соответствующие процессы позволяют построить бесконечные асимптотические ряды в рамках метода составных асимптотических разложений. Впрочем, такие итерационные процессы, включающие сложную процедуру перераспределения невязок между предельными задачами, достаточно громоздки и редко применяются в конкретных задачах математической физики, имеющих прикладную направленность. С другой стороны, в некоторых вопросах достаточна информация о возможности разложения собственных чисел и векторов в обсуждаемые ряды.

В принципе точки $P^1, \dots, P^J$ могут быть коническими, однако для них приходится пересмотреть требование $\dim \mathcal{L} = 6$ к линейной оболочке столбцов. Например, для веретена

$$\Omega = \{x : x_3 \in (-1,1), H(x_3)^{-1}(x_1, x_2) \in \Theta\}, \tag{4.1}$$

где $H \in C^\infty[-1,1]$, $H(z) > 0$ при $z \in (-1,1)$, $H(\pm 1) = 0$, $\mp\partial_z H(\pm 1) > 0$ и Θ — эллипс с неравными осями, при постановке условий Винклера–Стеклова в двух концевых зонах $\omega_\pm^\varepsilon = \{x \in \partial\Omega : \pm x_3 \in (1-\varepsilon, 1)\}$ спектр задачи (1.2)–(1.4) становится дискретным и в случае $\rho = 0$. Вместе с тем асимптотические анзацы для собственных пар задачи (1.9) для тела (4.1) остаются неизвестными. Также открытым вопросом является построение асимптотики при условии, что сферическая поверхность в примерах 2^0 и 3^0 из п. 1.3 заменены многогранной поверхностью и многоугольником соответственно.

4.2. Невесомое тело. Зафиксируем размер ε областей (1.1) на поверхности $\partial\Omega$ и устремим к нулю плотность ρ тела Ω. Если симметричная положительная (6×6)-матрица

$$\int\limits_{\omega^\varepsilon} d(x)^T n(x) n(x)^\top d(x)\, dx \tag{4.2}$$

невырождена, то билинейную форму

$$\langle u^\rho, \psi^\rho \rangle_{\varepsilon,\rho} = E(u^\rho, \psi^\rho; \Omega) + \rho_\varepsilon (n^\top u^\rho, n^\top \psi^\rho)_{\omega^\varepsilon} \tag{4.3}$$

можно назначить скалярным произведением в пространстве Соболева $H^1(\Omega)^3$. При указанном ограничении на матрицу (4.2) задача (1.2)–(1.4) оказывается регулярным возмущением предельной ($\rho = 0$) задачи, в которой система уравнений равновесия

$$L(\nabla_x) u^{\varepsilon\rho}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.4}$$

снабженной краевыми условиями (1.3) и (1.4), а для собственных чисел $\lambda_m^{\varepsilon\rho}$ исходной задачи справедливы асимптотические представления

$$\lambda_m^{\varepsilon\rho} = \lambda_m^{\varepsilon 0} + \rho \lambda_m^{\varepsilon\prime} + O(\rho^2),$$

где $\{\lambda_m^{\varepsilon 0}\}_{m \in \mathbb{N}}$ — спектр предельной задачи, а поправки λ_m' легко вычисляются.

Для приведенных в п. 1.3 примеров 1^0–3^0 и многих других ситуаций матрица (4.2) и билинейная форма (4.3) теряют нужные свойства, а спектр предельной задачи (4.4), (1.3), (1.4) занимает всю комплексную плоскость: при любом $\lambda^{\varepsilon 0} \in \mathbb{C}$ элементы нетривиального подпространства $\mathcal{R}^\#$ в линеале (1.18) жестких смещений удовлетворяют предельной задаче полностью, так как $n(x)^\top r^\#(x) = 0$ при $x \in \omega^\varepsilon$ для $r^\# = da^\# \in \mathcal{R}^\#$. Вместе с тем задача

$$E(u^{\varepsilon\#}, \psi^\#; \Omega) = \lambda^{\varepsilon\#}\rho_\varepsilon(n^\top u^{\varepsilon\#}, n^\top\psi^\#)_{\omega^\varepsilon}, \quad \psi^\# \in H^1_\#(\Omega)^3,$$

суженная на подпространство $H^1_\#(\Omega)^3 = H^1(\Omega)^3 \ominus \mathcal{R}^\#$ приобретает дискретный спектр $\wp^\varepsilon_\#$, в котором нулевое собственное число имеет кратность $6 - \dim\mathcal{R}^\#$. Автор не знает механическую интерпретацию такого сужения.

Нетрудно построить асимптотику при $\rho \to +0$ неоднородной системы уравнений

$$L(\nabla_x)u^{\varepsilon\rho}(x) - \lambda^{\varepsilon 0}\rho u^{\varepsilon\rho}(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

снабженной краевыми условиями (1.3), (1.4) и содержащей параметр $\lambda^{\varepsilon 0} \in \mathbb{C}\backslash\wp^\varepsilon_\#$, а именно,

$$u^{\varepsilon\rho}(x) = \rho^{-1}d(x)a^\# + u^{\varepsilon\prime}(x) + \ldots,$$

где первое слагаемое в правой части принадлежит подпространству $\mathcal{R}^\#$, а столбец $a^\#$ находится из условия разрешимости задачи для $u^{\varepsilon\prime}$.

Матрица (4.2) невырожденная, например, при ограничении $\dim\mathcal{L} = 6$, наложенном на столбцы (1.21). При этом предельный переход $\varepsilon \to +0$ в задаче (1.2)–(1.4) возможен и при $\rho = 0$ — соответствующая предельная задача (2.34) (или (2.6), (2.7), (2.33) в дифференциальной форме) выводится при помощи представленного в п. 2.2 анализа. Отметим полученный в п. 1.3 результат: выражение

$$(E(u, u; \Omega) + \|u^0; \mathbb{R}^6\|^2)^{1/2}$$

с указанным первой формулой (1.24) столбцом u^0 является нормой в пространстве Соболева $H^1(\Omega)^3$.

При обсуждаемом ограничении $\dim\mathcal{L} = 6$ совместный предельный переход при $\varepsilon \to +0$ и $\rho \to +0$ может привести к отличной от (2.34) задаче. Пусть, например,

$$\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\rho_0 \quad \text{и} \quad \rho = \varepsilon\rho_\Omega, \quad \rho_\Omega > 0. \tag{4.5}$$

Анзац (2.26) для собственной вектор-функции сохраняется полностью и, поскольку $\alpha = -1$ в определении (1.8), анзац (2.25) для собственного числа становится таким:

$$\lambda^\varepsilon_{6+m} = \mu_m + \ldots .$$

Согласно предположению (4.5) правая часть f'_m задачи (2.29) для поправки $u'_{(m)}$ гладкого типа приобретает дополнительное слагаемое

$$\mu_m\rho_\Omega\, d(x)c^0_{(m)},$$

а значит, прежние вычисления из п. 2.2 показывают, что матрица M (см. формулу (2.32)) в предельных краевых условиях (2.33) приобретает вид

$$M = \rho_\Omega\rho_0^{-1}\int\limits_\Omega d(x)^\top d(x)\,dx + \sum_{j=1}^J |\varpi_j| d(P^j)^\top n(P^j)n(P^j)^\top d(P^j). \tag{4.6}$$

Матрица (4.6) остается положительно определенной и при снятии требования $\dim\mathcal{L} = 6$, т.е. для задачи (2.34) с новой матрицей M теорема 2.2 верна при любом количестве и расположении множеств $\omega^\varepsilon_1, \ldots, \omega^\varepsilon_J \subset \partial\Omega$, на которых поставлены условия

Винклера–Стеклова. Как и в п. 2.2, при $J > 1$ предельные задачи (2.6), (2.7), (2.33) объединены в единую спектральную задачу. Если $J = 1$, то краевое условие на ϖ_1 для единственной задачи в полупространстве $\mathbb{R}^3_-$ принимает вид

$$N^1(\nabla_{\xi^1})w^1_{(m)}(\xi^1_\natural, 0) = \mu_m \rho_0 n(P^1)\bigg(n(P^1)^\top w^1_{(m)}(\xi^1_\natural, 0) -$$

$$- d_{(1)}\Big(\frac{\rho_\Omega}{\rho_0}\int\limits_\Omega d(x)^\top d(x)\,dx + |\varpi^1| d_{(1)}^\top d_{(1)}\Big)^{-1} |\varpi^1| d_{(1)}^\top n(P^j)^\top \overline{w}^1_{(m)}\bigg), \quad \xi^1_\natural \in \varpi^1,$$

где $d_{(1)} = n(P^1)^\top d(P^1)$ — строка длиной шесть.

4.3. О моделировании сингулярно возмущенных задач. В механике и других прикладных дисциплинах многие модели, полученные посредством частичного асимптотического анализа, сохраняют малый параметр. Ярчайший пример — теория оболочек (см. монографию [22] и др.), уравнения которой в отличие от уравнений теории пластин (см., например, книги [23], [3]) включают кривизны срединной поверхности и относительную толщину оболочки — естественный малый параметр. В случае малых сингулярных возмущений границы действенной оказывается техника самосопряженных расширений дифференциальных операторов (см. [24]–[30], [15], [16] и др.). Для рассмотренной задачи с условиями Винклера–Стеклова на малых участках границы аппарат самосопряженных расширений приобретает своеобразную черту — параметры расширения помимо размера включает искомое собственное число. Продемонстрируем эту специфику для показателя $\alpha = 0$ в формуле (1.8) и воспользуемся результатами асимптотического анализа из п. 2.1.

Извлечем из анзаца (2.2) сумму

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon^2\bigg(u'(x) + \sum_{j=1}^J \chi_j(x)\Phi^j(x^j)b^j\bigg) \tag{4.7}$$

с коэффициентами (2.13), оставив в стороне быстро затухающие члены пограничного слоя $\widetilde{w}^j(\xi^j)$ (индекс m не пишем). Заметим, что вектор-функция (4.7) оставляет в системе дифференциальных уравнений

$$L(\nabla_x)\mathfrak{u}^\varepsilon(x) = \mathfrak{l}^\varepsilon \rho \mathfrak{u}^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.8}$$

с взятым из формулы (2.1) параметром

$$\mathfrak{l}^\varepsilon = \lambda^0 + \varepsilon^2\lambda',$$

невязку, $L^2(\Omega)$-норма которой равна $O(\varepsilon^4)$. Для вектор-функции $\mathfrak{u}^\varepsilon$ краевые условия

$$N(x, \nabla_x)\mathfrak{u}^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}, \tag{4.9}$$

выполнены всюду, кроме точек $P^1, \dots, P^J$, где она приобретает сингулярности $O(r^{-1})$. Заметная малость невязки позволяет принять задачу (4.8), (4.9) как модель исходной сингулярно возмущенной задачи, причем, как обычно (см. первоисточник [24] и обзор [26]), условия Винклера–Стеклова на малых окрестностях точек $P^1, \dots, P^J$ имитируется дельта-функциями Дирака с подходящими коэффициентами, т.е. в рамках теории обобщенных функций имеем

$$N(x, \nabla_x)\mathfrak{u}^\varepsilon(x) = \mathfrak{l}^\varepsilon \rho_0 \varepsilon^2 \sum_{j=1}^J |\varpi_j| \delta(s^j) n(P^j) n(P^j)^\top \widehat{\mathfrak{u}}^\varepsilon(P^j), \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.10}$$

Здесь коэффициент при функции Дирака $\delta(s^j)$ с сингулярностью в точке $P^j \in \partial\Omega$ найден по формуле (2.13) с допустимыми заменами $\lambda^0 \mapsto \mathfrak{l}^\varepsilon$ и $u^0(P^j) \mapsto \widehat{\mathfrak{u}}^\varepsilon(P^j)$, а именно,

$$\mathfrak{b}^{j\varepsilon} = \mathfrak{l}^\varepsilon \rho_0 \varepsilon^2 |\varpi_j| n(P^j) n(P^j)^\top \widehat{\mathfrak{u}}^\varepsilon(P^j), \tag{4.11}$$

где $\widehat{\mathfrak{u}}^\varepsilon \in H^2(\Omega)$ — регулярная часть вектор-функции

$$\mathfrak{u}^\varepsilon(x) = \widehat{\mathfrak{u}}^\varepsilon(x) + \sum_{j=1}^{J} \chi_j(x)\Phi^j(x^j)\mathfrak{b}^{j\varepsilon}. \tag{4.12}$$

В правой части равенства (4.10) присутствуют неизвестные $\mathfrak{l}^\varepsilon$ и $\mathfrak{u}^\varepsilon$, т.е. его следует интерпретировать как спектральное краевое условие, однако для его строгой формулировки приходится обратиться к оператору $\mathfrak{A}$, введенному в п. 1.2.

Очередное утверждение — простое следствие теории Кондратьева [31] (ср. рассуждения из работы [27]).

Предложение 4.1. *Сопряженный оператор $\mathfrak{S}^*$ для оператора $\mathfrak{S}$ с областью определения* (1.22) *сохраняет дифференциальное выражение $L(\nabla_x)$, но приобретает такую область определения:*

$$\begin{gathered}\mathfrak{D}(\mathfrak{S}^*) = \Big\{ \mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 + \sum_{j=1}^{J} G^j(x)\mathfrak{B}^j \,\Big|\, \mathfrak{U}^0 \in H^2(\Omega)^3, \\ N(x,\nabla_x)\mathfrak{U}^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \mathfrak{B}^j \in \mathbb{R}^3, \quad j = 1,\ldots,J \Big\}.\end{gathered} \tag{4.13}$$

Здесь G^j — матрица Грина (2.48) *с особенностью в точке P^j.*

Поскольку

$$\big\{\mathfrak{U} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{S}^*) : \mathfrak{B}^1 = \ldots \mathfrak{B}^J = 0\big\} = H^2_N(\Omega)^3 := \{u \in H^2(\Omega)^3 : N(x,\nabla_x)u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$$

и фредгольмово отображение

$$H^2_N(\Omega)^3 \ni u \ \mapsto\ L(\nabla_x)u \in L^2(\Omega)^3$$

обладает шестимерными ядром и коядром (ср. условия (2.30) разрешимости задачи (2.29) и полиномиальное свойство (1.18)), индекс дефекта рассматриваемого оператора $\mathfrak{S}$ равен $3J : 3J$, а значит, он допускает самосопряженное расширение. Как и в публикациях [15], [16], [29], [30] и др., для моделирования требуется одно из всего семейства возможных расширений. С целью сделать правильный выбор сравним разложение

$$\mathfrak{U}(x) = \widetilde{\mathfrak{U}}(x) + \sum_{j=1}^{J} \chi_j(x)\Big(\Phi^j(x^j)\mathfrak{B}^j + \sum_{k=1}^{J} \widetilde{G}^k(P^j)\mathfrak{B}^k + \mathfrak{U}^0(P^j)\Big)$$

элемента пространства (4.13) и выбранное разложение

$$\mathfrak{u}^\varepsilon(x) = \widetilde{\mathfrak{u}}^\varepsilon(x) + \sum_{j=1}^{J} \chi_j(x)\left(\Phi^j(x^j)\mathfrak{b}^{j\varepsilon} + \widehat{\mathfrak{u}}^\varepsilon(P^j)\right).$$

При этом остатки $\widetilde{\mathfrak{U}}$ и $\widetilde{\mathfrak{u}}^\varepsilon$ принадлежат подпространству

$$H^2_\bullet(\Omega)^3 := \left\{\widetilde{u} \in H^2(\Omega)^3 : \widetilde{u}(P^1) = \cdots = \widetilde{u}(P^J) = 0\right\}.$$

В результате получаем равенства

$$\mathfrak{B}^j = \mathfrak{b}^{j\varepsilon}, \quad \mathfrak{U}^0(P^j) + \sum_{k=1}^{J} \widetilde{G}^k(P^j)\mathfrak{B}^k = \widehat{\mathfrak{u}}^\varepsilon(P^j), \quad j = 1,\ldots,J,$$

из которых при учете формул (4.11) и (2.49) выводим соотношения

$$\begin{aligned} &n(P^j)\mathfrak{B}^j = \mathfrak{l}^\varepsilon \rho_0 \varepsilon^2 |\omega_j| \Big(n(P^j)^\top \mathfrak{U}^0(P^j) + \sum_{k=1}^{J} \mathbf{G}_{jk} n(P^k) \mathfrak{B}^k \Big), \\ &\big(\mathbb{I}_3 - n(P^j)n(P^j)^\top\big)\, \mathfrak{B}^j = 0, \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Теорема 4.1. *При каждом* $\mathfrak{l}^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *и малом* $\varepsilon > 0$ *сужение* $\mathfrak{S}(\mathfrak{l}^\varepsilon)$ *оператора* $\mathfrak{S}^*$ *на подпространство*

$$\mathcal{D}(\mathfrak{S}(\mathfrak{l}^\varepsilon)) = \{ \mathfrak{U}^\varepsilon \in \mathfrak{D}(\mathfrak{S}^*) : \ \ \textit{выполнены связи } (4.14) \ \}$$

является самосопряженным оператором.

Доказательство. Для элементов $\mathfrak{U}_{(i)}$, $i = 1, 2$, пространства (4.13) с ингредиентами $\mathfrak{B}_{(i)}$ и $\mathfrak{U}^0_{(i)}$ выполнена обобщенная формула Грина

$$\big(L(\nabla_x)\mathfrak{U}_{(1)}, \mathfrak{U}_{(2)}\big)_\Omega - \big(\mathfrak{U}_{(1)}, L(\nabla_x)\mathfrak{U}_{(2)}\big)_\Omega = \sum_{j=1}^{J} \Big((\mathfrak{B}^j_{(2)})^\top \mathfrak{U}^0_{(1)}(P^j) - (\mathfrak{B}^j_{(1)})^\top \mathfrak{U}^0_{(2)}(P^j) \Big), \tag{4.15}$$

которая выводится при помощи выкладки (2.21). Нетрудно усмотреть, что благодаря связям (4.14) правая часть равенства (4.15) обращается в нуль для вектор-функций $\mathfrak{U}_{(1)}, \mathfrak{U}_{(2)} \in \mathcal{D}(\mathfrak{S}(\mathfrak{l}^\varepsilon))$. Остается отметить, что при малом ε соотношения (4.14) накладывают в точности $3J$ связей на коэффициенты $\mathfrak{B}^j, \mathfrak{U}^0(P^j) \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, \dots, J$, а значит $\mathfrak{S}(\mathfrak{l}^\varepsilon)$ — самосопряженное расширение оператора $\mathfrak{S}$, так как его индекс дефекта равен $3J \times 3J$. $\square$

К сожалению, область определения самосопряженного расширения $\mathfrak{S}(\mathfrak{l}^\varepsilon)$ зависит от спектрального параметра, т.е. спектральная задача

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{l}^\varepsilon)\mathfrak{U}^\varepsilon = \mathfrak{l}^\varepsilon \mathfrak{U}^\varepsilon \tag{4.16}$$

на самом деле оперирует операторным пучком, что затрудняет механическую интерпретацию уравнения (4.16) и создание численных схем его решения.

Предложим иную модель, использующую гильбертово пространство вектор-функций с отделенной асимптотикой

$$\mathfrak{D} = H^2_\bullet(\Omega)^3 \times \mathbb{R}^{3\times J} \times \mathbb{R}^{3\times J}, \tag{4.17}$$

снабженное нормой

$$\|\mathfrak{u}^\varepsilon; \mathfrak{D}\| = \big(\|\widetilde{\mathfrak{u}}^\varepsilon; H^2(\Omega)\|^2 + \|\mathfrak{a}^\varepsilon; \mathbb{R}^{3\times J}\|^2 + \|\mathfrak{b}^\varepsilon; \mathbb{R}^{3\times J}\|^2 \big)^{1/2},$$

которая содержит остаток $\widetilde{u}^\varepsilon$ и столбцы $\mathfrak{a}^\varepsilon = (\mathfrak{a}^{\varepsilon 1}, \dots, \mathfrak{a}^{\varepsilon J})^\top$, $\mathfrak{b}^\varepsilon = (\mathfrak{b}^{\varepsilon 1}, \dots, \mathfrak{b}^{\varepsilon J})^\top$ следующего представления элемента пространства (4.17):

$$\mathfrak{U}^\varepsilon(x) = \widetilde{\mathfrak{U}}^\varepsilon(x) + \sum_{j=1}^{J} \chi_j(x)(\Phi^j(x^j)\mathfrak{b}^{\varepsilon j} + \mathfrak{a}^{\varepsilon j}).$$

Систему дифференциальных уравнений

$$L(\nabla_x)\mathfrak{u}^\varepsilon(x) = \mathfrak{l}^\varepsilon \mathfrak{u}^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.18}$$

снабдим краевыми условиями

$$N(x, \nabla_x)\mathfrak{u}^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}, \tag{4.19}$$

и асимптотическими условиями в точках $P^1, \dots, P^J$

$$\mathfrak{b}^{3j} = \mathfrak{l}^\varepsilon \rho_0 \varepsilon^2 |\varpi_j| n(P^j) n(P^j)^\top \mathfrak{a}^{\varepsilon j} \in \mathbb{R}^3, \tag{4.20}$$

происходящими от формул (4.11) и (4.12).

Оператор задачи (4.18)–(4.20) реализуется как отображение

$$\mathfrak{D} \ni \mathfrak{u}^\varepsilon \mapsto (L\mathfrak{u}^\varepsilon, N\mathfrak{u}^\varepsilon, \mathfrak{b}^\varepsilon) - \mathfrak{l}^\varepsilon(\mathfrak{u}^\varepsilon, 0, \varepsilon^2 T\mathfrak{a}^\varepsilon) \in \mathfrak{R} := L^2(\Omega)^3 \times \{0|_{\partial\Omega}\}^3 \times \mathbb{R}^{3\times J} \times \mathbb{R}^{3\times J}, \quad (4.21)$$

где

$$T = \rho_0 \operatorname{diag}\left\{|\varpi_1| n(P^1)n(P^1)^\top, \dots, |\varpi_J| n(P^J)n(P^J)^\top\right\}.$$

Теорема 4.2. *Спектр задачи* (4.18)–(4.20) *дискретный. Члены соответствующей последовательности собственных чисел*

$$0 = \mathfrak{l}_1^\varepsilon = \dots = \mathfrak{l}_6^\varepsilon < \mathfrak{l}_7^\varepsilon \leqslant \mathfrak{l}_8^\varepsilon \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{l}_m^\varepsilon \leqslant \dots \to +\infty$$

и члены последовательности (1.16) *собственных чисел задачи* (1.2)–(1.4) *находятся в отношении*

$$|\lambda_m^\varepsilon - \mathfrak{l}_m^\varepsilon| \leqslant \mathfrak{c}_m \varepsilon^3 \text{ при } \varepsilon \in (0, \mathfrak{e}_m], \quad (4.22)$$

где $m \geqslant 7$, а $\mathfrak{c}_m$ и $\mathfrak{e}_m > 0$ некоторые числа.

Доказательство. Ввиду компактности вложения $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{R}$ (не принимаем во внимание нулевую компоненту — третью слева в (4.21)) утверждение о дискретности очевидно. Соотношение (4.22) вытекает из теоремы 2.3 и оценки (2.24) при $\alpha = 0$. □

Механическая интерпретация асимптотических условий (4.20) проста: тело Ω прикреплено жесткими пружинами к абсолютно жестким профилям (см. монографию [4] и ср. статью [20]). Вопрос о создании вычислительных схем для решения задачи (1.2)–(1.4) остался полностью отрытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Bertram. *Elasticity and placticity of large deformations.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. 2005.
2. С.Г. Лехницкий. *Теория упругости анизотропного тела.* М.: Наука. 1977.
3. С.А. Назаров. *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки.* Новосибирск: Научная книга. 2002.
4. Ю.Н. Работнов. *Механика деформируемого твердого тела.* М.: Наука. 1988.
5. О.А. Ладыженская. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука. 1973.
6. Г. Фикера. *Теоремы существования в теории упругости.* М.: Мир. 1974.
7. В.А. Кондратьев, О.А. Олейник. *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна* // Успехи матем. наук. **43**:5 (1988), 55–98.
8. М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л.: изд-во Ленингр. ун–та. 1980.
9. С.А. Назаров. *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы* // Проблемы матем. анализа. **43** (1997), 167–192.
10. С.А. Назаров. *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов* // Успехи матем. наук. **54**:5 (1999), 77–142.
11. S.A. Nazarov. *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions* // RAIRO Model. Math. Anal. Numer. **27**:6 (1993), 777–799.
12. С.А. Назаров. *Дальнодействие малых спектральных возмущений граничных условий Неймана для эллиптической системы дифференциальных уравнений в трехмерной области* // Матем. сб. **214**:1 (2023), 3–54.
13. W.G. Mazja, S.A. Nasarow, B.A. Plamenewski. *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten.* 1 & 2. Berlin: Akademie-Verlag. 1991.
14. С.А. Назаров. *Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней* // Успехи матем. наук. **63**:1 (2008), 37–110.
15. С.А. Назаров. *Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений* // Труды Санкт-Петербург. матем. о-ва. **5** (1996), 112–183.

16. И.В. Камоцкий, С.А. Назаров. *Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов* // Труды Санкт-Петербург. матем. о-ва. **6** (1998), 151–212.
17. S.A. Nazarov, B.A. Plamenevsky. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries.* Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994.
18. М.Д. Ван Дайк. *Методы возмущений в механике жидкостей.* М.: Мир. 1967.
19. А.М. Ильин. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989.
20. С.А. Назаров. *Асимптотика собственных чисел задачи теории упругости со спектральными условиями Винклера–Стеклова* // Записки научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. **519** (2022), 152–187.
21. М.И. Вишик, Л.А. Люстерник. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи матем. наук. **12**:5 (1957), 3–122.
22. В.В. Новожилов. *Теория тонких оболочек.* М.: Гос. издание судостроительной лит-ры. 1951.
23. С.Г. Михлин. *Вариационные методы в математической физике.* М.: Наука. 1970.
24. Ф.А. Березин, Л.Д. Фаддеев. *Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом* // Докл. АН СССР. **137**:5 (1961), 1011–1014.
25. Е.Ю. Карпешина, Б.С. Павлов. *Взаимодействие нулевого радиуса для бигармонического и полиргармонтчекского уравнений* // Матем. заметки. **40**:1 (1986), 49–59.
26. Б.С. Павлов. *Теория расширений и явно решаемые модели* // Успехи матем. наук. **42**:6 (1987), 99–131.
27. С.А. Назаров. *Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах* // Матем. сб. **137**:2 (1988), 224–241.
28. С.А. Назаров. *Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями* // Матем. сб. **181**:3 (1990), 291–320.
29. С.А. Назаров. *Эллиптические задачи на гибридных областях* // Функц. анализ и его прил. **38**:4 (2004), 55–72.
30. С.А. Назаров. *Моделирование сингулярно возмущенной спектральной задачи при помощи самосопряженных расширений операторов предельных задач* // Функц. анализ и его прил. **49**:1 (2015), 31–48.
31. В.А. Кондратьев. *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками* // Труды Московск. матем. общества. **16** (1963), 219–292.

Сергей Александрович Назаров,
Институт проблем машиноведения РАН,
Большой проспект В.О, 61,
199178, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `srgnazarov@yahoo.co.uk`