

УДК 517.958

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА И НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА

А.С. ШАМАЕВ, В.В. ШУМИЛОВА

Аннотация. Рассмотрена начально-краевая задача, описывающая движение двухфазной среды с периодической структурой. Первая фаза такой среды состоит из изотропного упругого материала, а вторая фаза — из несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта. Данная задача состоит из дифференциальных уравнений в частных производных второго и четвертого порядков, условий непрерывности перемещений и напряжений на границах фаз, а также однородных начальных и граничных условий. С помощью метода преобразования Лапласа выведена соответствующая усредненная задача — начально-краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Показано, что коэффициенты и ядра свертки усредненных уравнений находятся с помощью решений вспомогательных периодических задач на единичном кубе. В случае слоистой среды решения периодических задач выписаны в явном виде, благодаря чему выведены аналитические выражения для усредненных коэффициентов и ядер свертки. В частности, установлено, что вид и свойства усредненных ядер свертки зависят от объемной доли жидких слоев внутри ячейки периодичности.

Ключевые слова: усреднение, уравнения движения, двухфазная среда, упругий материал, жидкость Кельвина-Фойгта.

Mathematics Subject Classification: 35B27

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение строго обоснованных усредненных моделей микронеоднородных сред относится к числу основных направлений теории усреднения уравнений с частными производными. С точки зрения практических приложений большой интерес вызывают усредненные модели двухфазных сред, имеющих ε -периодическую структуру и состоящих из твердого материала и жидкости. Динамика таких твердо-жидких сред описывается начально-краевыми задачами для дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, коэффициенты которых — ε -периодические функции пространственных переменных. Их непосредственное численное решение для сред, состоящих из многих тысяч или миллионов ячеек периодичности, сопряжено с существенными трудностями. С другой стороны, для некоторых моделей двухфазных сред удается вывести соответствующие им усредненные модели, построенные при $\varepsilon \rightarrow 0$. Как правило, усредненные модели периодических твердо-жидких сред представляют собой начально-краевые задачи для уравнений с постоянными коэффициентами. Следует напомнить, что согласно основной идее теории усреднения, решения исходных и соответствующих усредненных задач при малых ε должны быть близки друг к другу.

A.S. SHAMAEV, V.V. SHUMILOVA, HOMOGENIZATION OF MOTION EQUATIONS FOR A MEDIUM CONSISTING OF AN ELASTIC MATERIAL AND AN INCOMPRESSIBLE KELVIN-VOIGT FLUID.

© ШАМАЕВ А.С., ШУМИЛОВА В.В. 2024.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500443-0).

Поступила 14 февраля 2023 г.

В работах [1]–[9] были построены усредненные модели движения периодических двухфазных сред, у которых одна фаза состоит из упругого или вязкоупругого материала, а другая фаза — из вязкой ньютоновской жидкости. Согласно результатам этих работ, усредненные уравнения являются интегро-дифференциальными даже в том случае, когда исходные уравнения движения для каждой отдельной фазы — дифференциальные.

В данной работе рассматривается задача усреднения для начально-краевой задачи, описывающей движение двухфазной среды с ε -периодической структурой. В качестве фаз взяты изотропный упругий материал и несжимаемая вязкоупругая жидкость Кельвина-Фойгта. Описание и свойства такого рода неньютоновских жидкостей можно найти, например, в работах [10], [11]. С помощью метода преобразования Лапласа и результатов работ [6]–[8] выписывается усредненная задача — начально-краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Коэффициенты и ядра сверток усредненных уравнений находятся с помощью решений ряда вспомогательных периодических задач на единичном кубе. Показывается, что в случае слоистой среды решения периодических задач можно выписать в явном виде и тем самым получить явные аналитические выражения для усредненных коэффициентов и ядер сверток.

2. ИСХОДНАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, заполненную двухфазной средой с периодической микроструктурой. Периодом этой среды является куб $Y_\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0, 1)^3$ — единичный куб, а величина ε много меньше линейных размеров области Ω . Разобьем Y на два открытых, непересекающихся подмножества Y_1 и Y_2 с гладкой общей границей Γ : $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Gamma$. Введем множества

$$E_s = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^3} (Y_s \cup (\partial Y_s \cap \partial Y) + k), \quad s = 1, 2,$$

полученные Y -периодическим продолжением множеств Y_s на всё пространство \mathbb{R}^3 . Обозначим $\Omega_{s\varepsilon} = \Omega \cap \varepsilon E_s$ и далее считаем, что множество $\Omega_{1\varepsilon}$ занято изотропным упругим материалом, а множество $\Omega_{2\varepsilon}$ — несжимаемой вязкоупругой жидкостью Кельвина-Фойгта.

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в упругой фазе $\Omega_{1\varepsilon}$, имеют вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh} e_{kh}(u^\varepsilon), \quad (2.1)$$

где $u^\varepsilon(x, t)$ — вектор перемещений, σ^ε и $e(u^\varepsilon)$ — тензоры напряжений и малых деформаций соответственно, a — положительно определенный тензор модулей упругости,

$$e_{kh}(u^\varepsilon) = e_{kh}^x(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^\varepsilon}{\partial x_k} \right), \quad a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}).$$

Здесь λ и μ — параметры Ламе, $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, а δ_{ij} — символ Кронекера. Отметим, что в (2.1), как и всюду далее, предполагается суммирование по повторяющимся индексам, а индексы i, j, k, h , если не оговорено иное, принимают значения от 1 до 3.

Определяющие соотношения в жидкой фазе $\Omega_{2\varepsilon}$ имеют вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -\delta_{ij} p^\varepsilon + 2\eta e_{ij} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + 2\theta e_{ij} \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \right), \quad (2.2)$$

где $p^\varepsilon(x, t)$ — давление, η — коэффициент вязкости жидкости, а $\tau = \theta/\eta$ — время ретардации (запаздывания) [10].

Начально-краевая задача, описывающая движение двухфазной среды в области Ω , записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i(x, t) \quad \text{в } \Omega_{s\varepsilon} \times (0, T), \quad s = 1, 2, \\ \operatorname{div} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} &= 0 \quad \text{в } \Omega_{2\varepsilon} \times (0, T), \quad [u^\varepsilon]|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{ij}^\varepsilon n_j]|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \\ u^\varepsilon(x, t)|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u^\varepsilon(x, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\rho_s = \text{const}$ — плотность среды в $\Omega_{s\varepsilon}$; $f(x, t) \in H^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ — вектор объемной силы; $[g]|_{\Gamma_\varepsilon}$ — скачок функции g при переходе через поверхность $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}$; $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности Γ_ε , направленный из твердой фазы в жидкую.

Вариационная формулировка задачи (2.3) имеет следующий вид: найти $u^\varepsilon(t)$ и $p^\varepsilon(t)$ со значениями в $H_0^1(\Omega)^3$ и $L^2(\Omega_{2\varepsilon})$ соответственно, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 \rho_s \int_{\Omega_{s\varepsilon}} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot v \, dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} a_{ijkh} e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(v) \, dx \\ + 2\eta \int_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) e_{ij}(v) \, dx + 2\theta \int_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij} \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \right) e_{ij}(v) \, dx \\ - \int_{\Omega_{2\varepsilon}} p^\varepsilon \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

для почти всех $t \in (0, T)$, условию несжимаемости жидкой фазы

$$\operatorname{div} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \text{в } \Omega_{2\varepsilon} \times (0, T) \quad (2.5)$$

и однородным начальным условиям

$$u^\varepsilon(0) = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = 0. \quad (2.6)$$

Существование и единственность решения задачи (2.4)–(2.6) при фиксированном $\varepsilon > 0$ доказываются так же, как и в работах [1], [2], в которых был рассмотрен случай двухфазной среды, состоящей из упругого материала и вязкой ньютоновской жидкости.

Из интегрального тождества (2.4) мы можем вывести ряд априорных оценок, равномерных по ε . Прежде всего, полагая $v = \partial u^\varepsilon / \partial t$ в (2.4), получаем

$$\frac{dz^\varepsilon}{dt} \leq 2 \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \, dx, \quad (2.7)$$

где

$$z^\varepsilon(t) = \sum_{s=1}^2 \rho_s \int_{\Omega_{s\varepsilon}} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \, dx + \int_{\Omega_{1\varepsilon}} a_{ijkh} e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(u^\varepsilon) \, dx + 2\theta \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left| e \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 \, dx.$$

Из (2.7) имеем

$$\frac{dz^\varepsilon}{dt} \leq \int_{\Omega} |f|^2 \, dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} |f|^2 \, dx + k_1 z^\varepsilon, \quad k_1 = \frac{1}{\min\{\rho_1, \rho_2\}},$$

откуда, используя неравенство Гронуолла, получаем оценки

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} &\leq C \|f\|_1, & \|e(u^\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{1\varepsilon})^3)} &\leq C \|f\|_1, \\ \left\| e \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{2\varepsilon})^3)} &\leq C \|f\|_1, & \|f\|_1 &= \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}, \end{aligned}$$

где C обозначает различные положительные постоянные, не зависящие от ε . Из этих оценок и неравенства Корна следует также, что

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^3)} \leq C \|f\|_1.$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial t^3} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} &\leq C \|f\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}, \\ \left\| \frac{\partial^r u^\varepsilon}{\partial t^r} \right\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^3)} &\leq C \|f\|_{H^r(0,T;L^2(\Omega)^3)}, \quad r = 1, 2. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, в частности, что после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега $u^\varepsilon \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)^3) \cap C^2([0, T]; L^2(\Omega)^3)$ [11].

Остается получить оценку для давления $p^\varepsilon(x, t)$. Для этого рассмотрим задачу

$$\operatorname{div} q^\varepsilon = P^\varepsilon \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad q^\varepsilon(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.8)$$

где

$$P^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{|\Omega_{1\varepsilon}|} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} p^\varepsilon(x, t) & \text{в } \Omega_{1\varepsilon} \times (0, T), \\ p^\varepsilon(x, t) & \text{в } \Omega_{2\varepsilon} \times (0, T). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{\Omega} P^\varepsilon(x, t) dx = 0, \quad \|P^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \|p^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_{2\varepsilon}))}.$$

Известно [12], что решение задачи (2.8) существует и для него выполнена оценка

$$\|q^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^3)} \leq C \|P^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Теперь возьмем в интегральном тождестве $v = q^\varepsilon$ — решение задачи (2.8). Тогда, принимая во внимание приведенные выше оценки для u^ε , нетрудно получить, что

$$\|p^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_{2\varepsilon}))} \leq C.$$

3. УСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Чтобы выписать усредненную задачу, соответствующую задаче (2.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$, продолжим $f(x, t)$ нулем при $t < 0$ и $t > T$. Затем мы применим к (2.4)–(2.6) преобразование Лапласа по времени t , обозначая изображение функции $g(t)$ через g_λ или $g(\lambda)$, где λ — параметр преобразования Лапласа. Следуя рассуждениям, приведенным в работах [6]–[8]

при выводе усредненных моделей двухфазных сред, можно показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_{\lambda}^{\varepsilon}(x) - u_{\lambda}(x)|^2 dx &= 0, & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |p_{\lambda}^{\varepsilon}(x) - p_{\lambda}(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |e(u_{\lambda}^{\varepsilon}(x)) - e(u_{\lambda}(x)) - w_{\lambda}(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx &= 0, & w_{\lambda}(x, y) &= e_y(v_{\lambda}(x, y)), \\ v_{\lambda}(x, y) &= Q_{\lambda}^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}, & p_{\lambda}(x, y) &= P_{\lambda}^{kh}(y) \frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h}, \end{aligned}$$

где пары $\{Q_{\lambda}^{kh}(y) \in H_{\text{per}}^1(Y)^3/\mathbb{R}^3, P_{\lambda}^{kh}(y) \in L_{\text{per}}^2(Y_2)\}$ есть решения вспомогательных задач на ячейке Y (“per” означает Y -периодичность), а $u_{\lambda}(x) \in H_0^1(\Omega)^3$ — решение усредненной задачи в изображениях Лапласа

$$\rho_0 \lambda^2 u_{\lambda i} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{\lambda}}{\partial x_j} + f_{\lambda i}(x) \quad \text{в } \Omega, \quad u_{\lambda}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $\rho_0 = |Y_1|\rho_1 + |Y_2|\rho_2$ — плотность, а σ^{λ} — тензор напряжений усредненной среды, записанный в изображениях Лапласа. Для рассматриваемой нами двухфазной среды компоненты тензора σ^{λ} имеют вид

$$\sigma_{ij}^{\lambda} = D_{ijkh}(\lambda) e_{kh}(u_{\lambda}) \quad (3.2)$$

при

$$\begin{aligned} D_{ijkh}(\lambda) &= |Y_1| a_{ijkh} + |Y_2| \lambda (\eta + \theta \lambda) (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) + \int_{Y_1} a_{ijlm} e_{lm}^y(Q_{\lambda}^{kh}) dy \\ &+ \int_{Y_2} (2\lambda (\eta + \theta \lambda) e_{ij}^y(Q_{\lambda}^{kh}) - \delta_{ij} P_{\lambda}^{kh}) dy, \end{aligned}$$

а пары $\{Q_{\lambda}^{kh}(y), P_{\lambda}^{kh}(y)\}$ есть решения Y -периодических задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(0)}(Q_{\lambda}^{kh}, P_{\lambda}^{kh})) = 0 & \text{в } Y, & \operatorname{div}_y Q_{\lambda}^{kh} = -\delta_{kh} & \text{в } Y_2, \\ \int_Y Q_{\lambda}^{kh} dy = 0, & [Q_{\lambda}^{kh}]|_{\Gamma} = 0, & [\sigma_{ij}^{(0)}(Q_{\lambda}^{kh}, P_{\lambda}^{kh}) \nu_j]|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

где ν_j — компоненты единичного вектора нормали к поверхности Γ ,

$$\sigma_{ij}^{(0)}(Q_{\lambda}^{kh}, P_{\lambda}^{kh}) = \begin{cases} a_{ijkh} + a_{ijlm} e_{lm}^y(Q_{\lambda}^{kh}) & \text{в } Y_1, \\ \lambda (\eta + \theta \lambda) (2e_{ij}^y(Q_{\lambda}^{kh}) + \delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) - \delta_{ij} P_{\lambda}^{kh} & \text{в } Y_2. \end{cases}$$

Теперь, чтобы перейти к первоначальным переменным x и t , выполним в (3.2) и (3.3) обратное преобразование Лапласа. Из (3.2) следует, что компоненты усредненного тензора напряжений σ имеют вид

$$\sigma_{ij} = D_{ijkh}(t) * e_{kh}(u),$$

где $D(t)$ — тензор ядер релаксации усредненной среды, а символ $*$ обозначает операцию свертки по переменной t ,

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t g_1(t-s) g_2(s) ds.$$

Нетрудно видеть, что как оригиналы решений задач (3.3), так и компоненты тензора $D(t)$ зависят от дельта-функции $\delta(t)$. Покажем, что $Q^{kh}(y, t)$ и $P^{kh}(y, t)$ можно представить

В ВИДЕ

$$\begin{aligned} Q^{kh}(y, t) &= \delta(t)Z^{kh}(y) + W^{kh}(y, t), \quad y \in Y, \\ P^{kh}(y, t) &= \delta''(t)A^{kh}(y) + \delta'(t)B^{kh}(y) + \delta(t)C^{kh}(y) + S^{kh}(y, t), \quad y \in Y_2, \end{aligned}$$

где $W^{kh}(y, t)$ и $S^{kh}(y, t)$ не зависят от $\delta(t)$. Действительно, из (3.3) сразу следует, что пары $\{Z^{kh}(y), A^{kh}(y)\}$ и $\{W^{kh}(y, t), S^{kh}(y, t)\}$ есть Y -периодические решения задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(s)}(Z^{kh}, A^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y_s \quad (s = 1, 2), \quad \operatorname{div}_y Z^{kh} = -\delta_{kh} \quad \text{в } Y_2, \\ \int_Y Z^{kh} dy = 0, \quad [Z^{kh}]|_{\Gamma} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}, A^{kh})\nu_j|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}, S^{kh}) \right) = 0 \quad \text{в } Y, \quad \operatorname{div}_y W^{kh} = 0 \quad \text{в } Y_2, \\ W^{kh}(y, 0) = D^{kh}(y), \quad \frac{\partial W^{kh}}{\partial t}(y, 0) = N^{kh}(y) \quad \text{в } Y_2, \\ \int_Y W^{kh} dy = 0, \quad [W^{kh}]|_{\Gamma} = 0, \quad [\sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}, S^{kh})\nu_j]|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

соответственно, где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}, A^{kh}) &= a_{ijkh} + a_{ijlm}e_{lm}^y(Z^{kh}), \quad y \in Y_1, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}, A^{kh}) &= 2\theta e_{ij}^y(Z^{kh}) + \theta(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) - \delta_{ij}A^{kh}, \quad y \in Y_2, \\ \sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}, S^{kh}) &= \begin{cases} a_{ijlm}e_{lm}^y(W^{kh}), & y \in Y_1, \\ 2\eta e_{ij}^y\left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t}\right) + 2\theta e_{ij}^y\left(\frac{\partial^2 W^{kh}}{\partial t^2}\right) - \delta_{ij}S^{kh}, & y \in Y_2. \end{cases} \end{aligned}$$

При этом пары $\{D^{kh}(y), B^{kh}(y)\}$ и $\{N^{kh}(y), C^{kh}(y)\}$ есть Y -периодические решения задач

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(4)}(D^{kh}, B^{kh}) \right) = 0, \quad \operatorname{div}_y D^{kh} = 0 \quad \text{в } Y_2, \\ \int_{Y_2} D^{kh} dy = 0, \quad \sigma_{ij}^{(4)}(D^{kh}, B^{kh})\nu_j|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sigma_{ij}^{(5)}(N^{kh}, C^{kh}) \right) = 0, \quad \operatorname{div}_y N^{kh} = 0 \quad \text{в } Y_2, \\ \int_{Y_2} N^{kh} dy = 0, \quad \sigma_{ij}^{(5)}(N^{kh}, C^{kh})\nu_j|_{\Gamma} = \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}, A^{kh})\nu_j|_{\Gamma}, \end{cases} \quad (3.7)$$

соответственно, где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(4)}(D^{kh}, B^{kh}) &= 2\eta e_{ij}^y(Z^{kh}) + 2\theta e_{ij}^y(D^{kh}) + \eta(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) - \delta_{ij}B^{kh}, \\ \sigma_{ij}^{(5)}(N^{kh}, C^{kh}) &= 2\eta e_{ij}^y(D^{kh}) + 2\theta e_{ij}^y(N^{kh}) - \delta_{ij}C^{kh}. \end{aligned}$$

С помощью решений задач (3.4)–(3.7) тензор ядер релаксации $D(t)$ можно записать в виде

$$D(t) = \delta(t)\alpha + \delta'(t)\beta + \delta''(t)\gamma - g(t), \quad (3.8)$$

где компоненты тензоров α , β , γ , $g(t)$ заданы формулами

$$\begin{aligned}\alpha_{ijkh} &= |Y_1| a_{ijkl} + \int_{Y_1} a_{ijlm} e_{lm}^y(Z^{kh}) dy + \int_{Y_2} \left(2\eta e_{ij}^y(D^{kh}) + 2\theta e_{ij}^y(N^{kh}) - \delta_{ij} C^{kh} \right) dy, \\ \beta_{ijkh} &= \eta |Y_2| (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) + \int_{Y_2} \left(2\eta e_{ij}^y(Z^{kh}) + 2\theta e_{ij}^y(D^{kh}) - \delta_{ij} B^{kh} \right) dy, \\ \gamma_{ijkh} &= \theta |Y_2| (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) + \int_{Y_2} \left(2\theta e_{ij}^y(Z^{kh}) - \delta_{ij} A^{kh} \right) dy, \\ g_{ijkh}(t) &= - \int_{Y_1} a_{ijlm} e_{lm}^y(W^{kh}) dy - \int_{Y_2} \left(2\eta e_{ij}^y \left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t} \right) + 2\theta e_{ij}^y \left(\frac{\partial^2 W^{kh}}{\partial t^2} \right) - \delta_{ij} S^{kh} \right) dy.\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $Z^{kh}(y) = Z^{hk}(y)$ и аналогично для $D^{kh}(y)$, $N^{kh}(y)$, $W^{kh}(y, t)$, $A^{kh}(y)$, $B^{kh}(y)$, $C^{kh}(y)$ и $S^{kh}(y, t)$. Кроме того, компоненты тензоров α , β , γ , $g(t)$ удовлетворяют классическим условиям симметрии, т.е. $\alpha_{ijkh} = \alpha_{jikh} = \alpha_{ijhk} = \alpha_{hki j}$ и аналогично для тензоров β , γ и $g(t)$.

Выполняя в (3.1) обратное преобразование Лапласа, получаем усредненную задачу, соответствующую задаче (2.3):

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x, t) \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,\end{aligned}\tag{3.9}$$

где, учитывая представление (3.8), компоненты усредненного тензора напряжений σ имеют вид

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ijkh} e_{kh}(u) + \beta_{ijkh} e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \gamma_{ijkh} e_{kh} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - g_{ijkh}(t) * e_{kh}(u).$$

Таким образом, усредненная модель движения исходной двухфазной среды записывается в виде начально-краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Доказательство существования и единственности решений периодических задач (3.4)–(3.7) в случае, когда множества Y_2 и E_2 связны в Y и \mathbb{R}^3 соответственно, опирается на рассуждения, приведенные в работе [3] при исследовании решений периодических задач подобного типа. Кроме того, при выполнении указанных условий связности имеет место положительная определенность тензоров α и $D(\lambda)$ при $\lambda > 0$. Положительная определенность последнего тензора, в свою очередь, является достаточным условием существования и единственности усредненной задачи (3.9) [3], [14]. Вместе с тем, как будет показано в следующем параграфе на примере слоистой среды, условие связности множеств Y_2 и E_2 не является необходимым условием существования и единственности усредненной задачи (3.9).

Полученные в данном параграфе результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ – решение задачи (2.3). Тогда для всех $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2 dx &= 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |p^\varepsilon(x, t) - p(x, \varepsilon^{-1}x, t)|^2 dx = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |e(u^\varepsilon(x, t)) - e(u(x, t)) - w(x, \varepsilon^{-1}x, t)|^2 dx &= 0, \end{aligned}$$

где $u(x, t)$ – решение усредненной задачи (3.9),

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= e_y(v(x, y, t)), \quad v(x, y, t) = Z^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + W^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}, \\ W^{kh}(y, 0) &= D^{kh}(y), \quad \frac{\partial W^{kh}}{\partial t}(y, 0) = N^{kh}(y) \quad \text{в } Y_2, \\ p(x, y, t) &= A^{kh}(y) \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_h \partial t^2} + B^{kh}(y) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_h \partial t} + C^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + S^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}, \end{aligned}$$

а пары $\{Z^{kh}(y), A^{kh}(y)\}$, $\{W^{kh}(y, t), S^{kh}(y, t)\}$, $\{D^{kh}(y), B^{kh}(y)\}$ и $\{N^{kh}(y), C^{kh}(y)\}$ есть Y -периодические решения задач (3.4)–(3.7).

4. СЛУЧАЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

В том случае, когда среда состоит из чередующихся плоских упругих и жидких слоев, мы можем вывести формулы для компонентов тензоров α , β , γ и $g(t)$ в явном виде. Для этого условимся считать, что слои параллельны плоскости Ox_2x_3 , а множества Y_1 и Y_2 заданы в виде

$$Y_1 = \bigcup_{m=0}^M (q_{2m}, q_{2m+1}) \times (0, 1)^2, \quad Y_2 = \bigcup_{m=1}^M (q_{2m-1}, q_{2m}) \times (0, 1)^2, \quad M \geq 1,$$

где $0 = q_0 < q_1 < q_2 < \dots < q_{2M} < q_{2M+1} = 1$. Отметим, что при таком предположении период Y_ε содержит M жидких слоев и $M + 1$ упругих слоев, а в граничных условиях периодических задач $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$. Кроме того, если через q обозначить общую объемную долю жидкости внутри периода Y_ε , то

$$q = \frac{|\varepsilon Y_2|}{|Y_\varepsilon|} = \frac{|Y_2|}{|Y|} = \sum_{m=1}^M (q_{2m} - q_{2m-1}), \quad 0 < q < 1.$$

Выпишем решения периодических задач (3.4)–(3.7) при $k \leq h$. Легко проверить, что при $k = 2$ и $h = 3$

$$\begin{aligned} Z^{23}(y) &= D^{23}(y) = N^{23}(y) = W^{23}(y, t) = (0, 0, 0), \\ A^{23}(y) &= B^{23}(y) = C^{23}(y) = S^{23}(y, t) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы выписать решения остальных периодических задач, введем кусочно-линейную функцию

$$z(y_1) = \begin{cases} -y_1 + C_{2m}, & y_1 \in (q_{2m-1}, q_{2m}), \quad m = 1, \dots, M, \\ \frac{qy_1}{1-q} + C_{2m+1}, & y_1 \in (q_{2m}, q_{2m+1}), \quad m = 0, \dots, M, \end{cases}$$

где постоянные C_{2m} и C_{2m+1} заданы выражениями

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2(1-q)} \left(q - \sum_{m=1}^{2M} (-1)^m q_m^2 \right), \\ C_m &= \frac{1}{2(1-q)} \left(-q - \sum_{k=1}^{2M} (-1)^k q_k^2 + 2 \sum_{k=m}^{2M} (-1)^k q_k \right), \quad m = 2, \dots, M, \\ C_{2M+1} &= -\frac{1}{2(1-q)} \left(q + \sum_{m=1}^{2M} (-1)^m q_m^2 \right). \end{aligned}$$

Как известно [15], $z(y_1)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$z(+0) = z(1-0), \quad \int_0^1 z(y_1) dy_1 = 0, \quad [z]|_{y_1=q_m} = 0, \quad m = 1, \dots, 2M.$$

Продолжим функцию $z(y_1)$ периодически с периодом 1 на всю числовую ось, сохранив для продолжения то же самое обозначение. Нетрудно убедиться, что решения стационарных периодических задач записываются в виде

$$\begin{aligned} Z^{ii}(y) &= (z(y_1), 0, 0), \quad Z^{12}(y) = (0, z(y_1), 0), \quad Z^{13}(y) = (0, 0, z(y_1)), \\ A^{1i}(y) &= B^{1i}(y) = 0, \quad A^{jj}(y) = -2\theta, \quad B^{jj}(y) = -2\eta, \\ D^{ii}(y) &= D^{1j}(y) = N^{ii}(y) = (0, 0, 0), \quad N^{12}(y) = (0, c_1 z(y_1), 0), \\ N^{13}(y) &= (0, 0, c_1 z(y_1)), \quad C^{11}(y) = -\frac{\lambda + 2\mu}{1-q}, \quad C^{jj}(y) = -\frac{\lambda + 2\mu q}{1-q}, \\ C^{1j}(y) &= 0, \quad c_1 = -\frac{\mu}{\theta(1-q)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 2, 3. \end{aligned}$$

Далее, решения эволюционных периодических задач имеют вид

$$\begin{aligned} W^{ii}(y, t) &= (0, 0, 0), \quad W^{12}(y, t) = (0, z(y_1)w(t), 0), \\ W^{13}(y, t) &= (0, 0, z(y_1)w(t)), \quad S^{ii}(y, t) = S^{1j}(y, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 2, 3, \end{aligned}$$

где $w(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\theta(1-q) \frac{d^2 w}{dt^2} + \eta(1-q) \frac{dw}{dt} + \mu q w(t) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = c_1.$$

Легко проверить, что $w(t) = c_1 w_0(t)$, где

$$w_0(t) = t \exp\left(-\frac{\eta}{2\theta} t\right),$$

если $\eta^2(1-q) = 4q\mu\theta$,

$$w_0(t) = \frac{\theta}{\sqrt{D}} \left(\exp\left(-\frac{\eta - \sqrt{D}}{2\theta} t\right) - \exp\left(-\frac{\eta + \sqrt{D}}{2\theta} t\right) \right),$$

если $\eta^2(1-q) > 4q\mu\theta$, и

$$w_0(t) = \frac{\theta}{\sqrt{-D}} \exp\left(-\frac{\eta}{2\theta} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2\theta} t\right),$$

если $\eta^2(1-q) < 4q\mu\theta$. Здесь через D обозначен дискриминант квадратного уравнения

$$\theta\lambda^2 + \eta\lambda + \frac{q\mu}{1-q} = 0, \quad (4.1)$$

т.е.

$$D = \eta^2 - \frac{4q\mu\theta}{1-q}.$$

Зная явные решения всех периодических задач, мы можем перейти к непосредственному вычислению компонентов тензоров α , β , γ и $g(t)$. Но перед этим нам следует иметь в виду, что $D_{ijkh}(t) = 0$ как только $\delta_{ij}\delta_{kh} + \delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk} = 0$. Более того, усредненная среда является трансверсально изотропной, т.е. выполнены соотношения

$$D_{2222}(t) = D_{3333}(t), \quad D_{1122}(t) = D_{1133}(t), \quad D_{1212}(t) = D_{1313}(t),$$

$$D_{2222}(t) - D_{2233}(t) = 2D_{2323}(t).$$

Теперь подставим решения задач (3.4)–(3.7) в формулы для компонентов тензоров α , β , γ и $g(t)$, приведенные в предыдущем параграфе. После несложных преобразований мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Для слоистой среды описанного выше вида усредненные тензоры α , β , γ и $g(t)$ имеют следующие ненулевые компоненты:*

$$\begin{aligned} \alpha_{1111} &= \frac{\lambda + 2\mu}{1-q}, \quad \alpha_{iiii} = \frac{\lambda + 2\mu(1-2q+2q^2)}{1-q}, \quad \alpha_{ijij} = \frac{\lambda + 2\mu q^2}{1-q}, \\ \alpha_{11ii} &= \alpha_{ii11} = \frac{\lambda + 2\mu q}{1-q}, \quad \alpha_{1i1i} = \alpha_{1i1i} = \alpha_{i1i1} = \alpha_{i1i1} = \frac{\mu}{1-q}, \\ \alpha_{ijij} &= \alpha_{ijji} = \mu(1-q), \quad \beta_{iiii} = 4\eta q, \quad \beta_{ijij} = 2\eta q, \\ \beta_{ijij} &= \beta_{ijji} = \eta q, \quad \gamma_{iiii} = 4\theta q, \quad \gamma_{ijij} = 2\theta q, \quad \gamma_{ijji} = \gamma_{jiji} = \theta q, \\ g_{1i1i}(t) &= g_{i1i1}(t) = g_{i1i1}(t) = g_{i1i1}(t) = \frac{\mu^2 q w_0(t)}{\theta(1-q)^2}, \quad i = 2, 3, \quad j = 5 - i. \end{aligned}$$

Легко проверить, что α и $D(\lambda) = \alpha + \lambda\beta + \lambda^2\gamma - g(\lambda)$ при $\lambda > 0$ — положительно определенные тензоры, в то время как β , γ и $g(t)$ — вырожденные тензоры.

Для сравнения мы кратко опишем усредненные тензоры для слоистой среды, состоящей из изотропного упругого материала и несжимаемой ньютоновской жидкости (для нее следует принять $\theta = 0$ в определяющих соотношениях (2.2)). Как было показано в [16], для такой среды компоненты тензоров α и β вычисляются в точности по тем же формулам, что и выше, в то время как тензор γ — нулевой. Что касается тензора $g(t)$, то все его компоненты равны нулю, кроме

$$g_{1i1i}(t) = g_{i1i1}(t) = g_{i1i1}(t) = g_{i1i1}(t) = \frac{\mu^2 q w_1(t)}{\eta(1-q)^2}, \quad i = 2, 3,$$

где мы обозначили

$$w_1(t) = \exp\left(-\frac{\mu q}{\eta(1-q)}t\right).$$

Мы видим, что сравнение свойств тензоров $g(t)$ для двух слоистых сред сводится к сравнению свойств функций $w_0(t)$ и $w_1(t)$. Прежде всего отметим общее свойство этих функций, заключающееся в том, что $w_0(t) \rightarrow 0$ и $w_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Однако в остальном эти функции существенно отличаются друг от друга. А именно, $w_1(t)$ — положительная функция, строго убывающая при $t > 0$, в то время как поведение функции

$w_0(t)$ зависит от доли жидкости q внутри периода. Если $q < \eta^2/(\eta^2 + 4\mu\theta)$, то $w_0(t)$ — положительная функция, которая сначала строго возрастает, достигая максимума при

$$t = \frac{\theta}{\sqrt{D}} \ln \frac{\eta + \sqrt{D}}{\eta - \sqrt{D}},$$

а затем строго убывает. Если $q = \eta^2/(\eta^2 + 4\mu\theta)$, то функция $w_0(t)$ также положительна и сначала строго возрастает, достигая максимума при $t = 2\theta/\eta$, а затем строго убывает. Если же $q > \eta^2/(\eta^2 + 4\mu\theta)$, то $w_0(t) > 0$ при

$$t \in \left(\frac{4\theta\pi k}{\sqrt{-D}}, \frac{2\theta\pi}{\sqrt{-D}} + \frac{4\theta\pi k}{\sqrt{-D}} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

и $w_0(t) < 0$ при всех остальных значениях $t > 0$. Кроме того, функция $w_0(t)$ строго убывает на интервалах

$$\frac{2\theta}{\sqrt{-D}} \left(2\pi k + \arccos \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - D}} \right) < t < \frac{2\theta}{\sqrt{-D}} \left(\pi + 2\pi k + \arccos \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - D}} \right)$$

и строго возрастает на остальных интервалах полуоси $t > 0$. Таким образом, она имеет бесконечное число как точек максимума, так и точек минимума, причем ее максимальные и минимальные значения экспоненциально убывают по модулю при $t \rightarrow +\infty$.

В заключение необходимо отметить, что мы впервые обнаружили случай наличия максимумов у ядер свертков интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при усреднении слоистых двухфазных сред с периодической структурой. Ранее нами было показано, что если первой фазой является упругий материал или вязкоупругий материал Кельвина-Фойгта, а второй фазой — вязкоупругий материал Кельвина-Фойгта или вязкая ньютоновская жидкость, то ядрами свертков усредненных уравнений являются затухающие экспоненты [16]–[19]. Таким образом, для всех этих сред ядра свертков — положительные, строго убывающие функции при $t > 0$. В отличие от них, для среды, состоящей из упругого материала и жидкости Кельвина-Фойгта, число интервалов монотонности и точек максимума ядер свертков зависит от доли жидкости q внутри ячейки периодичности. А именно, можно найти такое число M_0 , что при $0 < q \leq M_0$ ядра свертков имеют два интервала монотонности и одну точку максимума, а при $M_0 < q < 1$ — бесконечное число чередующихся интервалов возрастания и убывания, а также точек максимума и минимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Sanchez-Hubert. *Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture* // Math. Methods Appl. Sci. 2 (1980), 1–18.
2. Э. Санчес-Паленсия. *Неоднородные среды и теория колебаний*. М.: Мир. 1984. 472 с.
3. R.P. Gilbert, A. Mikelić. *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I* // Nonlinear Analysis. 40:1 (2000), 185–212.
4. Th. Clopeau, J.L. Ferrin, R.P. Gilbert, A. Mikelić. *Homogenizing the acoustic properties of the seabed, Part II* // Math. and Comput. Modelling. 33 (2003), 821–841.
5. A. Meirmanov. *A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization* // SIAM J. Math. Anal. 40:3 (2008), 1272–1289.
6. В.В. Шумилова. *Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с каналами, заполненными жидкостью* // СМФН. 39 (2011), 185–198.
7. А.С. Шамаев, В.В. Шумилова. *Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью* // Известия РАН. МЖГ. 2 (2011), 92–103.
8. А.С. Шамаев, В.В. Шумилова. *Усреднение уравнений акустики для пористого вязкоупругого материала с долговременной памятью, заполненного вязкой жидкостью* // Диф. уравнения. 48:8 (2012), 1174–1186.

9. S.A. Sazhenkov, E.V. Sazhenkova, A.V. Zubkova. *Small perturbations of two-phase fluid in pores: effective macroscopic monophasic viscoelastic behavior* // Сиб. электрон. матем. изв. **11** (2014), 26–51.
10. А.П. Осколков. *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта* // Тр. МИАН СССР. **179** (1988), 126–164.
11. В.Г. Звягин, М.В. Турбин. *Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта* // СМФН. **31** (2009), 3–144.
12. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1.* М.: Мир. 1971. 372 с.
13. А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев. *Усреднение. Методы и приложения.* Новосибирск: Тамара Рожковская. 264 с.
14. R. Dautray, J.-L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5: Evolution Problems I.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer. 2000. 739 p.
15. V.V. Shumilova. *Homogenization of the system of acoustic equations for layered viscoelastic media* // J. Math. Sci. **261** (2022), 488–501.
16. В.В. Шумилова. *Эффективный тензор ядер релаксации слоистой среды, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой несжимаемой жидкости* // Известия РАН. МЖГ. **2** (2023), 1–9.
17. А.С. Шамаев, В.В. Шумилова. *Спектр одномерных колебаний в комбинированной слоистой среде, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости* // Известия РАН. МЖГ. **1** (2013), 17–25.
18. А.С. Шамаев, В.В. Шумилова. *Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта* // Тр. МИАН. **295** (2016), 218–228.
19. В.В. Шумилова. *Спектр собственных колебаний слоистой среды, состоящей из материала Кельвина–Фойгта и вязкой несжимаемой жидкости* // Сиб. электр. матем. известия. **17** (2020), 21–31.

Алексей Станиславович Шамаев,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1,
119526, Москва, Россия
E-mail: v.v.shumilova@mail.ru

Владлена Валерьевна Шумилова,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1,
119526, Москва, Россия
E-mail: v.v.shumilova@mail.ru