УДК 517.9

СЦЕНАРИЙ УСТОЙЧИВОГО ПЕРЕХОДА ОТ ИЗОТОПНОГО ТОЖДЕСТВЕННОМУ ДИФФЕОМОРФИЗМА ТОРА К КОСОМУ ПРОИЗВЕДЕНИЮ ГРУБЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОКРУЖНОСТИ

Д.А. БАРАНОВ, Е.В. НОЗДРИНОВА, О.В. ПОЧИНКА

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются изотопные тождественному градиентно-подобные диффеоморфизмы двумерного тора $\mathbb{T}^2$. Изотопность диффеоморфизмов f_0, f_1, заданных на n-многообразии M^n означает существование некоторой дуги $\{f_t : M^n \to M^n, t \in [0,1]\}$, соединяющей их в пространстве диффеоморфизмов. Если изотопные диффеоморфизмы являются структурно устойчивыми (качественно не меняющими своих свойств при малых шевелениях), то естественно ожидать существования устойчивой дуги (качественно не меняющей своих свойств при малых шевелениях) их соединяющей. В этом случае, говорят, что изотопные диффеоморфизмы f_0, f_1 устойчиво изотопны или принадлежат одному и тому же классу устойчивой изотопической связности. Простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами на поверхностях являются *градиентно-подобные* преобразования, имеющие конечное гиперболическое неблуждающее множество, устойчивые и неустойчивые многообразия различных седловых точек которого не пересекаются. Однако, даже на двумерной сфере, где все сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы изотопны, градиентно-подобные диффеоморфизмы в общем случае не являются устойчиво изотопными. Счетное число попарно различных классов устойчивой изотопической связности строится на основе грубого преобразования окружности $\phi_{\frac{k}{m}}$ в точности с двумя периодическими орбитами периода m и числом вращения $\frac{k}{m}$, который может быть продолжен до диффеоморфизма $F_{\frac{k}{m}} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, имеющего два неподвижных источника в северном и южном полюсах. На торе $\mathbb{T}^2$ модельным представителем в рассмотренном классе являются косые произведения грубых преобразований окружности. Мы покажем, что любой изотопный тождественному градиентно-подобный диффеоморфизм тора соединяется устойчивой дугой с некоторым модельным преобразованием.

Ключевые слова: диффеоморфизмы, тор, устойчивые дуги.

Mathematics Subject Classification: 37B35, 37C20, 37G10

1. Введение и формулировка результата

Во всей работе мы будем иметь дело с замкнутыми связными ориентируемыми n-многообразиями M^n и сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами или диффеоморфизмами, заданными на них. Изотопность диффеоморфизмов $f_0, f_1 : M^n \to M^n$ означает существование некоторой дуги $\{f_t : M^n \to M^n, t \in [0,1]\}$, соединяющей их в пространстве

D.A. Baranov, E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka, Scenario of a stable transition from the torus isotopic identity diffeomorphism to the skew product of rough transformations of the circle.

© Баранов Д.А., Ноздринова Е.В., Починка О.В. 2024.

Исследование выполнено при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант № 23-7-2-13-1 «Топологические аспекты регулярной динамики».

Поступила 16 марта 2023 г.

диффеоморфизмов. Если изотопные диффеоморфизмы являются *структурно устойчивыми* (качественно не меняющими своих свойств при малых шевелениях), то естественно ожидать существования *устойчивой дуги* (качественно не меняющей своих свойств при малых шевелениях) их соединяющей (см. точное определение в разделе 2.3). В этом случае, говорят, что диффеоморфизмы $f_0, f_1 : M^n \to M^n$ *устойчиво изотопны* или принадлежат одному и тому же классу *устойчивой изотопической связности.*

Простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами являются *градиентно-подобные* преобразования, имеющие конечное гиперболическое неблуждающее множество, устойчивые и неустойчивые многообразия различных седловых точек которого либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально по множеству положительной размерности (см. точное определение в разделе 2.1). Однако, даже градиентно-подобные изотопные диффеоморфизмы в общем случае не являются устойчиво изотопными. Уже на окружности, где все диффеоморфизмы попарно изотопны, появляется счетное множество классов устойчивой изотопической связности грубых преобразований окружности [1], каждый из которых однозначно определяется числом вращения $\frac{k}{m}$, где $k \in (\mathbb{N} \cup 0)$, $m \in \mathbb{N}$, $k < m$, $(k, m) = 1$, где (k, m) – наибольший общий делитель чисел k, m.

Аналогичная ситуация имеет место для градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-сферы. Именно, рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как экватор сферы $\mathbb{S}^2$. Тогда диффеоморфизм окружности $\phi_{\frac{k}{m}}$ в точности с двумя периодическими орбитами периода m и числом вращения $\frac{k}{m}$ может быть продолжен до диффеоморфизма $F_{\frac{k}{m}} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, имеющего два неподвижных источника в северном и южном полюсах. Обозначим через $F_0 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ диффеоморфизм «источник-сток». В работе [2] показано, что любой градиентно-подобный диффеоморфизм 2-сферы соединяется устойчивой дугой в точности с одним из диффеомофизмов F_0, $F_{\frac{k}{m}}$, $F^{-1}_{\frac{k}{m}}$, $m \geqslant 3$, $k < m/2$, устойчивые изотопические классы которых попарно не пересекаются.

Полученный результат тесно переплетается с теорией Нильсена-Терстона гомеоморфизмов поверхностей, в частности с классификацией периодических гомеоморфизмов двумерной сферы, полученной Керекьярто [3]. Класс топологической сопряженности *периодического преобразования* 2-сферы периода m (гомеоморфизм, степень m которого является тождественным отображением) также полностью определяется числом вращения $\frac{k}{m}$ вокруг оси северный полюс–южный полюс. Эта связь не случайна и объясняется тем, что любой градиентно-подобный диффеоморфизм поверхности топологически сопряжен композиции периодического гомеоморфизма со сдвигом на единицу времени градиентно-подобного потока [4]. Более того, динамика градиентно-подобного диффеоморфизма на неблуждающем множестве совпадает с динамикой периодического гомеоморфизма. Так, из результатов работы [2] следует, что устойчивый изотопический класс градиентно-подобного диффеоморфизма 2-сферы без неподвижных стоков полностью определяется классом топологической сопряженности его периодической компоненты.

В настоящей работе мы покажем, что на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ картина принципиально другая.

Рассмотрим класс G изотопных тождественному градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-тора $\mathbb{T}^2$. Простейшими примерами таких диффеоморфизмов являются косые произведения диффеоморфизмов $\phi_{\frac{k_1}{m_1}}$, $\phi_{\frac{k_2}{m_2}}$ (см. построение косых произведений в разделе 3), обозначим через GM класс косых произведений. Непосредственно вычисляется, что периодическая компонента косого произведения имеет период $m = \text{НОК}(m_1, m_2)$ и, следовательно, такой же период имеют все периодические точки такого диффеоморфизма. При этом, все изотопные тождественному периодические преобразования тора, отличные от тождественного отображения, топологически сопряжены повороту вдоль параллели с числом вращения $\frac{1}{m}$ [5]. То есть класс топологической сопряженности периодического изотопного тождественному преобразования тора полностью определяется периодом гомеоморфизма.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется устойчивой дугой с одним из диффеомофизмов $F_f \in GM$.*

2. Вспомогательные сведения

2.1. Диффеоморфизмы Морса-Смейла. Пусть диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ задан на гладком замкнутом (компактном без края) n-многообразии ($n \geqslant 1$) M^n с метрикой d.

Два диффеоморфизма $f, f' : M^n \to M^n$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$ такой, что $fh = hf'$.

Точка $x \in M^n$ называется *блуждающей* для f, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f.

Например, неблуждающими являются все предельные точки диффеоморфизма. Напомним, что точка $y \in M^n$ называется *ω-предельной* точкой для точки $x \in M^n$, если существует последовательность $t_k \to +\infty$, $t_k \in \mathbb{Z}$, такая, что $\lim\limits_{t_k \to +\infty} d(f^{t_k}(x), y) = 0$. Множество $\omega(x)$ всех ω-предельных точек для точки x называется ее *ω-предельным множеством.* Заменой $+\infty$ на $-\infty$ определяется *α-предельное множество $\alpha(x)$* точки x. Множество $L_f = \mathrm{cl}\,(\bigcup\limits_{x \in M^n} \omega(x) \cup \alpha(x))$ называется *предельным множеством* диффеоморфизма f.

Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $p \in \Omega_f$ является периодической, обозначим через $m_p \in \mathbb{N}$ период периодической точки p. С любой периодической точкой p связаны *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, определяемые следующим образом:

$W^s_p = \{x \in M^n : \lim\limits_{k \to +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\}$,

$W^u_p = \{x \in M^n : \lim\limits_{k \to +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}$.

Говорят, что периодические орбиты $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$ образуют *цикл*, если $W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_{i+1}} \neq \emptyset$ для $i \in \{1, \dots, k\}$ и $\mathcal{O}_{k+1} = \mathcal{O}_1$.

Периодическая точка $p \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)|_p$ по модулю не равны единице. Если все собственные значения по модулю меньше (больше) единицы, то p называют *стоковой (источниковой) точкой.* Стоковые и источниковые точки называются *узловыми.* Если гиперболическая периодическая точка не является *узловой*, то она называется *седловой точкой.*

Из гиперболической структуры периодической точки p следует, что ее устойчивое W^s_p и неустойчивое W^u_p многообразия являются образами относительно инъективных иммерсий пространств $\mathbb{R}^{q_p}$ и $\mathbb{R}^{n-q_p}$, где $q_p \in \{0, \dots, n\}$ — число собственных значений матрицы Якоби (с учетом кратности), по модулю больших единицы. Число ν_p, равное $+1(-1)$, если отображение $f^{m_p}|_{W^u_p}$ сохраняет (меняет) ориентацию W^u_p, называется *типом ориентации* точки p. Компонента линейной связности ℓ множества $W^u_p \setminus p$ ($W^s_p \setminus p$) называется *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой* точки p. Наименьшее из натуральных чисел m таких, что $f^m(\ell) = \ell$ называется *периодом сепаратрисы ℓ.*

Замкнутое f-инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \mathrm{int}\, U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k \geqslant 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей, или изолирующей. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}. Дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность репеллера, такие аттрактор и репеллер называются *дуальными.*

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;

2) многообразия W^s_p, W^u_q пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q.

Диффеоморфизм Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если из условия $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2} \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $\dim W^u_{\sigma_1} < \dim W^u_{\sigma_2}$.

2.2. Периодические гомеоморфизмы и их связь с градиентно-подобными диффеоморфизмами поверхностей. Гомеоморфизм $\varphi : M^2 \to M^2$ называется *периодическим*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом φ. Точка x_0 называется *точкой меньшего периода* $n_0 < n$ гомеоморфизма φ, если $\varphi^{n_0}(x_0) = x_0$.

Согласно результатам Я. Нильсена [6] для любого сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма ориентируемой поверхности M^2 рода p множество B_φ точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия φ на M^2 является сферой с $g \leqslant p$ ручками, называемой *модульной поверхностью*. В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi\dfrac{\delta_0}{\lambda_0}$, где $\lambda_0 = \dfrac{n}{n_0}$ и δ_0 — целое число, взаимно простое с n_0.

Обозначим через X_i, $i = 1, \dots, k$ орбиты точек меньшего периода, их периоды — через n_i и положим $\lambda_i = \dfrac{n}{n_i}$. Обозначим через $\dfrac{\delta_i}{\lambda_i}$ соответствующее число вращения и определим число d_i из условия $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$. Набор параметров

$$(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$$

периодического гомеоморфизма φ называется его *полной характеристикой*.

Утверждение 2.1 ([5])**.** *Для сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ периода $n \in \mathbb{N}$ следующие условия эквивалентны:*

1. *φ — гомотопен тождественному отображению;*
2. *$B_\varphi = \emptyset$;*
3. *$g = 1$;*
4. *φ топологически сопряжен диффеоморфизму $\Psi_n\left(e^{i2x\pi}, e^{i2y\pi}\right) = \left(e^{i2\pi\left(x+\frac{1}{n}\right)}, e^{i2y\pi}\right)$.*

Утверждение 2.2 ([4], Theorems 3.1, 3.3)**.** *Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ представляется в виде композиции*

$$f = \varphi \circ \xi^1,$$

где ξ^1 есть сдвиг на единицу времени вдоль траекторий градиентного потока ξ^t некоторой функции Морса[1]*, а φ — периодический гомеоморфизм. При этом:*

1. *$\Omega_f = \Omega_{\xi^1}$;*
2. *$f|_{\Omega_f} = \varphi|_{\Omega_f}$;*
3. *$B_\varphi \subset \Omega_f$;*
4. *период любой сепаратрисы любой седловой точки диффеоморфизма f совпадает с периодом гомеоморфизма φ.*

Следующий факт непосредственно следует из утверждений 2.1, 2.2.

Следствие 2.1. *Все периодические точки и сепаратрисы изотопного тождественному градиентно-подобного диффеоморфизма тора имеют одинаковый период, равный периоду периодической компоненты.*

[1] C^2-гладкая функция с невырожденными критическими точками.

2.3. Понятие устойчивости дуги диффеоморфизмов. Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов (*дугу*) $\varphi_t : M^n \to M^n$, $t \in [0,1]$. Дуга φ_t называется *гладкой*, если отображение $F : M^n \times [0,1] \to M^n$, заданное формулой $F(x,t) = \varphi_t(x)$, является *диффеотопией* — гладким отображением, которое при каждом фиксированном t является диффеоморфизмом. В топологической категории такое отображение называется *изотопией*.

Гладкая дуга φ_t называется *гладким произведением* гладких дуг ϕ_t и ψ_t таких, что $\phi_1 = \psi_0$, если $\varphi_t = \begin{cases} \phi_{2\tau(t)}, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi_{2\tau(t)-1}, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $\tau : [0,1] \to [0,1]$ — гладкое монотонное отображение такое, что $\tau(t) = 0$ для $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ и $\tau(t) = 1$ для $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1$. Будем писать
$$\varphi_t = \phi_t * \psi_t.$$

Согласно [7], дуги φ_t, φ'_t называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $h : [0,1] \to [0,1]$, $H_t : M^n \to M^n$ такие, что $H_t\varphi_t = \varphi'_{h(t)}H_t, t \in [0,1]$, и H_t непрерывно зависит от t.

Гладкая дуга φ_t называется *устойчивой*, если она имеет открытую окрестность в пространстве диффеотопий такую, что любая дуга из этой окрестности сопряжена дуге φ_t.

Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество гладких дуг $\varphi_t, t \in [0,1]$ такое, что каждая дуга из этого множества начинается и заканчивается в диффеоморфизмах Морса-Смейла и любой диффеоморфизм φ_t имеет конечное предельное множество.

В работе [7] также установлено, что дуга $\varphi_t \in \mathcal{Q}$, где $t \in [0,1]$ является устойчивой тогда и только тогда, когда все ее точки являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами за исключением конечного числа бифуркационных точек φ_{b_i}, $i = 1, \ldots, q$, таких, что:

1) предельное множество диффеоморфизма φ_{b_i} содержит единственную негиперболическую периодическую орбиту, которая является седло-узлом или флипом;

2) диффеоморфизм φ_{b_i} не имеет циклов;

3) устойчивые и неустойчивые многообразия всех периодических точек диффеоморфизма φ_{b_i} пересекаются трансверсально;

4) φ_{b_i} имеет одну негиперболическую периодическую орбиту, которая является орбитой некритического седло-узла или флипа и бифурцирует общим образом[1].

3. Косые произведения грубых преобразований окружности

В настоящем разделе мы построим косое произведение грубых преобразований окружности. Для этого рассмотрим пару натуральных чисел m_1, m_2 и неотрицательные целые числа k_1, k_2, взаимно простые с m_1, m_2, соответственно, и такие, что $\frac{k_1}{m_1} \leqslant \frac{k_2}{m_2}$. Обозначим через μ наибольший общий делитель чисел m_1, m_2 и выберем целое число ν, взаимно простое с μ. Определим диффеоморфизм $\bar{\phi}_{\frac{k_i}{m_i}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$ формулой:
$$\bar{\phi}_{\frac{k_i}{m_i}}(x_i) = x_i + \frac{1}{4m_i\pi} sin(2m_i\pi x_i) + \frac{k_i}{m_i}.$$

Положим
$$\bar{F}_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{0}{1}}(x_1,x_2) = \left(\bar{\phi}_{\frac{k_1}{m_1}}(x_1), \bar{\phi}_{\frac{k_2}{m_2}}(x_2)\right).$$

Определим диффеоморфизм $\bar{h}_{\frac{\nu}{\mu}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой
$$\bar{h}_{\frac{\nu}{\mu}}(x_1,x_2) = \left(x_1 + \frac{\nu}{\mu}x_2, x_2\right).$$

[1]Для точных определений всех упомянутых объектов см., например, [1].

Положим
$$\bar F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}} = \bar h_{\frac{\nu}{\mu}} \circ \bar F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{0}{1}} \circ \bar h^{-1}_{\frac{\nu}{\mu}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$
Непосредственно проверяется, что диффеоморфизм $\bar F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}}$ обладает свойством
$$\bar F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}}(x_1+1, x_2+1) = \bar F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}}(x_1, x_2) + (1,1) \tag{3.1}$$
и, следовательно, проектируется посредством накрытия
$$\pi(x_1, x_2) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2,$$
в диффеоморфизм тора
$$F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}} = \pi \bar F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}} \pi^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2.$$
Построенный диффеоморфизм имеет четыре периодических орбиты периода $m = \frac{m_1 m_2}{\mu}$, одну стоковую, одну источниковую и две седловых (см. Рис. 1). Кроме того, диффеоморфизм $F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}}$ изотопен тождественному, поскольку $F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}}(\nu,\mu) = (\nu,\mu)$ и $F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}}(0,1) = (0,1)$.

Напомним, что *алгебраическим автоморфизмом* $\widehat{L} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм, определенный матрицей $L = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, принадлежащей множеству $GL(2,\mathbb{Z})$ *унимодулярных целочисленных матриц* — матриц с определителем ± 1. То есть
$$\widehat{L}(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \pmod 1.$$
Пусть $J = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$ — целочисленная матрица с определителем $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда существует единственная целочисленная матрица $S_J = \begin{pmatrix} \nu_1 & \gamma \\ \mu_1 & \delta \end{pmatrix}$ с единичным определителем и число $\nu \in [0,\mu)$ такие, что $(\nu,\mu)\begin{pmatrix} \nu_1 & \gamma \\ \mu_1 & \delta \end{pmatrix} = (\nu_2, \mu_2)$ (см., например, [8]). Положим
$$F_J = \widehat{S_J} F_{\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{\nu}{\mu}} \widehat{S_J}^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2.$$
Будем называть диффеоморфизм F_J *косым произведением грубых преобразований окружности* $\phi_{\frac{k_1}{m_1}}$, $\phi_{\frac{k_2}{m_2}}$ (см. Рис. 1).

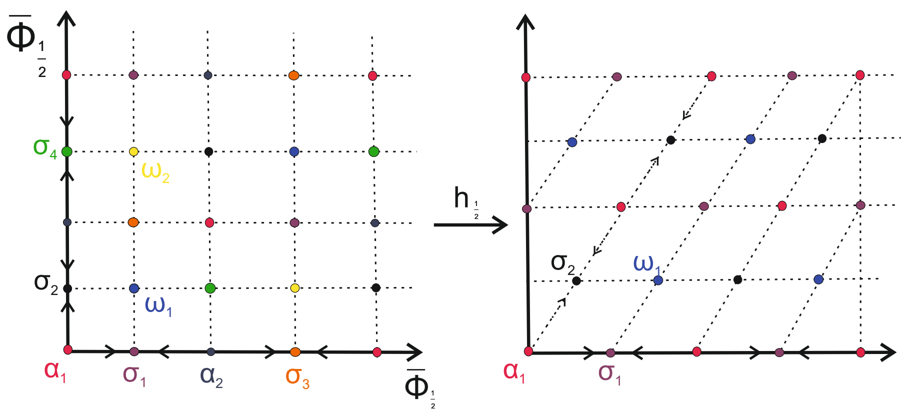

Рис. 1. Косое произведение диффеоморфизмов $\phi_{\frac12}, \phi_{\frac12}$.

4. Связное характеристическое пространство диффеоморфизма $f \in G$

Рассмотрим сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм f, заданный на гладкой ориентируемой замкнутой поверхности M^2.

Обозначим через Ω^0_f, Ω^1_f, Ω^2_f множество стоков, седел и источников диффеоморфизма f. Для любого (возможно пустого) f-инвариантного множества $\Sigma \subset \Omega^1_f$ положим

$$A_\Sigma = \Omega^0_f \cup W^u_\Sigma, \quad R_\Sigma = \Omega^2_f \cup W^s_{\Omega^1_f \setminus \Sigma}.$$

Из работы [9] следует, что A_Σ и R_Σ — аттрактор и репеллер диффеоморфизма f, которые называются *дуальными.* Множество

$$V_\Sigma = M^2 \setminus (A_\Sigma \cup R_\Sigma)$$

называется *характеристическим пространством.* Обозначим через $\hat{V}_\Sigma$ пространство орбит действия группы $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$ на характеристическом пространстве V_Σ и через $p_\Sigma : V_\Sigma \to \hat{V}_\Sigma$ естественную проекцию. Согласно работе [10], каждая компонента связности многообразия $\hat{V}_\Sigma$ гомеоморфна двумерному тору.

Утверждение 4.1 ([11], Теорема 1.1)**.** *Для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ существует такое множество Σ, что пространство орбит $\hat{V}_\Sigma$ связно.*

Для любого диффеоморфизма f и множества Σ, удовлетворяющего условиям утверждения 4.1, положим

$$A_f = A_\Sigma, \quad R_f = R_\Sigma, \quad V_f = V_\Sigma, \quad \hat{V}_f = \hat{V}_\Sigma, \quad p_f = p_\Sigma.$$

Тогда (см., например, [4, Proposition 2.1]) множество $\hat{V}_f$ связно и гомеоморфно тору, тогда как множество V_f не связно в общем случае, обозначим через m число компонент связности множества V_f. Тогда множество V_f гомеоморфно $(\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_m$ и ограничение диффеоморфизма f на V_f топологически сопряжено, посредством некоторого гомеоморфизма $h_f : V_f \to (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_m$ периодическому сжатию $a_m : (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_m \to (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_m$, заданному формулой

$$a_m(x, y, i) = \begin{cases} (x, y, i+1), & i = 0, \dots, m-2, \\ \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right), & i = m-1. \end{cases}$$

Для $i \in \{0, \dots, m-1\}$ положим

$$W_i = h_f^{-1}((\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \{i\}), \quad c_i = h_f^{-1}(\mathbb{S}^1 \times \{i\}),$$
$$W_i^+ = h_f^{-1}((\mathbb{D}^2 \setminus O) \times \{i\}), \quad W_i^- = \mathrm{cl}(W_i \setminus W_i^+),$$
$$W^\pm = W_0^\pm \cup \dots \cup W^\pm_{m-1}, \quad c = c_0 \cup \dots \cup c_{m-1}.$$

Тогда $U = W^+ \cup A_f$, $V = W^- \cup R_f$ — захватывающие окрестности аттрактора A_f и репеллера R_f, соответственно, то есть

$$f(U) \subset U, \quad A_f = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^j(U); \quad f^{-1}(V) \subset V, \quad R_f = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(V).$$

Лемма 4.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ (с точностью до рассмотрения диффеоморфизма f^{-1}) верно следующее:*

1. *множество U состоит из $m \in \mathbb{N}$ попарно не пересекающихся дисков D, $f(D)$, ..., $f^{m-1}(D)$ таких, что $f^m(\mathrm{cl}\, D) \subset \mathrm{int}\, D$;*
2. *аттрактор A_f состоит из m компонент связности A, $f(A)$, ..., $f^{m-1}(A)$ таких, что $A = \bigcap\limits_{j \in \mathbb{N}} f^{jm}(D)$ и $f^m(A) = A$;*
3. *репеллер R_f является связным.*

Доказательство. По построению кривые множества c делят несущую поверхность $\mathbb{T}^2$ на две непустые части U, V, границей которых эти кривые являются. Поскольку диффеоморфизм f изотопен тождественному отображению, то все кривые множества c попарно гомотопны. Предположим, что эти кривые не являются тривиальными, тогда $\mathbb{T}^2 \setminus c$ состоит из m колец. При этом, $m \geqslant 2$, поскольку каждая кривая в c примыкает к двум не пересекающимся множествам U, V. Пусть U_0 — одно из колец, ограниченное кривыми c_0, $f^l(c_0)$, $(l,m) = 1$. Поскольку $f^m(U_0) \subset U_0$, то $f^m(c_0)$, $f^{m+l}(c_0) \subset U_0$, что противоречит тому, что диффеоморфизм f изотопен тождественному отображению.

Таким образом, каждая кривая c_i множества c ограничивает диск d_i, положим $D = d_0$. Для определенности будем считать, что диск D является компонентой связности множества U (в противном случае, это выполняется для диффеоморфизма f^{-1}). Поскольку ограничение диффеоморфизма f^m на $D \cap V_f$ сопряжено с линейным сжатием, то $f^m(\mathrm{cl}\, D) \subset \mathrm{int}\, D$. Таким образом, множество $A = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} f^{jm}(D)$ является связным. Поскольку $A_f = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} f^{jm}(U)$, то A является компонентой связности аттрактора A_f и $D = (D \cap V_f) \cup A$. Рассмотрим далее отдельно два случая: (1) $m = 1$, (2) $m > 1$.

(1) Если $m = 1$, то $A_f = A$, $R_f = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} f^{-j}(\mathbb{T}^2 \setminus D)$ являются связными аттрактором и репеллером и лемма доказана.

(2) Если $m > 1$, то $f(c) \cap (D \cap V_f) = \emptyset$ в силу сопряжения периодическому сжатию, и $f(c) \cap A = \emptyset$, поскольку $f(c) \subset V_f$. Таким образом, $f(D) \cap D = \emptyset$ поскольку $f(c) \cap D = \emptyset$. Следовательно, в диске $f(D)$ лежит компонента связности $f(A)$ аттрактора A_f, не пересекающаяся с A (см. Рис. 2). Рассуждая аналогично, получим m различных компонент связности $A, f(A), \dots, f^{m-1}(A)$ аттрактора A_f, это означает, что аттрактор A_f состоит из одной орбиты периода m.

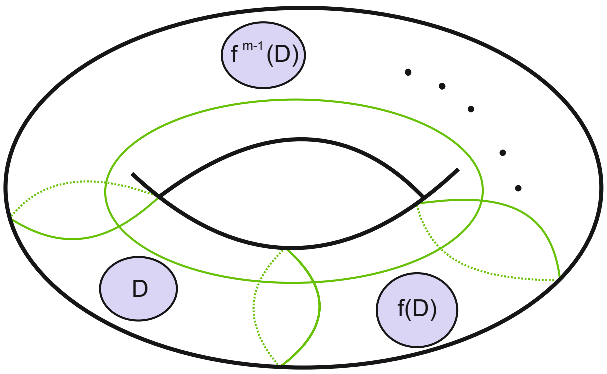

Рис. 2. Иллюстрация к доказательству леммы 4.1.

Таким образом, множество U является объединением попарно не пересекающихся дисков D, $f(D)$, $\dots$, $f^{m-1}(D)$. Откуда следует, что множество $V = \mathbb{T}^2 \setminus U$ связно, что влечет за собой связность репеллера R_f. $\square$

5. Построение устойчивой дуги от диффеоморфизма $f \in G$ к диффеоморфизму $F_f \in GM$

5.1. Тривиализация аттрактора A_f. В настоящем разделе мы докажем следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $g \in G$, который имеет единственную стоковую орбиту.*

Доказательство. Пусть A_f — аттрактор диффеоморфизма f, удовлетворяющий условиям леммы 4.1. Положим $\tilde{f} = f^m$. Тогда $\tilde{f}(D) \subset \operatorname{int} D$ и, следовательно, диффеоморфизм $\tilde{f}$ продолжается до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\tilde{f} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ такого, что $\Omega_{\tilde{f}}|_{\mathbb{S}^2 \setminus D} = \alpha$, где α — источник (см. Рис. 3).

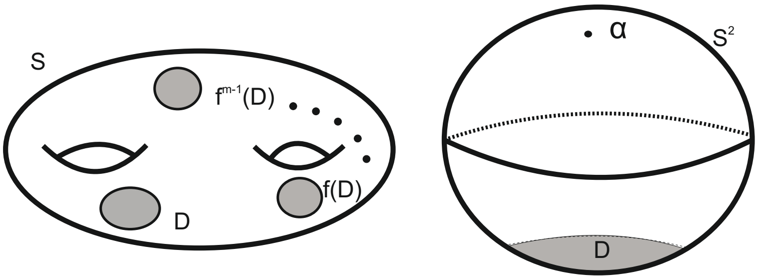

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству леммы 5.1.

Таким образом, $\tilde{f}$ градиентно-подобный диффеоморфизм на сфере, имеющий единственный источник в своем неблуждающем множестве. Согласно [2, Theorem 1.1] существует устойчивая дуга $\tilde{f}_t$ такая, что $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$, $\tilde{f}_1$ — диффеоморфизм источник-сток и $\tilde{f}_t|_{\mathbb{S}^2 \setminus D} = \tilde{f}|_{\mathbb{S}^2 \setminus D}$. Тогда искомая дуга f_t совпадает с диффеоморфизмом f вне $f^{m-1}(D)$ и определяется формулой $f_t(f^{m-1}(d)) = \tilde{f}_t(d)$ для $d \in D$. □

5.2. Тривиализация репеллера R_f. В силу леммы 5.1, не уменьшая общности можно считать, что диффеоморфизм f имеет одну стоковую орбиту $\mathcal{O}_\omega$ периода m. В настоящем разделе мы докажем следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $g \in G$, который имеет единственную источниковую орбиту.*

Доказательство. Пусть $V_\omega = W^s_{\mathcal{O}_\omega} \setminus \mathcal{O}_\omega$. Обозначим через $\hat{V}_\omega = V_\omega / f$ пространство орбит действия группы $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$ на V_ω, а через $p_\omega : V_\omega \to \hat{V}_\omega$ естественную проекцию. В силу [4, Proposition 2.5, p. 35] пространство $\hat{V}_\omega$ диффеоморфно двумерному тору, естественная проекция $p_\omega : V_\omega \to \hat{V}_\omega$ является накрытием. Тогда в силу [4] неустойчивые сепаратрисы седловых точек диффеоморфизма f проектируются в узлы на торе $\hat{V}_\omega$. В силу следствия 2.1 множество $\hat{W}^u_\sigma = p_\omega(W^u_\sigma \setminus \sigma)$, $\sigma \in \Omega^1_f$ состоит из пары существенных узлов. Тогда, в силу [8], множество $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}^u_\sigma$ состоит из двух колец. Обозначим через $Q_f \subset \Omega^1_f$ множество таких седловых точек σ, для которых хотя бы одна из компонент связности (обозначим ее K_σ) не пересекается с множеством $p_\omega(W^u_{\Omega^1_f} \setminus \Omega^1_f)$ (см. Рис. 4).

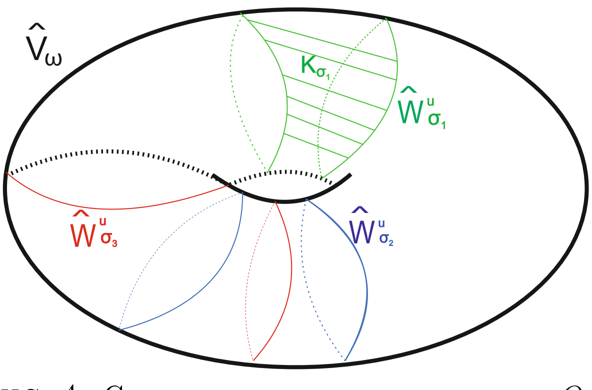

Рис. 4. Седло σ принадлежит множеству Q_f.

Покажем, что диффеоморфизм f соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $f_1 \in G$, имеющим единственную стоковую орбиту $\mathcal{O}_\omega$ и для которого множество Q_{f_1} пусто.

Пусть точка σ лежит в множестве Q_f. Рассмотрим аттрактор $A_\sigma = \mathcal{O}_\omega \cup W^s_{\mathcal{O}_\sigma}$. Положим $\hat{V}_\sigma = (W^s_{\omega \cup \mathcal{O}_\sigma} \setminus A_\sigma)/f$. Тогда $\hat{V}_\sigma$ диффеоморфно двум двумерным торам, причем один из них содержит единственный узел, который является проекцией устойчивой сепаратрисы γ^s_σ седла σ. Согласно [2] диффеоморфизм f соединяется устойчивой дугой с одной седло-узловой бифуркацией с диффеоморфизмом g, у которого в множестве Q_g на одну седловую орбиту меньше, чем в множестве Q_f. Продолжая процесс, мы получим искомый диффеоморфизм f_1.

Поскольку f_1 — градиентно-подобный диффеоморфизм 2-тора, то множество $\Omega^1_{f_1}$ содержит хотя бы две седловые периодические орбиты. Покажем, что можно выбрать седла $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega^1_{f_1}$ так, что $\hat{W}^u_{\sigma_2}$ пересекается с обеими компонентами связности $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}^u_{\sigma_1}$. Проведем доказательство от противного.

Выберем произвольное седло $\sigma_0 \in \Omega^1_{f_1}$. Пусть K_0 — компонента связности множества $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}^u_{\sigma_0}$. Поскольку множество Q_{f_1} пусто, то кольцо K_0 содержит проекции неустойчивых многообразий орбит седловых точек. Для любого такого седа σ обозначим через κ_σ компоненту связности множества $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}^u_\sigma$, приндлежащую K_0 (см. Рис. 5).

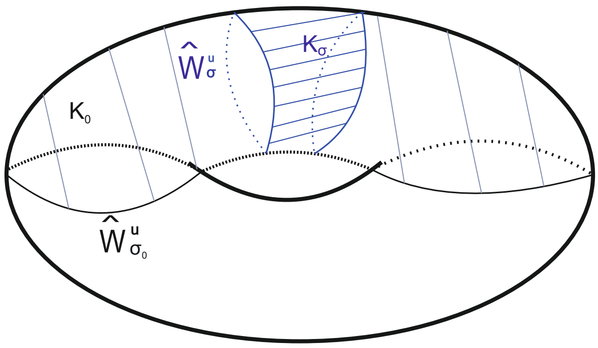

Рис. 5. Кольцо K_0.

В рамках предположения, любые два таких кольца κ_σ, $\kappa_{\sigma'}$ либо не пересекаются, либо одно является собственным подмножеством другого. Ввиду конечности седловых орбит мы найдем седло σ_*, для которого кольцо κ_{σ_*} не содержит других колец κ_σ, что противеречит пустоте множества Q_{f_1}.

Выберем седла $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega^1_{f_1}$ так, что $\hat{W}^u_{\sigma_2}$ пересекается с обеими компонентами связности $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}^u_{\sigma_1}$. Тогда $\mathrm{cl}(W^u_{\sigma_i}) \setminus W^u_{\sigma_i} = \omega \cup f_1^{l_i}(\omega)$, $l_i \leqslant m$. Пусть $M_i = HOK(l_i, m)$ и $m_i = \frac{M_i}{l_i}$. Тогда множество

$$C_i = \bigcup_{i=0}^{m_i-1} f_1^{jk_1}(\mathrm{cl}(W^u_{\sigma_i}))$$

гомеоморфно окружности и является f^{l_i}-инвариантным. Поскольку отображение f^{l_i} индуцирует тождественное отображение в фундаментальной группе тора, то $f^{l_i}|_{C_i}$ сохраняет ориентацию и, следовательно, диффеоморфизм $f^{l_i}|_{C_i}$ топологически сопряжен грубому преобразованию окружности $\phi_{\frac{k_i}{m_i}}$, $k_i l_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Тогда каждая точка в пересечении $C_1 \cap C_2$ имеет один и тот же индекс[1], откуда следует, что узлы C_1, C_2 существенны на торе $\mathbb{T}^2$ (см. Рис. 6).

[1] *Индексом* точки x трансверсального пересечения ориентированных узлов C_1, C_2 на ориентированной поверхности называется число $+1$, если упорядоченная пара векторов, касательных к узлам, задает выбранную ориентацию поверхности, и -1 в противном случае. Сумма индексов всех точек пересечения равна определителю матрицы, составленной из гомотопических типов узлов.

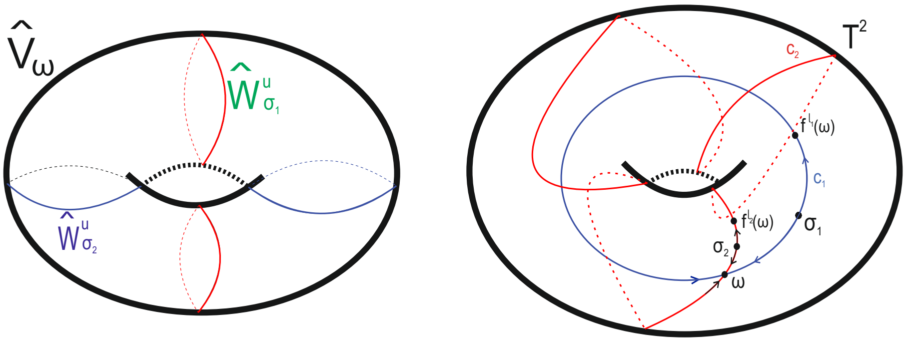

Рис. 6. Седла σ_1, σ_2.

Обозначим через μ индекс пересечения этих узлов. Тогда $m = \frac{m_1 m_2}{\mu}$. Положим

$$C = \bigcup_{j=0}^{m_2-1} f^{l_2 j}(C_1) \cup \bigcup_{j=0}^{m_1-1} f^{l_1 j}(C_2).$$

Тогда каждая компонента связности Δ множества $Q = \mathbb{T}^2 \setminus C$ (см. Рис. 7) является открытым двумерным диском (см., например, [12]) таким, что

$$Q = \bigsqcup_{j=0}^{m-1} f^j(\Delta).$$

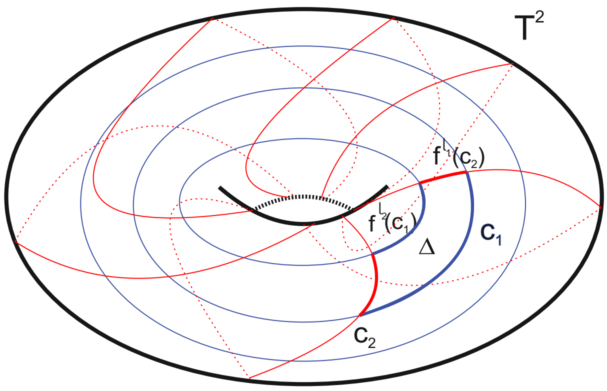

Рис. 7. Множество Δ.

Согласно [9] множество $C = \mathrm{cl}(W^u_{\Omega^1_{f_1}})$ является аттрактором диффеоморфизма f_1. Более того, существует его захватывающая окрестность U_C такая, что множество $D_C = \Delta \setminus \mathrm{int}(U_C)$ гомеоморфно двумерному диску такому, что $f^{-m}(D_C) \subset \mathrm{int}\, D_C$. Аналогично лемме 5.1, доказывается, что диффеоморфизм f_1 соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $g \in G$, имеющим единственную источниковую орбиту в $\mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{int}(U_C)$. □

На рисунке 8 схематично изображены шаги доказательства теоремы 2.1 на примере диффеоморфизма $\phi_{\frac{1}{2}} \times \phi_{\frac{1}{2}}$.

5.3. Выпрямление кривых C_1, C_2**.** В силу результатов двух предыдущих разделов, не уменьшая общности можно считать, что диффеоморфизм f имеет одну стоковую орбиту $\mathcal{O}_\omega$ и одну источниковую орбиту $\mathcal{O}_\alpha$, то есть является полярным, как и косое произведение грубых преобразований окружности. Кроме того, замыкания неустойчивых многообразий седловых точек диффеоморфизма f содержат узлы C_1, C_2 такие, что $f^{l_i}(C_i) = C_i$ и $f^{l_i}|_{C_i}$ —

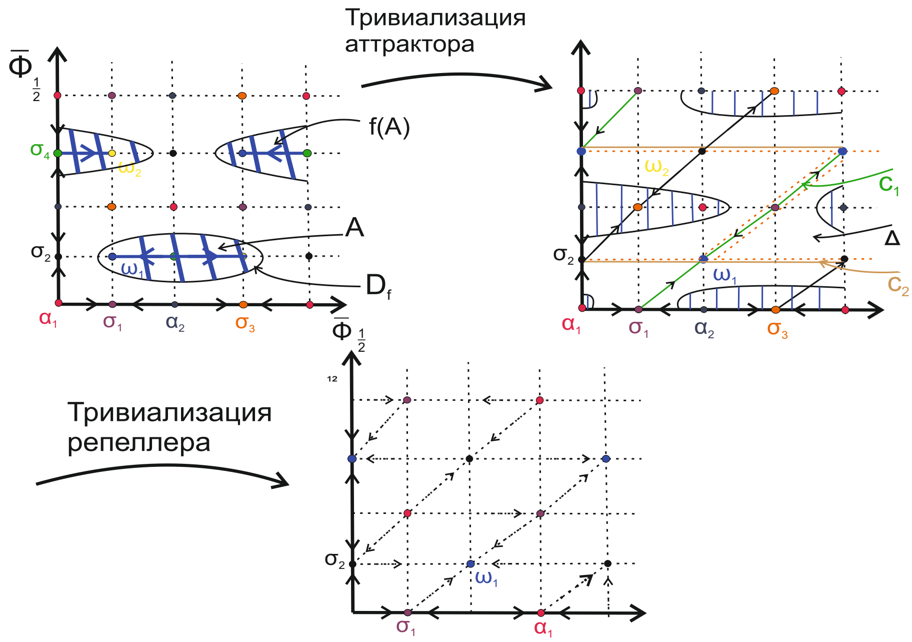

Рис. 8. Иллюстрация к доказательству теоремы 2.1.

грубое преобразование окружности с числом вращения $\frac{k_i}{m_i}$. Не уменьшая общности будем считать, что $\frac{k_1}{m_1} \leqslant \frac{k_2}{m_2}$ для диффеоморфизма f (в противном случае изменим нумерацию кривых C_1, C_2). Обозначим через (ν_i, μ_i) гомотопический класс кривой C_i, положим $J = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$. Тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен диффеоморфизму F_J (см., например, [13, Теорема 1]) посредством гомотопного тождественному гомеоморфизма. Аналогично [14, Lemma 5.1] доказывается, что существует дуга без бифуркаций, соединяющая диффеоморфизм f с диффеоморфизмом F_J.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T.V. Medvedev, E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka. *Components of Stable Isotopy Connectedness of Morse-Smale Diffeomorphisms* // Regul. Chaot. Dyn. **27**:1 (2022), 77–97.
2. E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka. *On the solution of the 33rd Palis–Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a 2-sphere* // Discrete Contin. Dyn. Syst. **41**:3 (2021), 1101–1131.
3. B. von Kerekjarto. *Uber die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelflache* // Math. Ann. **80**:1 (1919), 36–38.
4. V.Z. Grines, T.V. Medvedev, O.V. Pochinka. *Dynamical systems on 2-and 3-manifolds.* Cham: Springer. **46**. 2016.
5. D.A. Baranov, V.Z. Grines, O.V. Pochinka, E.E. Chilina. *On a Classification of Periodic Maps on the 2-Torus* // Rus. J. Nonlin. Dyn. **19**:1 (2023), 91–110.
6. J. Nielsen. *Die Struktur periodischer Transformationen von Flachen.* Kobenhavn: Levin & Munksgaard. 1937.
7. Sh. Newhouse, J. Palis, F. Takens. *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms* // Publications Mathématiques de l'IHÉS. **57** (1983), 5–71.
8. D. Rolfsen. *Knots and links.* Providence: American Mathematical Soc. **346**. 2003.
9. V.Z. Grines, E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, O.V. Pochinka. *Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms* // Proc. Steklov Inst. Math. **271** (2010), 103–124.
10. D. Pixton. *Wild unstable manifolds* // Topology. **16**:2 (1977), 167–172.
11. Е.В. Ноздринова. *Существование связного характеристического пространства у градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей* // Журнал Средневолжского математического общества. **19**:2 (2017), 91–97.

12. Ч. Коснёвски. *Начальный курс алгебраической топологии* // М.: Мир. 1983.
13. В.З. Гринес, С.Х. Капкаева, О.В. Починка. *Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей* // Матем. сб. **205**:10 (2014), 19–46.
14. E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka. *Stable Arcs Connecting Polar Cascades on a Torus* // Rus. J. Nonlin. Dyn. **17**:1 (2021), 23–37.

Денис Алексеевич Баранов,
НИУ ВШЭ НН,
ул.Большая Печерская, 25/12,
603150, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: `denbaranov0066@gmail.com`

Елена Вячеславовна Ноздринова,
НИУ ВШЭ НН,
ул.Большая Печерская, 25/12,
603150, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: `maati@mail.ru`

Ольга Витальевна Починка,
НИУ ВШЭ НН,
ул.Большая Печерская, 25/12,
603150, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`