ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 4 (2023). С. 75-98.

УДК 519.642.4

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИССИПАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Д.Ю. ИВАНОВ

Аннотация. В рамках коллокационного метода граничных элементов предлагается полуаналитическая аппроксимация потенциала двойного слоя, обеспечивающая равномерную кубическую сходимость приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерной ограниченной области или ее внешности с границей класса C^5. Для вычисления интегралов на граничных элементах используется точное интегрирование по переменной $\rho := (r^2 - d^2)^{1/2}$, где r и d — расстояния от наблюдаемой точки до точки интегрирования и до границы области соответственно. При некоторых упрощениях доказано, что использование ряда традиционных квадратурных формул приводит к нарушению равномерной сходимости аппроксимаций потенциала вблизи границы области. Теоретические выводы подтверждены результатами численного решения задачи в круговой области.

Ключевые слова: квадратурная формула, потенциал двойного слоя, задача Дирихле, уравнение Гельмгольца, граничное интегральное уравнение, почти сингулярный интеграл, эффект пограничного слоя, равномерная сходимость.

Mathematics Subject Classification: 31-08, 31A10

1. Введение

Метод граничных элементов (МГЭ) [1, п. 2.5] является одним из основных методов приближенного решения задач математической физики наряду с методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР). В отличие от МКЭ и МКР, для реализации МГЭ требуется дискретизация только границы области. Решение задачи в открытой области Ω ищется в виде потенциала $u(x)$, выраженного с помощью интегрального оператора через функцию плотности $v(x')$, определенную на границе $\partial\Omega$ и являющуюся решением граничного интегрального уравнения (ГИУ). Интегралы в ГИУ имеют вид потенциалов и их производных, вычисляемых на границе $\partial\Omega$. Для аппроксимации потенциалов и их производных в двумерном случае граница $\partial\Omega$ разбивается на дуги Γ_i — так называемые граничные элементы (ГЭ), на каждом из которых осуществляется полиномиальная интерполяция функции $v(x')$. После этого возникает проблема вычисления интегралов на ГЭ.

Так как ядра интегральных операторов имеют особенность при $x = x'$, ГЭ Γ_i принято разделять на три типа [2]:

1) сингулярные ГЭ (СГЭ), если $x \in \Gamma_i$;

2) несингулярные ГЭ (НСГЭ), если точка x находится достаточно далеко от Γ_i;

3) почти сингулярные ГЭ (ПСГЭ), если $x \in \Omega$, расстояние от точки x до Γ_i мало по сравнению с размером Γ_i и $x_0 \in \Gamma_i$, где x_0 — проекция точки x на границу $\partial\Omega$.

D.Y. Ivanov, On uniform convergence of semi-analytic solution of Dirichlet problem for dissipative Helmholtz equation in vicinity of boundary of two-dimensional domain.

Поступила 15 сентября 2022 г.

Интегралы на НСГЭ с хорошей точностью могут быть вычислены с помощью простых квадратурных формул Гаусса (ПКФГ) [1, п. 2.6]. Подынтегральные функции на СГЭ, как правило, имеют бесконечный разрыв при $x' = x$; на ПСГЭ при $x' = x_0$ они непрерывны, но неограниченно увеличиваются при $x \to x_0$. Поэтому интегралы на СГЭ и ПСГЭ не могут быть удовлетворительно вычислены с помощью ПКФГ, и для их вычисления применяются специальные методы, например, полуаналитические [3]–[11], один из которых исследуется в настоящей работе, а также методы адаптивного деления СГЭ и ПСГЭ [12], [13] и методы нелинейного преобразования переменной интегрирования: экспоненциального преобразования [14], sinh-преобразования [15], преобразования функции расстояния [2].

Невозможность удовлетворительно вычислить интегралы на ПСГЭ с помощью ПКФГ называется эффектом пограничного слоя [15]. Необходимость вычислять интегралы на ПСГЭ возникает при решении задач в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, пленках, на концах трещин [5], [8], [12]. В этих случаях МКЭ и МКР оказываются неэффективны, так как для их реализации требуется избыточная дискретизация пограничного слоя, и проявляется преимущество МГЭ, не требующего дискретизации области. Кроме того, в таких задачах большое значение имеет высокоточная аппроксимация границы $\partial\Omega$. Поэтому линейная аппроксимация СГЭ и ПСГЭ, применяемая в работах [2]–[4], [9]–[11], считается неудовлетворительной [6], [14], и специальные методы были реализованы в случае квадратичной аппроксимации СГЭ и ПСГЭ [4]–[7]. Однако в последнее время отмечается необходимость еще более точной аппроксимации границы, в частности, с помощью сплайнов, и в рамках такой аппроксимации были реализованы метод адаптивного деления ПСГЭ [12] и методы нелинейного преобразования переменной интегрирования [14]. Эти методы легче адаптируются для более сложной геометрии ПСГЭ по сравнению с полуаналитическими, так как в конечном итоге интегралы на СГЭ и ПСГЭ в них вычисляются с помощью ПКФГ, и поэтому они могут быть реализованы для любой аналитически заданной границы $\partial\Omega$. Но у этих методов есть и недостатки: метод адаптивного деления ПСГЭ не обеспечивает точность или требует больших затрат машинного времени при очень малых расстояниях от точки x до границы $\partial\Omega$ [2], [5], а точность методов нелинейного преобразования переменной интегрирования существенно зависит от положения точки x_0 на ПСГЭ [13].

Граница аппроксимируется по двум причинам. Первая, неустранимая, заключается в том, что на практике известны координаты лишь конечного числа граничных точек, с помощью которых осуществляется интерполяция границы $\partial\Omega$. Вторая причина заключается в необходимости задания границы более простыми функциями для возможности реализации вычислительного алгоритма. Для осуществления методов адаптивного деления ПСГЭ и методов преобразования переменной интегрирования, как уже было отмечено, нет необходимости в задании границы более простыми функциями. Полуаналитические методы основаны на точном интегрировании, которое становится возможным, в частности, благодаря аппроксимации границы, причем уточнение аппроксимации сопряжено с существенным усложнением алгоритма. Заметим, что аппроксимацией границы можно также считать замену координатных функций и функции расстояния первыми членами разложения их в ряды Тейлора, образованные степенями шагов дискретизации криволинейных координат границы.

В связи с этим представляют интерес полуаналитические методы, предложенные в работах [4]–[6] для аппроксимации интегралов на СГЭ и ПСГЭ, возникающих при вычислении двумерного потенциала простого слоя (ППС) для уравнения Лапласа и его производных. В работах [5], [6] для аппроксимации интегралов на ПСГЭ применяется точное интегрирование по переменной $\rho := \left(r^2 - d^2\right)^{1/2}$, где d и r — расстояния от наблюдаемой точки x до ближайшей граничной точки x_0 и до граничной точки интегрирования x' соответственно. Для того чтобы точное интегрирование по ρ стало возможным, подынтегральная функция представляется в виде произведения двух функций, одна из которых при малых значениях d является быстро изменяющейся вблизи $\rho = 0$ и берется в качестве весовой, а другая является медленно изменяющейся и аппроксимируется с помощью полиномиальной интерполяции по переменной ρ. В более ранней работе [4] аналогичный метод предложен для вычисления интегралов на СГЭ, когда $\rho = r$. Хотя в работах [4]–[6] этот метод предложен для вычисления интегралов только на линейных и квадратичных СГЭ и ПСГЭ, на самом деле он может быть использован для любой достаточно гладкой аналитически заданной кривой $\partial\Omega$, так как интегралы по переменной ρ зависят от кривой $\partial\Omega$ только параметрически. Поскольку медленно изменяющаяся функция входит в виде множителя в числитель подынтегрального выражения, сложность интегралов при увеличении степени интерполянтов существенно не возрастает, и достаточно легко может быть повышен порядок аппроксимации. Недостатком данного метода является его реализация в настоящее время только для двумерной пространственной области.

В работах [4]–[6] нет строгого обоснования метода, а также не решен ряд теоретических вопросов, связанных с его применением для решения задач математической физики. Так, например, требуется выяснить условия, при которых возможны замена переменной и интерполяция. Также необходимо доказать равномерную сходимость вблизи границы области аппроксимаций потенциалов и их производных, решений ГИУ и краевых задач, полученных на основе такого метода. Эти вопросы рассматривались в работах автора [16]–[19]. Работы [16]–[18] посвящены применению метода к задачам теплопроводности: в работе [16] доказана равномерная сходимость приближенных решений ГИУ, в работе [17] — равномерная сходимость аппроксимаций ППС и решений задач Неймана и Робина, в работе [18] — равномерная сходимость аппроксимаций потенциала двойного слоя (ПДС) и решений задачи Дирихле. В работе [19] доказана равномерная сходимость аппроксимаций ПДС для уравнения Лапласа.

Здесь исследуются аппроксимации ПДС, приближенные решения ГИУ и задачи Дирихле для диссипативного уравнения Гельмгольца на основе таких аппроксимаций, а также вопросы, связанные с непрерывностью аппроксимаций ПДС, которые не были отражены в работах [18], [19]. В четвертом параграфе доказана равномерная и устойчивая кубическая сходимость аппроксимаций ПДС вблизи границы области класса C^5. Для построения аппроксимаций используется полученное во втором параграфе представление подынтегральной функции в виде суммы функций с более слабыми особенностями (см. формулу (2.6)). Заметим, что в работах [5], [6] подобная возможность не была использована. Аналогичные представления в виде сумм использовались в работах автора [18], [19]. Точное интегрирование по ρ осуществляется не именно на СГЭ и ПСГЭ, как в работах [4]–[6], а в некоторой фиксированной по ширине области, включающей точку x_0. На остальной части кривой $\partial\Omega$ интегралы на ГЭ вычисляются с помощью ПКФГ. Кубическая скорость сходимости обусловлена применением кусочно-квадратичных интерполяций (ККИ). Доказано, что такие полуаналитические аппроксимации ПДС обладают свойством, которое аналогично свойству точного ПДС: при переходе границы $\partial\Omega$ они терпят разрыв первого рода, величина которого пропорциональна значениям ККИ функции плотности $v(x')$.

В пятом параграфе доказана равномерная и устойчивая кубическая сходимость полуаналитических аппроксимаций решения ГИУ и полуаналитических аппроксимаций решения задачи Дирихле. Для этого в третьем параграфе решена вспомогательная задача: получены достаточные условия для устойчивой разрешимости ГИУ в пространствах дифференцируемых функций. В пятом параграфе также доказано, что полуаналитические аппроксимации решения задачи Дирихле по аналогии с точным решением имеют конечный разрыв на границе $\partial\Omega$, величина которого пропорциональна значениям приближенного решения ГИУ.

В шестом параграфе доказано, что если вместо точного интегрирования по переменной ρ использовать ПКФГ, то отсутствует равномерная сходимость аппроксимаций ПДС вблизи любой граничной точки, вследствие чего происходит резкое снижение точности вблизи границы области. Так как отсутствие равномерной сходимости вблизи узлов ПКФГ достаточно часто упоминается в литературе (см., например, [10], [11]), то здесь рассматриваются специальные аппроксимации, где точка x_0 ни при каких обстоятельствах не совпадает с каким-либо узлом ПКФГ. В этом случае аппроксимации всегда непрерывны при переходе через границу и не обладают равномерной сходимостью именно поэтому, так как сам ПДС при переходе через границу имеет конечный разрыв. Отметим, что в работах автора [18], [19] отсутствие равномерной сходимости аппроксимаций ПДС на основе ПКФГ было доказано при некоторых упрощающих обстоятельствах с помощью оценки остаточного члена ПКФГ.

В седьмом, заключительном параграфе приведены результаты численного решения задачи Дирихле в единичном круге при $k = \pi$, которые подтверждают, что применение точного интегрирования по ρ обеспечивает равномерную сходимость, близкую к кубической, в то время как использование вместо этого ПКФГ приводит к серьезному нарушению точности вблизи границы $\partial\Omega$.

2. Предварительные замечания

Пусть Ω_+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$, $\Omega_- := \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega_+}$. В декартовых координатах (x_1, x_2) зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{x}(s) := (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, и увеличивается, когда область Ω_+ при обходе контура $\partial\Omega$ остается слева. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S := [-S, S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0,n}$, $i = 1,2$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$. Будем считать, что граница $\partial\Omega$ принадлежит классу гладкости C^2, если не оговорено особо.

Обозначим через $\vec{e}(s)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$ в сторону увеличения параметра s, а через $\vec{n}(s)$ — единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\tilde{x}(s)$ и направленную внутрь области Ω_+. Векторы $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$ образуют правую систему, и их координаты (x_1, x_2) вычисляются с помощью формул: $\vec{e}(s) = (\tilde{x}_1'(s), \tilde{x}_2'(s))$, $\vec{n}(s) = (-\tilde{x}_2'(s), \tilde{x}_1'(s))$ [21, п. 133].

Через $C(\partial\Omega)$ обозначим банахово пространство периодических с периодом $2S$ и непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ комплексных функций $f(s)$ с нормой $\|f\|_{C(\partial\Omega)} = \sup\limits_{s\in\overline{I_S}} |f(s)|$. Через $C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные производные $f^{(l)}(s)$ ($s \in \mathbb{R}$, $l = \overline{1,n}$), с нормой $\|f\|_{C^n(\partial\Omega)} = \sum\limits_{l=0}^{n} \left\|f^{(l)}\right\|_{C(\partial\Omega)}$ ($C^0(\partial\Omega) = C(\partial\Omega)$) [20, гл. IV, п.2, подп. 23]. Можно считать, что функция $f \in C^n(\partial\Omega)$ задана, если она задана на некотором множестве I_S и может быть продолжена на замкнутое множество $\overline{I_S}$ так, что имеет на множестве $\overline{I_S}$ непрерывные производные $f^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0,n}$) и при этом выполняются равенства $f^{(l)}(-S+0) = f^{(l)}(S-0)$.

Введем в рассмотрение внутренние и внешние задачи Дирихле:

$$\nabla^2 u_\pm = k^2 u_\pm \quad (x := (x_1, x_2) \in \Omega_\pm,\ \nabla := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})), \quad u_\pm(\tilde{x}(s)) = w(s), \tag{2.1}$$

где $u_\pm(x)$ и $w(s)$ — комплексные функции, заданные на множествах $\overline{\Omega_\pm}$ и I_S соответственно. Будем полагать, что $\operatorname{Re} k > 0$. Тогда известно [22, гл. 3], что при условии $w \in C(\partial\Omega)$ задача (2.1) имеет единственное решение $u_\pm \in C(\overline{\Omega_\pm}) \cap C^2(\Omega_\pm)$, для которого в случае внешней задачи должно выполняться условие Зоммерфельда: $u_- = o(|x|^{-1/2})$, $|\nabla u_-| = o(|x|^{-1/2})$ при $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$ равномерно по всем направлениям $x/|x|$. Решение задачи (2.1) при $x \in \Omega_\pm$ может быть получено в виде ПДС: $u_\pm(x) = G(x)v_\pm$, где

$$G(x)f := \int_{I_S} g(x,s')f(s')\,ds' \ (f \in C(\partial\Omega),\ x \in \Omega_\pm), \tag{2.2}$$

$$g(x,s') := -a_0(r^2)b, \quad a_0(r^2) := r^2 a(r^2), \quad a(r^2) := (2\pi r)^{-1}\partial_r K_0(kr), \quad b(x,s') := \partial_{\vec{n}(s')} \ln r^{-1},$$

$r(x,s') = |\vec{r}|$, $\vec{r}(x,s') := \overrightarrow{x\,\tilde{x}(s')}$ (условимся, что мы можем иногда для краткости не писать аргументы функции, если они такие же, какие используются при определении функции); дифференцирование $\partial_{\vec{n}(s')}$ осуществляется по переменной $x' := \tilde{x}(s')$ в направлении $\vec{n}(s')$; $K_0(z)$ — функция Макдональда, допускающая представление:

$$K_0(z) = -\left[2^{-1}\ln(z^2/4) + C\right]\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-2}\left(z^2/4\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n!)^{-2}\left(z^2/4\right)^n \sum_{m=1}^{n} m^{-1} \tag{2.3}$$

(см. формулу (14) [23, п. 3.71]), где $\arg z \in (-\pi,\pi]$, $z \neq 0$; C — постоянная Эйлера. Функция плотности $v_\pm$ при любой граничной функции $w \in C(\partial\Omega)$ является единственным решением в классе $C(\partial\Omega)$ соответствующего ГИУ:

$$\mathbf{G}_\pm v_\pm = w, \tag{2.4}$$

где

$$\mathbf{G}_\pm := \pm 2^{-1} + \mathbf{G}, \quad (\mathbf{G}v_\pm)(s) := G(\tilde{x}(s))\,v_\pm \quad (s \in I_S).$$

Решение задачи (2.1) может быть записано с помощью формулы: $u_\pm(x) = R_\pm(x)w$ $(x \in \Omega_\pm)$, где $R_\pm(x) := G(x)\mathbf{G}_\pm^{-1}$ — резольвентные функционалы. Функция $a(r^2)$ в силу формулы (2.3) может быть записана в следующем виде:

$$a(r^2) = r^{-2}f_1(r^2) + \ln(r^2)f_2(r^2) + f_3(r^2), \tag{2.5}$$

где $f_i(z)$ $(i = \overline{1,3})$ — целые функции, причем $f_1(0) = -(2\pi)^{-1}$.

Рассмотрим функции, через которые выражается ПДС на границе $\partial\Omega$ и вблизи нее. Пусть $\vec{r}_0(s,s') := \overrightarrow{\tilde{x}(s)\,\tilde{x}(s')}$, $r_0(s,s') := |\vec{r}_0|$. На множестве

$$\Theta := \left\{(s,s') :\ s \in \overline{I_S}, s'-s \in \overline{I_S}\right\}$$

зададим функции $\psi_i(s,s')$ $(i = \overline{0,5})$: при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i := \varphi_i/(s'-s)^2$ $(i = \overline{0,2})$, $\psi_i := \varphi_i/(s'-s)$ $(i = \overline{3,5})$, где

$$\begin{aligned}
\varphi_0 :=& r_0^2 = \left[\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)\right]^2 + \left[\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)\right]^2,\\
\varphi_1 :=& 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s')}r_0^2 = -\tilde{x}_2'(s')\left[\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)\right] + \tilde{x}_1'(s')\left[\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)\right] = (\vec{n}(s'),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2},\\
\varphi_2 :=& 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s)}r_0^2 = -\tilde{x}_2'(s)\left[\tilde{x}_1(s) - \tilde{x}_1(s')\right] + \tilde{x}_1'(s)\left[\tilde{x}_2(s) - \tilde{x}_2(s')\right] = -(\vec{n}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2},\\
\varphi_3 :=& 2^{-1}\partial_{s'}r_0^2 = \tilde{x}_1'(s')\left[\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)\right] + \tilde{x}_2'(s')\left[\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)\right] = (\vec{e}(s'),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2},\\
\varphi_4 :=& 2^{-1}\partial_{s}r_0^2 = \tilde{x}_1'(s)\left[\tilde{x}_1(s) - \tilde{x}_1(s')\right] + \tilde{x}_2'(s)\left[\tilde{x}_2(s) - \tilde{x}_2(s')\right] = -(\vec{e}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2},\\
\varphi_5 :=& \partial_{s'}\varphi_2 = \tilde{x}_2'(s)\,\tilde{x}_1'(s') - \tilde{x}_1'(s)\,\tilde{x}_2'(s')
\end{aligned}$$

(здесь $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$), а при $s' = s$ равенствами

$$\psi_0 = \psi_3 = -\psi_4 := 1, \quad \psi_1 = \psi_2 = \psi_5 := 2^{-1}\left[\tilde{x}_2'(s)\,\tilde{x}_1''(s) - \tilde{x}_1'(s)\,\tilde{x}_2''(s)\right].$$

Также на множестве Θ зададим функции $\hat{b}(s,s') := b(\tilde{x}(s),s')$ и $\rho_0(s,s')$: $\rho_0 := r_0$, если $s' \geq s$; $\rho_0 := -r_0$, если $s' < s$.

Теорема 2.1 (см. [24, лемма]). *Пусть I — замкнутый интервал на вещественной оси. Предположим, что некоторая вещественная функция $f(z,\zeta)$ имеет на множестве $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j f$ $(i = \overline{0,m},\ j = \overline{0,m+q})$, причем $m \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{N}$ и $\partial_\zeta^j f|_{\zeta=z} = 0$ при $z \in I$, $j = \overline{0,q-1}$. Тогда функция $h(z,\zeta)$, заданная при $\zeta \neq z$ равенством $h(z,\zeta) := f/\,(\zeta - z)^q$, а при $\zeta = z$ равенством $h(z,z) := \partial_\zeta^q f|_{\zeta=z}\big/ q!$, имеет на множестве $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j h$ при $i = \overline{0,m-j}$, $j = \overline{0,m}$.*

Следствие 2.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда на множестве Θ существуют следующие непрерывные производные:*
(i) $\partial_s^k \partial_{s'}^l \psi_i$ $(k = \overline{0,n-l};\ l = \overline{0,n}$ при $i = 0,1,2,5;\ l = \overline{0,n+1}$ при $i = 3,4)$;
(ii) $\partial_s^k \partial_{s'}^l \hat{b}$, $\partial_s^{k+1} \partial_{s'}^l \rho_0$, $\partial_s^k \partial_{s'}^{l+1} \rho_0$ $(k = \overline{0,n-l},\ l = \overline{0,n})$.

Доказательство. Заметим, что имеет место вложение: $\Theta \subset \overline{I_{2S}} \times \overline{I_{2S}}$. Пусть $I = \overline{I_{2S}}$, $z = s$, $\zeta = s'$. Условия теоремы 2.1 выполняются в следующих случаях:
1) $f = \varphi_0$ или $f = \varphi_2$, $m = n$, $q = 2$;
2) $f = \varphi_4$, $m = n+1$, $q = 1$;
3) $f = \varphi_5$, $m = n$, $q = 1$. Кроме того, $\varphi_1(s,s') = \varphi_2(s',s)$, $\varphi_3(s,s') = \varphi_4(s',s)$.
Поэтому согласно теореме 2.1 выполняется пункт (i). Поскольку контур $\partial\Omega \in C^2$ не имеет точек самопересечения, то существует положительная постоянная $c_r := \inf\limits_{(s,s')\in\Theta} \psi_0$ $(c_r \leq 1)$. Так как $\hat{b} = -\psi_1 \psi_0^{-1}$, $\partial_{s'}\rho_0 = \psi_3 \psi_0^{-1/2}$, $\partial_s \rho_0 = \psi_4 \psi_0^{-1/2}$, то выполняется пункт (ii). Следствие 2.1 доказано. □

Справедлива оценка: $\vartheta \leq c_K\,|s'-s| \leq c'_K c_r^{-1/2} r_0$, где ϑ — острый угол между нормалями, проходящими через точки $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}(s')$; $c_K := \sup\limits_{s\in\overline{I_S}} K(s,s)$, $c'_K := \sup\limits_{(s,s')\in\Theta} K(s,s')$; $K(s,s') := |\partial_{s'}^2 \varphi_2|$, $K(s,s)$ — кривизна кривой в точке $\tilde{x}(s)$. Поэтому величина $3D$, где $D := c_r^{1/2}\,(3c'_K)^{-1}$, может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова (см. условия (3), (5) [25, п. 94]). Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s,η_s) с началами в точках $\tilde{x}(s)$ и осями ординат, направленными по нормали внутрь области Ω_+. Точки $\tilde{x}_d(s)$ $(s \in I_S)$ с местными координатами $(\xi_s,\eta_s) = (0,d)$ при фиксированном $d \in I_D := [-D,0) \cup (0,D]$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, при этом соответствие между точками $\tilde{x}_d(s)$ и $\tilde{x}(s)$ взаимно однозначное $(\tilde{x}_0(s) := \tilde{x}(s))$, а нормали $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)$ к кривой $\partial\Omega$ являются и нормалями к кривой $\partial\Omega_d$ (см. [25, п. 102]). Кривые $\partial\Omega_d$ $(d \in I_D)$ согласно [25, п. 102] называются кривыми, параллельными кривой $\partial\Omega$.

Мы считаем, что значение параметра s соответствует точке наблюдения $x = \tilde{x}_d(s)$, а значение s' — точке интегрирования $x' = \tilde{x}(s')$ в выражении (2.2) для ПДС. Местные координаты (ξ_s,η_s) точек $\tilde{x}(s')$ равны $((\vec{e}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2},(\vec{n}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}) = (-\varphi_4,-\varphi_2)$, поэтому $r^2 = |\tilde{x}_d(s) - \tilde{x}(s')|^2 = \varphi'_0 + d^2$, где $\varphi'_0(d,s,s') := \varphi_0 + 2d\,\varphi_2$. Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\tilde{x}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\tilde{x}(s)$, то $2d\,\cos\alpha < r_0$, где α — угол между лучами $\tilde{x}(s)\tilde{x}(s')$ и $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)$. Следовательно, $\varphi'_0 = r_0^2 - 2dr_0\cos\alpha > 0$ при $(d,s,s') \in \Upsilon := \overline{I_D} \times \Theta$, $s \neq s'$. Зададим функцию $\rho'(d,s,s')$: $\rho' = \sqrt{\varphi'_0}$, если $s' \geq s$; $\rho' = -\sqrt{\varphi'_0}$, если $s' < s$ $(\rho' = \rho_0$ при $d = 0)$, и функции $\psi'_0(d,s,s') := \psi_0 + 2d\,\psi_2$, $\psi'_1(d,s,s') = \psi_3 + d\,\psi_5$. При условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ производные $\partial_{s'}^j \psi'_i$ $(j = \overline{0,n}$, $i = 0,1)$ непрерывны на множестве Υ в силу следствия 2.1. Так как $\psi_0(s,s) = 1$, $|\psi_2(s,s)| = 2^{-1}K(s,s)$ и $D \leq (3c_K)^{-1}$, то при $(d,s) \in I_D \times I_S$ имеем оценку: $\psi'_0(d,s,s) \geq 2/3$. Поэтому $\psi'_0 > 0$ на множестве Υ, и производные $\partial_{s'}^j \rho'$ $(j = \overline{0,n+1})$ непрерывны на Υ при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$, так как $\partial_{s'}\rho' = (\psi'_0)^{-1/2}\,\psi'_1$.

С учетом равенства $2^{-1}\partial_{\vec{n}(s')}r^2 = \varphi_1 + d\,\varphi_6$, где $\varphi_6(s,s') := -\tilde{x}_1'(s)\tilde{x}_1'(s') - \tilde{x}_2'(s)\tilde{x}_2'(s')$, можно записать функцию $g(x,s')$ при $x = \tilde{x}_d(s)$, $(d,s,s') \in \Upsilon$ (кроме точки x при $d = s' - s = 0$) в следующем виде:

$$g(\tilde{x}_d(s), s') = -a_1(d,\rho')\delta_1(d,s,s') - a_2(d,\rho')\delta_2(d,s,s'), \tag{2.6}$$

где

$$a_1(d,\rho) := \rho^2 a(\rho^2+d^2), \quad a_2(d,\rho) := d\,a(\rho^2+d^2); \quad \delta_1 := -\psi_1\,/\psi_0'\,, \quad \delta_2 := -\varphi_6.$$

Так как $\psi_0' > 0$, то при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_{s'}^j\delta_i$ $(j = \overline{0,n},\ i = 1,2)$.

Обозначим через E_s замкнутую дугу кривой $\partial\Omega$, ограниченную двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{x}(s)\tilde{x}_D(s)$ при фиксированном $s \in I_S$, причем $\tilde{x}(s) \in \mathrm{E}_s$. При фиксированном s введем в рассмотрение криволинейную координату σ_s точки $\tilde{x}(s')$: $\sigma_s := s' - s$. Значения σ_s, соответствующие границам дуги E_s, обозначим через Σ_s', Σ_s'' $(\Sigma_s' < 0 < \Sigma_s'')$, и тогда $\sigma_s \in \Xi_s := [\Sigma_s', \Sigma_s'']$, $\xi_s \in \overline{I_D}$, если $\tilde{x}(s') \in \mathrm{E}_s$. Введем также в рассмотрение функцию $\xi_s := \tilde{\xi}_s(\sigma_s)$, определяющую зависимость местной декартовой координаты ξ_s точки $\tilde{x}(s')$ от ее местной криволинейной координаты σ_s.

Лемма 2.1. *При условии $\partial\Omega \in C^2$ значения Σ_s', Σ_s'' непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$.*

Доказательство. Так как дуга E_s находится внутри круга Ляпунова с центром в точке $\tilde{x}(s)$ [25, п. 94], угол между нормалями $\vec{n}(s)$ и $\vec{n}(s')$ не превосходит $\pi/3$, если $\tilde{x}(s') \in \mathrm{E}_s$ (см. оценку (7) [25, п. 94]). Поэтому производная $d\tilde{\xi}_s(\sigma_s)/d\sigma_s$ положительна и непрерывна на множестве Ξ_s при любом $s \in I_S$, и функция $\tilde{\xi}_s(\sigma_s)$ диффеоморфно с гладкостью C^1 отображает множество Ξ_s на множество $\overline{I_D}$. Производная $\partial_{\sigma_s}\hat{\xi}$ функции $\hat{\xi}(s,\sigma_s) := \tilde{\xi}_s(\sigma_s)$ положительна и непрерывна на множестве $\left\{(s,\sigma_s) : s \in \overline{I_S},\ \sigma_s \in \Xi_s\right\}$, поэтому производная $\partial_{\xi_s}\hat{\sigma} = (\partial_{\sigma_s}\hat{\xi})^{-1}$ функции $\hat{\sigma}(s,\xi_s) := \tilde{\sigma}_s(\xi_s)$ ($\tilde{\sigma}_s(\xi_s)$ — функция, обратная к функции $\tilde{\xi}_s(\sigma_s)$) непрерывна на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_D}$. Следовательно, значения $\Sigma_s' = \hat{\sigma}(s,-D)$, $\Sigma_s'' = \hat{\sigma}(s,D)$ непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$. Лемма 2.1 доказана. □

Теорема 2.2 (см. [17, теорема 5])**.** *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция $\delta_0(d,s,s') := (\partial_{s'}\rho')^{-1} = \sqrt{\psi_0'}\Big/\psi_1'$ положительна и всюду определена на множестве $\Upsilon' := \left\{(d,s,s') : d \in \overline{I_D},\ s \in \overline{I_S},\ s'-s \in \Xi_s\right\}$, и существуют непрерывные производные $\partial_{s'}^j\delta_0$ $(j = \overline{0,n})$.*

Следствие 2.2. *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция $\rho_{d,s}(\sigma) := \rho'(d,s,s+\sigma)$ при любых фиксированных $s \in I_S$, $d \in \overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображает множество Ξ_s на множество $\rho_{d,s}(\Xi_s)$. Функции $\sigma'(d,s,\rho) := \sigma_{d,s}(\rho)$ ($\sigma_{d,s}(\rho)$ — функция, обратная к функции $\rho_{d,s}(\sigma)$), $\tilde{\delta}_0(d,s,\rho) := \delta_0(d,s,s{+}\sigma_{d,s}(\rho))$, $\tilde{\delta}_i(d,s,\rho) := \delta_i(d,s,s{+}\sigma_{d,s}(\rho))\,\tilde{\delta}_0$ $(i = 1,2)$ имеют непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}' := \left\{(d,s,\rho) : d \in \overline{I_D},\ s \in \overline{I_S},\ \rho \in \rho_{d,s}(\Xi_s)\right\}$ производные $\partial_\rho^j\sigma'$, $\partial_\rho^j\tilde{\delta}_i$ $(j = \overline{0,n},\ i = \overline{0,2})$.*

В заключение параграфа рассмотрим функции, которые будут использоваться для интерполяции. Обозначим через $\Lambda_m(t,\tau_1,\tau_2)$ $(m = \overline{0,2},\ t \in [\tau_1,\tau_2])$ квадратичные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(t,\tau_1,\tau_2) := \prod_{j=0\,(j\neq m)}^{2} \frac{t-t_j}{t_m-t_j}.$$

Здесь $t_j := \bar{\tau} + q_j\triangle\tau$ $(j = \overline{0,2})$, $\triangle\tau := 2^{-1}(\tau_2-\tau_1)$, $\bar{\tau} := 2^{-1}(\tau_1+\tau_2)$; $q_0 := -1$, $q_1 := 0$, $q_2 := 1$ [26, гл. 2, § 3, п. 2]. Пусть $f(t)$ — комплексная функция на промежутке $[\tau_1,\tau_2]$.

Тогда для функции $\tilde{f}(t) := \sum\limits_{m=0}^{2} f(t_m)\Lambda_m(t,\tau_1,\tau_2)$, а также ее первой и второй производных при $t \in [\tau_1,\tau_2]$ имеют место оценки:

$$\left|\tilde{f}(t) - f(t)\right| \le c_\omega \sup_{t\in[\tau_1,\tau_2]} \left|f^{(3)}(t)\right| \triangle\tau^3 \quad (f \in C^3([\tau_1,\tau_2])), \tag{2.7}$$

$$\left|\tilde{f}^{(j)}(t)\right| \le c_{\Lambda,j} \max_{m=\overline{0,2}} |f(t_m)| \triangle\tau^{-j} \quad (f \in C([\tau_1,\tau_2]), \quad j = \overline{0,2}), \tag{2.8}$$

$$\left|\tilde{f}^{(j)}(t)\right| \le c'_{\Lambda,j} \sup_{t\in[\tau_1,\tau_2]} \left|f^{(j)}(t)\right| \quad (f \in C^j([\tau_1,\tau_2]), \quad j = 1,2), \tag{2.9}$$

где $c_\omega := 2\sqrt{3}/9$, $c_{\Lambda,j} := 3$ $(j = \overline{0,2})$, $c'_{\Lambda,1} := 3$, $c'_{\Lambda,2} := 2^{-1}$.

Лемма 2.2. *Пусть функция $f(t,\alpha)$ определена и непрерывна на множестве* $\mathrm{T} := \{(t,\alpha) : t \in [\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)], \alpha \in \mathrm{A}\}$, *где* A *— n-мерный прямоугольник, а функции $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ непрерывны и $\tau_1(\alpha) \le \tau_2(\alpha)$ на множестве* A. *Кроме того, пусть на подмножестве* $\mathrm{T}' \subseteq \mathrm{T}$, *выделенном из множества* T *с помощью условия $\tau_1(\alpha) < \tau_2(\alpha)$, существуют непрерывные производные $\partial_t^j f$ $(j = 1,2)$, которые могут быть доопределены при $\tau_1(\alpha) = \tau_2(\alpha)$ до непрерывных на множестве* T *функций. Тогда функция $\tilde{f}$, имеющая вид $\tilde{f}(t,\alpha) := \sum\limits_{m=0}^{2} f(t_m(\alpha),\alpha)\,\Lambda_m(t,\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha))$, если $(t,\alpha) \in \mathrm{T}'$, и $\tilde{f}(t,\alpha) := f(t,\alpha)$, если $(t,\alpha) \in \mathrm{T}\backslash\mathrm{T}'$, непрерывна на множестве* T.

Доказательство. При условии $\tau_1 < \tau_2$ функция $\tilde{f}(t)$ $(t \in [\tau_1,\tau_2])$ может быть представлена в виде:

$$\tilde{f}(t) = f(\bar{\tau}) + f_1(\tau_1,\tau_2)(t-\bar{\tau}) + 2^{-1}f_2(\tau_1,\tau_2)(t-\bar{\tau})^2, \tag{2.10}$$

где

$$f_1 := 2^{-1}\triangle\tau^{-1}\left[f(\tau_2) - f(\tau_1)\right], \quad f_2 := \triangle\tau^{-2}\left[f(\tau_1) - 2f(\bar{\tau}) + f(\tau_2)\right].$$

При условии $f \in C^2([\tau_1,\tau_2])$ имеем в силу формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [27, п. 318] и теоремы о среднем следующие формулы:

$$\begin{aligned} f_j(\tau_1,\tau_2) &= 2^{j-2}\triangle\tau^{-j}\left[(-1)^j\int_{\bar{\tau}}^{\tau_1} f^{(j)}(t)\,(\tau_1 - t)^{j-1}\,dt + \int_{\bar{\tau}}^{\tau_2} f^{(j)}(t)\,(\tau_2 - t)^{j-1}\,dt\right] \\ &= 2^{-1}\left[f^{(j)}(t_{1,j}) + f^{(j)}(t_{2,j})\right] \quad (t_{1,j} \in [\tau_1,\bar{\tau}], \quad t_{2,j} \in [\bar{\tau},\tau_2], \quad j = 1,2). \end{aligned} \tag{2.11}$$

С помощью равенств (2.10) и (2.11) получаем утверждение леммы 2.2. □

Заметим, что если $\mathrm{T}' = \emptyset$, то на множестве T в качестве функций $\partial_t^j f$ $(j = 1,2)$ можно взять любые непрерывные функции.

3. Устойчивая разрешимость граничного интегрального уравнения в пространствах дифференцируемых функций

В настоящем параграфе решается вспомогательная задача: исследуются достаточные условия, при которых ГИУ (2.4) устойчиво разрешимы в пространствах дифференцируемых функций. Эти результаты будут использованы в дальнейшем для обоснования устойчивой сходимости аппроксимаций решений ГИУ (2.4) и решений краевых задач (2.1).

Пусть X и Y — некоторые банаховы пространства. Условимся называть оператором $\mathbf{A}$ из пространства X в пространство Y линейный оператор, сопоставляющий каждому элементу некоторого линейного подпространства $D(\mathbf{A}) \subseteq X$ некоторый элемент пространства Y, и если $X = Y$, то будем называть оператор $\mathbf{A}$ оператором в пространстве X. Если $D(\mathbf{A}) = X$, то будем говорить, что оператор $\mathbf{A}$ из пространства X в пространство Y всюду определен, и обозначать его как $\mathbf{A}\ [X \to Y]$, а если $X = Y$, то $\mathbf{A}\ [X]$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда оператор* $\mathbf{G}$ *в пространстве* $C^n(\partial\Omega)$ *всюду определен и ограничен.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$\tilde{g}(s,\sigma) := g(\tilde{x}(s), s+\sigma)$, $\quad \tilde{\psi}_0(s,\sigma) := \psi_0(s, s+\sigma)$, $\quad \tilde{a}_0(s,\sigma) := a_0(\sigma^2\tilde{\psi}_0)$, $\quad \tilde{b}(s,\sigma) := \hat{b}(s, s+\sigma)$

и операторы $\mathbf{G}_\varepsilon$ $(\varepsilon \in (0, S])$:

$$(\mathbf{G}_\varepsilon f)(s) := \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \tilde{g}(s,\sigma) f(s+\sigma)\, d\sigma \quad (f \in C(\partial\Omega), \quad s \in I_S).$$

Имеем формулу: $\tilde{g} = -\tilde{a}_0\tilde{b}$. Так как в силу следствия 2.1 существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_s^k \partial_{s'}^l \psi_0$, $\partial_s^k \partial_{s'}^l \hat{b}(s,s')$ $(k = \overline{0, n-l},\ l = \overline{0,n})$, то существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производные $\partial_s^l \tilde{\psi}_0$, $\partial_s^l \tilde{b}$ $(l = \overline{0,n})$. Кроме того, учитывая формулу (2.5) и строгую положительность функции $\tilde{\psi}_0$ на $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$, можно представить функцию $\tilde{a}_0$ в виде суммы $\sigma^2 \ln \sigma^2 f_1 + f_2$, где функции $f_i(s,\sigma)$ $(i = 1,2)$ имеют непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производные $\partial_s^l f_i$ $(l = \overline{0,n})$. Поэтому производные $\partial_s^l \tilde{g}$ $(l = \overline{0,n})$ можно доопределить при $\sigma = 0$ до непрерывных на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ функций. Пусть $f \in C^n(\partial\Omega)$. Тогда существуют непрерывные производные $j_\varepsilon^{(l)}(s)$ $(s \in \overline{I_S},\ l = \overline{0,n})$ функций $j_\varepsilon := \mathbf{G}_\varepsilon f$. Так как $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$ $(l = \overline{0, n+2},\ i = 1,2)$ и $f^{(l)}(-S+0) = f^{(l)}(S-0)$ $(l = \overline{0,n})$, то $j_\varepsilon^{(l)}(-S+0) = j_\varepsilon^{(l)}(S-0)$ $(l = \overline{0,n})$. В результате имеем: $j_\varepsilon \in C^n(\partial\Omega)$. С учетом произвольности функции $f \in C^n(\partial\Omega)$ оператор $\mathbf{G}$ в пространстве $C^n(\partial\Omega)$ всюду определен. Справедливы оценки:

$$\left|(\mathbf{G}_\varepsilon f)^{(l)}(s)\right| = \left|\sum_{k=0}^{l} C_l^k \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_s^k \tilde{g}(s,\sigma)\, \partial_s^{l-k} f(s+\sigma)\, d\sigma\right| \le 2^{n+1} \varepsilon c_n \|f\|_{C^n(\partial\Omega)}, \tag{3.1}$$

где $s \in \overline{I_S}$, $c_n := \sup\limits_{0 \le l \le n,\, (s,\sigma) \in I_S \times I_S} |\partial_s^l \tilde{g}(s,\sigma)|$, $C_l^k := l!/(l-k)!/k!$, $l = \overline{0,n}$. Согласно оценкам (3.1) операторы $\mathbf{G}_\varepsilon$ $[C^n(\partial\Omega)]$ ограничены. Теорема 3.1 доказана, так как $\mathbf{G} = \mathbf{G}_\varepsilon$ при $\varepsilon = S$. □

Теорема 3.2. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $w \in C^n(\partial\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда решение ГИУ (2.4)* $v_\pm \in C^n(\partial\Omega)$ *существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $\eta_\varepsilon(\sigma)$ — n раз непрерывно дифференцируемая на промежутке $\overline{I_S}$ вещественная функция: $\eta_\varepsilon(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \le \varepsilon/2$, $0 < \eta_\varepsilon(\sigma) < 1$ при $\varepsilon/2 < |\sigma| < \varepsilon$, $\eta_\varepsilon(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \ge \varepsilon$ $(\varepsilon \in (0,S))$; $g'_\varepsilon(s,\sigma) := \eta_\varepsilon \tilde{g}$, $g''_\varepsilon(s,s') := [1 - \eta_\varepsilon(s'-s)]\, g$. Представим оператор $\mathbf{G}$ в виде суммы: $\mathbf{G} = \mathbf{G}'_\varepsilon + \mathbf{G}''_\varepsilon$, где операторы $\mathbf{G}'_\varepsilon$, $\mathbf{G}''_\varepsilon$ заданы равенствами:

$$(\mathbf{G}'_\varepsilon f)(s) := \int_{-S}^{S} g'_\varepsilon(s,\sigma) f(s+\sigma) d\sigma, \quad (\mathbf{G}''_\varepsilon f)(s) := \int_{-S}^{S} g''_\varepsilon(s,s') f(s') ds'$$

$(f \in C(\partial\Omega),\ s \in I_S)$. По аналогии с теоремой 3.1 оператор $\mathbf{G}'_\varepsilon$ в пространстве $C^n(\partial\Omega)$ всюду определен, ограничен и для него с учетом неравенства $\eta_\varepsilon(\sigma) \le 1$ справедливы оценки (3.1). Оператор $\mathbf{G}''_\varepsilon$ из пространства $C(\partial\Omega)$ в пространство $C^n(\partial\Omega)$ тоже всюду определен, так как существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_s^j g''_\varepsilon$ $(j = \overline{0,n})$ и $\partial_s^j g''_\varepsilon(-S+0, s') = \partial_s^j g''_\varepsilon(S-0, s')$.

По условию правая часть ГИУ (2.4) $w \in C(\partial\Omega)$, поэтому решение ГИУ (2.4) $v_\pm \in C(\partial\Omega)$ существует и единственно [22, гл. 3]. Остается доказать, что $v_\pm \in C^n(\partial\Omega)$. Так как $w \in C^n(\partial\Omega)$ и оператор $\mathbf{G}''_\varepsilon$ из пространства $C(\partial\Omega)$ в пространство $C^n(\partial\Omega)$ всюду определен, то $h_\varepsilon^\pm := \pm 2(w - \mathbf{G}''_\varepsilon v_\pm) \in C^n(\partial\Omega)$. ГИУ (2.4) может быть записано в следующем виде:

$$v_\pm \pm 2\mathbf{G}'_\varepsilon v_\pm = h_\varepsilon^\pm. \tag{3.2}$$

Заметим, что правая часть уравнения (3.2) $h_\varepsilon^\pm$ зависит от решения $v_\pm$, но в условиях данной теоремы всегда $h_\varepsilon^\pm \in C^n(\partial\Omega)$.

Пусть $\varepsilon < [(n+1)2^{n+2}c_n]^{-1}$. Так как $(n+1)2^{n+2}c_n \geq 4c_0$, то для оператора $\mathbf{G}'_\varepsilon$ $[C(\partial\Omega)]$ в силу неравенств (3.1) имеем оценку $\|\mathbf{G}'_\varepsilon\| < 2^{-1}$, поэтому оператор $1 \pm 2\mathbf{G}'_\varepsilon$ ограниченно обратим в пространстве $C(\partial\Omega)$ и обратный оператор $(1 \pm 2\mathbf{G}'_\varepsilon)^{-1}$ может быть представлен в виде ряда Неймана $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (\mp 2\mathbf{G}'_\varepsilon)^i$, сходящегося по операторной норме [20, гл. VII, п. 3, подп. 4, лемма]. Следовательно, в силу равенства (3.2) функция $v_\pm \in C(\partial\Omega)$ представима в виде сходящегося в норме $C(\partial\Omega)$ ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} j_{\varepsilon,i}^\pm$, где $j_{\varepsilon,i}^\pm := (\mp 2\mathbf{G}'_\varepsilon)^i\, h_\varepsilon^\pm$. Так как $\varepsilon < [(n+1)2^{n+2}c_n]^{-1}$, то для оператора $\mathbf{G}'_\varepsilon$ $[C^n(\partial\Omega)]$ в силу неравенств (3.1) имеем оценку $q := 2\|\mathbf{G}'_\varepsilon\| < 1$. Кроме того, в силу теоремы 3.1 все $j_{\varepsilon,i}^\pm \in C^n(\partial\Omega)$ $(i \in \mathbb{Z}_+)$, так как $h_\varepsilon^\pm \in C^n(\partial\Omega)$. По индукции получаем неравенства:

$$\left|(j_{\varepsilon,i}^\pm)^{(l)}(s)\right| \leq \left\|j_{\varepsilon,i}^\pm\right\|_{C_n(\partial\Omega)} \leq q^i \left\|h_\varepsilon^\pm\right\|_{C^n(\partial\Omega)} \quad (s \in I_S, \quad l = \overline{0,n}, \quad i = 0, 1, ...),$$

вследствие которых ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (j_{\varepsilon,i}^\pm)^{(l)}(s)$ сходятся равномерно по $s \in \overline{I_S}$, и тогда $v_\pm^{(l)} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (j_{\varepsilon,i}^\pm)^{(l)} \in C(\partial\Omega)$ $(l = \overline{0,n})$, то есть $v_\pm \in C^n(\partial\Omega)$. Теорема 3.2 доказана. □

Заметим, что мы не можем получить результат теоремы 3.2 на основе теорем о повышении гладкости решений уравнений Фредгольма второго рода, доказанных в работах [28]–[33]. А именно, пусть $\Phi := \{(s, s') \in (-S, S) \times (-S, S) : \ s \neq s'\}$. При условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ функция $\hat{g}(s, s') := g(\tilde{x}(s), s')$ n раз непрерывно дифференцируема на множестве Φ и имеют место оценки:

$$\left|\partial_s^k(\partial_s + \partial_{s'})^l \hat{g}\right| \leq c_n \cdot \begin{cases} 1 & (k < 2), \\ \left|\ln\left|(s' - s)\big(s' - (s + 2S)\big)\big(s' - (s - 2S)\big)\right|\right| & (k = 2), \\ \left|(s' - s)\big(s' - (s + 2S)\big)\big(s' - (s - 2S)\big)\right|^{2-k} & (k > 2), \end{cases}$$

где c_n — положительные постоянные, $k + l \leq n$, $(s, s') \in \Phi$. Таким образом, производные ядра интегрального оператора $\mathbf{G}$ имеют не только диагональную сингулярность (при $s \to s'$), но и граничные сингулярности (при $s \to -S$, $s' \to S$ и при $s \to S$, $s' \to -S$). Теорема [28], теорема 1 [29], теоремы 1, 2 [30], теорема 5 [31] доказаны для ядер интегральных операторов, производные которых имеют лишь диагональную особенность. Теоремы 1.1–1.3 [32], теорема 4 [33] доказаны для ядер, производные которые имеют еще и граничные сингулярности, но в отличие от производных функции $\hat{g}$ граничные сингулярности у производных таких ядер не увеличиваются с ростом порядка частной производной ∂_s^k.

На основании теорем 3.1, 3.2 и теоремы Банаха об обратном операторе [20, гл. II, п. 2, подп. 2, теорема] получаем основной результат настоящего параграфа:

Следствие 3.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда операторы $\mathbf{G}_\pm$ $[C^n(\partial\Omega)]$ ограниченно обратимы.*

4. Полуаналитические аппроксимации потенциала двойного слоя

Рассмотрим вначале некоторые представления и свойства интегральных операторов ПДС, которые понадобятся для построения полуаналитических аппроксимаций ПДС и исследования их свойств. Обозначим через Ω_D множество, образованное точками $x = \tilde{x}_d(s)$

при $d \in I_D$, $s \in I_S$. Пусть $f \in C(\partial\Omega)$, $B_i(d,s,\rho)f := \tilde{\delta}_i(d,s,\rho)f(s+\sigma_{d,s}(\rho))$ $(i=1,2)$, $B(d,s,s')f := g(\tilde{x}_d(s),s')f(s')$. Зададим при $x \in \overline{\Omega_D}$ функционалы $G_i(x)$ $(i=\overline{1,3})$:

$$\begin{aligned} G_i(x)f &:= -\int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d,\rho)B_i(d,s,\rho)f\,d\rho \quad (i=1,2),\\ G_3(x)f &:= \int_{I_S\setminus\Xi_s} B(d,s,s+\sigma)f\,d\sigma. \end{aligned} \tag{4.1}$$

В силу формулы (2.6) и следствия 2.2 функционалы $G(x)$ могут быть представлены в виде суммы:

$$G(x) = G_1(x)+G_2(x)+G_3(x) \quad (x \in \overline{\Omega_D}), \tag{4.2}$$

причем $G(\tilde{x}(s))f = G_1(\tilde{x}(s))f + G_3(\tilde{x}(s))f$ — прямое значение ПДС на границе $\partial\Omega$, так как $G_2(\tilde{x}(s))f = 0$ согласно равенствам (4.1) $(s \in I_S)$.

В силу следствия 2.2 функции $B_i(d,s,\rho)f$ $(i=1,2)$ непрерывны на множестве $\tilde{\Upsilon}'$, так как $\partial\Omega \in C^2$, $f \in C(\partial\Omega)$. Кроме того, значения Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$ (см. лемму 2.1), следовательно, значения $\rho_{d,s}(\Sigma'_s)$, $\rho_{d,s}(\Sigma''_s)$ непрерывно зависят от $(d,s) \in \overline{I_D}\times\overline{I_S}$, так как функция ρ' непрерывна на множестве Υ. Заметим также, что в силу формулы (2.5) можно представить функции $a_i(d,\rho)$ $(i=1,2)$ в виде сумм:

$$a_1 = -(2\pi)^{-1}\rho^2\left(\rho^2+d^2\right)^{-1} + a'_1, \quad a_2 = -(2\pi)^{-1}d\left(\rho^2+d^2\right)^{-1} + a'_2, \tag{4.3}$$

где функции $a'_i(d,\rho)$ могут быть доопределены при $d=\rho=0$ до непрерывных на множестве $\overline{I_D}\times\overline{I_S}$. Поэтому функция $G_1(x)f$ непрерывна на замкнутом множестве $\overline{\Omega_D}$ в силу теоремы о непрерывности несобственных интегралов, зависящих от параметра [34, гл. XVII, § 2, утверждение 5], тогда как непрерывность функции $G_2(x)f$ гарантирована лишь на множестве Ω_D.

Функция $G_3(x)f$ непрерывна на множестве $\overline{\Omega_D}$. Действительно, как уже упоминалось, значения Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, а функция $B_3(d,s,s')f$ непрерывна на множестве $\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'}$, так как при этом $r \geq D$.

Заметим, что в силу формулы (2.5) $a'_2 \to 0$ при $d \to 0$ равномерно по $\rho \in \overline{I_S}$, и что в силу неравенства $\psi'_0 > 0$ при $(d,s) \in \overline{I_D}\times I_S$ выполняются неравенства:

$$|\rho_{d,s}(\Sigma'_s)| \geq c_0|\Sigma'_s| \geq c_0 D, \quad \rho_{d,s}(\Sigma''_s) \geq c_0\Sigma''_s \geq c_0 D, \quad c_0 := \inf_{(d,s,s')\in\Upsilon}\sqrt{\psi'_0} > 0.$$

Поэтому с учетом второго равенства (4.3) и ограниченности функции $B_2(d,s,\rho)f$ и значений Σ'_s, Σ''_s имеем при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, c_0D]$ равномерно сходящиеся по $s \in I_S$ пределы:

$$\lim_{d\to 0}\int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} a_2B_2f\,d\rho = -(2\pi)^{-1}\lim_{d\to 0}\int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} d\left(\rho^2+d^2\right)^{-1}B_2f\,d\rho = 0.$$

Принимая также во внимание равенства $B_2(d,s,0)f = f(s)$ при $(d,s)\in\overline{I_D}\times I_S$ и непрерывность функции $B_2(d,s,\rho)f$ на множестве $\tilde{\Upsilon}'$, получаем равномерно сходящиеся по $s \in \overline{I_S}$ пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{d\to\pm 0} G_2(\tilde{x}_d(s))f &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\lim_{d\to\pm 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} a_2(d,\rho)B_2(d,s,\rho)f\,d\rho\right)\\ &= (2\pi)^{-1}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\lim_{d\to\pm 0} d\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\rho^2+d^2\right)^{-1}B_2(d,s,\rho)f\,d\rho\right)\\ &= \pi^{-1}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\lim_{d\to\pm 0} B_2(d,s,\tilde{\rho}_{d,s,\varepsilon})f\,\mathrm{arctg}\,(\varepsilon/d)\right)\\ &= \pm 2^{-1}f(s), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\tilde{\rho}_{d,s,\varepsilon} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ (см. обобщенную теорему о среднем [27, п. 299]). На основании равенств (4.2), (4.4) получаем известные предельные соотношения для ПДС, выполняющиеся при $\partial\Omega \in C^2$, $f \in C(\partial\Omega)$ равномерно по $s \in \overline{I_S}$:

$$\lim_{d\to\pm 0} G(\tilde{x}_d(s))f = \pm 2^{-1} f(s) + G(\tilde{x}(s))f. \tag{4.5}$$

Используя равенства (4.4) и (4.5), можно доопределить функции $G_2(x)f$ и $G(x)f$ ($f \in C(\partial\Omega)$) до непрерывных на замкнутых множествах $\overline{\Omega_D^{\pm}}$ ($\Omega_D^{\pm} := \Omega_D \cap \Omega_{\pm}$). При условии $w \in C(\partial\Omega)$ функции $u_{\pm}(x) := R_{\pm}(x)w$ непрерывны на соответствующих множествах $\Omega_D^{\pm}$ и их можно доопределить до непрерывных на множествах $\overline{\Omega_D^{\pm}}$ с помощью равномерно сходящихся по $s \in \overline{I_S}$ пределов:

$$\lim_{d\to\pm 0} u_{\pm}(\tilde{x}_d(s)) = \pm 2^{-1} v_{\pm}(s) + u_{\pm}(\tilde{x}(s)) = w(s), \tag{4.6}$$

при этом $u_{\pm}(\tilde{x}(s)) := R_{\pm}(\tilde{x}(s))w$, $R_{\pm}(\tilde{x}(s)) := G(\tilde{x}(s))\mathbf{G}_{\pm}^{-1}$ ($s \in I_S$) — «прямые» значения функций $u_{\pm}(x)$ и функционалов $R_{\pm}(x)$ на границе $\partial\Omega$.

С учетом равенств (4.3) функции $a_i(d,\rho)$ ($i = 1, 2$) абсолютно интегрируемы по $\rho \in I_S$ и интегралы равномерно ограничены по $d \in \overline{I_D}$. Для норм функционалов $G_i(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ ($x \in \overline{\Omega_D}$, $i = \overline{1,3}$) имеют место оценки:

$$\|G_i(x)\| \le A_i \hat{c}_{i,0} \quad (i = 1, 2), \quad \|G_3(x)\| \le 2S\tilde{c}_{3,0}, \tag{4.7}$$

где

$$A_i := \sup_{d\in\overline{I_D}} \int_{I_S} |a_i(d,\rho)|\, d\rho, \quad \hat{c}_{i,0} := \sup_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'} |\tilde{\tilde{\delta}}_i| \quad (i = 1, 2); \quad \tilde{c}_{3,0} := \sup_{(d,s,s')\in\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'}} |g(\tilde{x}_d(s), s')|.$$

В силу равенства (4.2) и оценок (4.7) имеем оценки для норм функционалов $G(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$:

$$\|G(x)\| \le c_G := A_1\hat{c}_{1,0} + A_2\hat{c}_{2,0} + 2S\tilde{c}_{3,0} \quad (x \in \overline{\Omega_D}). \tag{4.8}$$

В силу оценок (4.8) функционалы $G(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ ограничены равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$.

Осуществим дискретизацию ПДС по переменной интегрирования s' в соответствии с МГЭ. Для этого разобьем границу $\partial\Omega$ на граничные элементы и на каждом из них заменим функцию плотности ее квадратичным интерполянтом. А именно, пусть $L/2 \in \mathbb{N}$, $h := S/(L+1)$, $s_l := lh$, $l \in \mathbb{Z}$ ($\tilde{x}(s_{l+2L+2}) = \tilde{x}(s_l)$). Введем в рассмотрение пространства H_L комплексных сеточных функций f со значениями f_l, заданные в точках коллокации s_l на множестве I_S ($f_{l+2L+2} = f_l$), с нормой: $\|f\|_{H_L} = \max\limits_{-L-1\le l\le L} |f_l|$. Зададим проекционные операторы $\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to H_L]$: $(\mathbf{P}_L f)_l := f(s_l)$ ($\|\mathbf{P}_L\| \le 1$). Введем в рассмотрение интерполирующие операторы $\ddot{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \to C(\partial\Omega)]$:

$$(\ddot{\mathbf{P}}_L f)(s) := \sum_{m=0}^{2} f_{2l-1+m} \Lambda_m(s, s_{2l-1}, s_{2l+1}) \quad (s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L/2, L/2}).$$

В силу оценки (2.8) (при $j = 0$) операторы $\ddot{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \to C(\partial\Omega)]$ ограничены в совокупности: $\|\ddot{\mathbf{P}}_L\| \le c_{\Lambda,0}$. На основании неравенства (2.7) имеем оценки:

$$\left\|\ddot{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L f - f\right\|_{C(\partial\Omega)} \le c_\omega \left\|f^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)). \tag{4.9}$$

С помощью равенств $\ddot{G}(x)f := G(x)\ddot{\mathbf{P}}_L f$ ($f \in H_L$) зададим функционалы $\ddot{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$ ($x \in \overline{\Omega_D}$). Используя неравенства (4.8), (4.9), получаем оценки аппроксимации функционалов $G(x)$ функционалами $\ddot{G}(x)\mathbf{P}_L$:

$$\left|\ddot{G}(x)\mathbf{P}_L f - G(x)f\right| \le c_G\, c_\omega \left\|f^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h^3 \quad (x \in \overline{\Omega_D}, \quad f \in C^3(\partial\Omega)). \tag{4.10}$$

Функционалы $\ddot{G}(x)$ выражаются через интегралы

$$\int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} g(x,s')\ddot{f}(s')\,ds' \quad (\ddot{f} := \ddot{\mathbf{P}}_L f, f \in H_L),$$

которые в общем случае не могут быть вычислены точно, поэтому требуется дополнительная аппроксимация. Заметим, что в соответствии с равенствами (4.2) функционалы $\ddot{G}(x)$ могут быть представлены в виде сумм $\ddot{G}(x) = \ddot{G}_1(x) + \ddot{G}_2(x) + \ddot{G}_3(x)$ при $x \in \overline{\Omega_D}$, где $\ddot{G}_i(x) := G_i(x)\ddot{\mathbf{P}}_L$ $(i = \overline{1,3})$. Введем в рассмотрение функционалы $\hat{G}_i(x)$, аппроксимирующие $\ddot{G}_i(x)$ $(x \in \overline{\Omega_D},\ i = 1,2)$. Для этого в выражениях (4.1) для $\ddot{G}_i(\tilde{x}_d(s))f$ заменим функции $\ddot{B}_i(d,s,\rho)f := \tilde{\delta}_i \ddot{f}(s+\sigma_{d,s}(\rho))$ $(f \in H_L,\ \ddot{f} := \ddot{\mathbf{P}}_L f,\ (d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}')$ их кусочно-квадратичными интерполянтами $\hat{B}_i(d,s,\rho)f$ по переменной ρ:

$$\hat{G}_i(\tilde{x}_d(s))\,f := -\int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d,\rho)\hat{B}_i(d,s,\rho)f\,d\rho. \tag{4.11}$$

Здесь

$$\hat{B}_i(d,s,\rho)f := \hat{B}_{i,l}(d,s,\rho)f \quad (\rho \in [\rho_{d,s,l},\rho_{d,s,l+1}]\,, \quad l \in \mathbb{Z}),$$

$$\hat{B}_{i,l}(d,s,\rho)f := \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{2} \ddot{B}_i(d,s,\rho_{d,s,l,m})f\,\Lambda_m(\rho,\rho_{d,s,l},\rho_{d,s,l+1}) & (\rho_{d,s,l} < \rho_{d,s,l+1}), \\ \ddot{B}_i(d,s,\rho_{d,s,l}) & (\rho_{d,s,l} = \rho_{d,s,l+1}); \end{cases}$$

$$\rho_{d,s,l,m} := 2^{-1}\left(\rho_{d,s,l}+\rho_{d,s,l+1}\right) + q_m h'_{d,s,l}, \quad h'_{d,s,l} := 2^{-1}\left(\rho_{d,s,l+1}-\rho_{d,s,l}\right), \quad \rho_{d,s,l} := \rho_{d,s}(\alpha_{s,l}).$$

Значения $\alpha_{s,l}$ $(l \in \mathbb{Z},\ s \in \overline{I_S})$ определяем с таким расчетом, чтобы выполнялись условия: (1) $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} [\alpha_{s,l},\alpha_{s,l+1}] = \Xi_s$; (2) $\left(\{s_k - s\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \Xi_s\right) \subseteq \{\alpha_{s,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$; (3) $\alpha_{s,l} \le \alpha_{s,l+1}$ $(l \in \mathbb{Z})$; (4) $\alpha_{s,l}$ $(l \in \mathbb{Z})$ непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, если Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$. Пусть $s \in [s_k, s_{k+1})$ при некотором k от $-L-1$ до L. Тогда полагаем

$$\alpha_{s,2l+k} := \min\left\{s_{l+k}-s, \Sigma''_s\right\}, \qquad \alpha_{s,2l+1+k} := \min\left\{lh, \Sigma''_s\right\} \qquad (l \ge 0);$$
$$\alpha_{s,2l+k} := \max\left\{s_{l+k}-s, \Sigma'_s\right\}, \qquad \alpha_{s,2l+1+k} := \max\left\{lh, \Sigma'_s\right\} \qquad (l < 0).$$

Заметим, что в формуле (4.11) достаточно задать функции $\hat{B}_i(d,s,\rho)f$ на промежутках $[\rho_{d,s,l},\rho_{d,s,l+1}]$ лишь при $l = \overline{-3L-2, 3L+2}$, поскольку при остальных значениях $l \in \mathbb{Z}$ длины этих промежутков равны нулю $\left(\rho_{d,s,l} = \rho_{d,s,l+1}\right)$ при любых $s \in \overline{I_S}$, даже если $\Sigma'_s = -S$, $\Sigma''_s = S$.

Введем в рассмотрение функции $\ddot{B}(d,s,s')f := g(\tilde{x}_d(s),s')\ddot{f}(s')$ $(f \in H_L,\ \ddot{f} := \ddot{\mathbf{P}}_L f,\ (d,s,s') \in \Upsilon)$ и аппроксимируем функционалы $\ddot{G}_3(\tilde{x}_d(s))$ при $(d,s) \in \overline{I_D} \times I_S$ функционалами $\tilde{G}_3(\tilde{x}_d(s))$, построенными с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\tilde{G}_3(\tilde{x}_d(s))f := \sum_{l=-3L-2}^{3L+2} h''_{s,l}\,\tilde{B}_{3,l}(d,s)f, \tag{4.12}$$

где

$$\tilde{B}_{3,l}(d,s)f := \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j\,\ddot{B}(d,s,s+\beta_{s,l,j})f,$$

$$\beta_{s,l,j} := 2^{-1}(\beta_{s,l}+\beta_{s,l+1}) + h''_{s,l}z_j, \quad h''_{s,l} := 2^{-1}(\beta_{s,l+1}-\beta_{s,l}).$$

Здесь z_j — корни многочлена $P_\gamma(z) := (d^\gamma/dz^\gamma)\,(z^2-1)^\gamma$ на интервале $(-1,1)$ [26, гл. 3, § 5, п. 2] $(z_1 < z_2 < \ldots < z_\gamma)$. Для весовых коэффициентов ω_j имеют место соотношения: $\sum\limits_{j=1}^{\gamma} \omega_j = 2$ и $\omega_j > 0$ [26, гл. 3, § 5, п. 1].

Значения $\beta_{s,l}$ ($l \in \mathbb{Z}$, $s \in \overline{I_S}$) определяем так, чтобы выполнялись условия: (1) $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} [\beta_{s,l}, \beta_{s,l+1}] = \overline{I_S \setminus \Xi_s}$; (2) $\left(\{s_k - s\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \overline{I_S \setminus \Xi_s}\right) \subseteq \{\beta_{s,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$; (3) $\beta_{s,l} \leq \beta_{s,l+1}$; (4) $\beta_{s,l}$ ($l \in \mathbb{Z}$) непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, если Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$. Пусть $s \in [s_k, s_{k+1})$ при некотором k от $-L-1$ до L. Тогда полагаем

$$\beta_{s,2l+k} := \min\left\{\max\left\{s_{l+k} - s, \Sigma''_s\right\}, S\right\}, \qquad \beta_{s,2l+1+k} := \min\left\{\max\left\{lh, \Sigma''_s\right\}, S\right\} \ (l \geq 0);$$
$$\beta_{s,2l+k} := \max\left\{\min\left\{s_{l+k} - s, \Sigma'_s\right\}, -S\right\}, \qquad \beta_{s,2l+1+k} := \max\left\{\min\left\{lh, \Sigma'_s\right\}, -S\right\} \ (l < 0).$$

Заметим, что в формуле (4.12) сумму по $l = \overline{-3L-2, 3L+2}$ можно заменить суммой по $l \in \mathbb{Z}$, поскольку все дополнительные слагаемые равны нулю ($h''_{s,l} = 0$) при любых $s \in \overline{I_S}$.

Пусть $\hat{G}(x) := \hat{G}_1(x) + \hat{G}_2(x) + \tilde{G}_3(x)$. В силу оценки (2.8) (при $j = 0$) функционалы $\hat{B}_i(d,s,\rho)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$ ($i = 1,2$) равномерно ограничены по $(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'$:

$$\left\|\hat{B}_i(d,s,\rho)\right\| \leq c^2_{\Lambda,0}\,\hat{c}_{i,0},$$

а функционалы $\tilde{B}_{3,l}(d,s)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$ равномерно ограничены по $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$, $l \in \mathbb{Z}$:

$$\left\|\tilde{B}_{3,l}(d,s)\right\| \leq 2\,c_{\Lambda,0}\,\hat{c}_{3,0}.$$

Поэтому при $x \in \overline{\Omega_D}$ имеют место неравенства:

$$\left\|\hat{G}_i(x)\right\| \leq A_i\,c^2_{\Lambda,0}\,\hat{c}_{i,0} \quad (i = 1,2), \qquad \left\|\tilde{G}_3(x)\right\| \leq 2S\,c_{\Lambda,0}\,\tilde{c}_{3,0},$$

на основании которых, а также неравенства $\|\mathbf{P}_L\| \leq 1$, получаем утверждение:

Теорема 4.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $\gamma, L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда функционалы $\hat{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$, $\hat{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ ограничены в совокупности равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$.*

В силу следствия 2.2 и неравенства $r \geq D$, имеющего место, если $(d,s,s') \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}$, при указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ и $j = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ могут быть определены константы:

$$\hat{c}_{i,j} := \sup_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'} \left|\partial^j_\rho \tilde{\delta}_i\right| \quad (i = 1,2, \quad \partial\Omega \in C^{n+2}),$$
$$\tilde{c}_{3,j} := \sup_{(d,s,s')\in\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'}} \left|\partial^j_{s'} g(\tilde{x}_d(s), s')\right| \quad (\partial\Omega \in C^{n+1}).$$

Используя неравенства (2.7)–(2.9) и $h'_{d,s,l} \leq 2^{-1} c_h h$ ($c_h := \sup\limits_{(d,s,s')\in\Upsilon'} \partial_{s'}\rho'$) и полагая $f \in C^2(\partial\Omega)$, $x = \tilde{x}_d(s)$, $(d,s) \in \overline{I_D} \times I_S$, при указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ получаем оценки:

$$\begin{aligned}\left|\hat{G}_i(x)\mathbf{P}_L f - \ddot{G}_i(x)\mathbf{P}_L f\right| &\leq 8^{-1} A_i\,c^3_h\,c_\omega \operatorname*{ess\,sup}_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'} \left|\partial^3_\rho \ddot{B}_i(d,s,\rho)\mathbf{P}_L f\right| h^3 \\ &\leq c_i\,\|f\|_{C^2(\partial\Omega)}\,h^3 \quad (\partial\Omega \in C^5, \quad i = 1,2),\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\left|\tilde{G}_3(x)\mathbf{P}_L f - \ddot{G}_3(x)\mathbf{P}_L f\right| &\leq 2S \operatorname*{ess\,sup}_{(d,s,s')\in\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'}} \left|\partial^{2\gamma}_{s'} \ddot{B}(d,s,s')\mathbf{P}_L f\right| h^{2\gamma} \\ &\leq c_3\,\|f\|_{C^2(\partial\Omega)}\,h^{2\gamma} \quad (\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}),\end{aligned} \tag{4.14}$$

где постоянные c_i ($i = 1,2$), c_3 определяются формулами:

$$c_i := 8^{-1} A_i\,c^3_h\,c_\omega \left[\hat{c}_{i,3}\,c_{\Lambda,0} + (3\hat{c}_{i,2}\,\hat{c}_{0,0} + 3\hat{c}_{i,1}\,\hat{c}_{0,1} + \hat{c}_{i,0}\,\hat{c}_{0,2})\,c'_{\Lambda,1} + 3\left(\hat{c}_{i,1}\,\hat{c}^2_{0,0} + \hat{c}_{i,0}\,\hat{c}_{0,1}\,\hat{c}_{0,0}\right) c'_{\Lambda,2}\right],$$
$$c_3 := 2S\,(\gamma!)^4\,[(2\gamma)!]^{-3}\,(2\gamma+1)^{-1}\left[\tilde{c}_{3,2\gamma}\,c_{\Lambda,0} + 2\gamma\,\tilde{c}_{3,2\gamma-1}\,c'_{\Lambda,1} + \gamma(2\gamma-1)\,\tilde{c}_{3,2\gamma-2}\,c'_{\Lambda,2}\right].$$

Здесь $\operatorname{ess\,sup}$ — существенный супремум [20, гл. III, п. 1, подп. 11]. При получении оценки (4.14) используется оценка остаточного члена ПКФГ [26, гл. 3, § 5, п. 2]. На основании оценок (4.10), (4.13), (4.14) приходим к утверждению:

Теорема 4.2. *Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $\gamma, L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда функционалы $\hat{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ в равномерной операторной топологии к соответствующим функционалам $G(x)$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$ с порядком аппроксимации $O(L^{-3})$.*

Определения и основные сведения, касающиеся сходимости последовательностей операторов в различных топологиях, см. [20, гл. VI, п. 1, подп. 1–3].

На основании оценок (4.8), (4.10), (4.13), (4.14), теоремы 4.1 и плотности множества $C^3(\partial\Omega)$ в пространстве $C(\partial\Omega)$ получаем также утверждение:

Следствие 4.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $\gamma, L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда функционалы $\hat{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ к соответствующим функционалам $G(x)$ $[C(\partial\Omega \to \mathbb{C}]$ в сильной операторной топологии равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$*

Заметим, что с учетом формулы (2.3) интегралы по ρ в выражениях для $\hat{G}_i(x)$ $(i = 1, 2)$ вычисляются аналитически.

Теорема 4.3. *Пусть $\partial\Omega \in C^4$, $L/2 \in \mathbb{N}$, $f \in H_L$, $\ddot{f} := \ddot{\mathbf{P}}_L f$. Тогда функция $\hat{G}(x)f$ непрерывна на множестве Ω_D и может быть доопределена до непрерывной на замыканиях $\overline{\Omega_D^{\pm}}$ с помощью соответствующих равномерно сходящихся по $s \in I_S$ пределов:*

$$\lim_{d\to\pm 0} \hat{G}(\tilde{x}_d(s))f = \pm 2^{-1}\ddot{f}(s) + \hat{G}(\tilde{x}(s))f. \tag{4.15}$$

Доказательство. Так как Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$ (см. лемму 2.1), то в силу определения все $\alpha_{s,l}$ $(l \in \mathbb{Z})$ непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, при этом $\alpha_{s,l} \leq \alpha_{s,l+1}$. Следовательно, в силу теоремы 2.2 значения $\rho_{d,s,l}$ $(l \in \mathbb{Z})$ непрерывно зависят от $(d, s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ и $\rho_{d,s,l} \leq \rho_{d,s,l+1}$. Заметим также, что $\ddot{f} \in C(\partial\Omega)$, и так как $\left(\{s_k - s\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \Xi_s\right) \subseteq \{\alpha_{s,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$, то на каждом подмножестве, выделенном из множества $\Upsilon_l := \left\{(s, \sigma) :\ s \in \overline{I_S},\ \sigma \in [\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}]\right\}$ $(l \in \mathbb{Z})$ с помощью неравенства $\alpha_{s,l} < \alpha_{s,l+1}$, существуют непрерывные производные $\partial_\sigma \ddot{f}^{(j)}(s + \sigma)$ $(j = 1, 2)$, которые при $\alpha_{s,l} = \alpha_{s,l+1}$ могут быть доопределены по непрерывности на все множество Υ_l. Поэтому в силу следствия 2.2 функции $\ddot{B}_i(d, s, \rho)f$ $(i = 1, 2)$ непрерывны на множестве $\tilde{\Upsilon}'$, а на каждом подмножестве, выделенном из множества $\tilde{\Upsilon}'_l := \left\{(d, s, \rho) : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S},\quad \rho \in [\rho_{d,s,l}, \rho_{d,s,l+1}]\right\}$ $(l \in \mathbb{Z})$ с помощью неравенства $\rho_{d,s,l} < \rho_{d,s,l+1}$, существуют непрерывные производные $\partial^j_\rho \ddot{B}_i(d, s, \rho)f$ $(j = 1, 2)$, которые при $\rho_{d,s,l} = \rho_{d,s,l+1}$ могут быть доопределены по непрерывности на все множество $\tilde{\Upsilon}'_l$. Следовательно, в силу леммы 2.2 и равенств $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} \tilde{\Upsilon}'_l = \tilde{\Upsilon}'$, $\hat{B}_i(d, s, \rho_{d,s,l})f = \ddot{B}_i(d, s, \rho_{d,s,l})f$ (значения $\rho_{d,s,l}$ являются точками коллокации) функции $\hat{B}_i(d, s, \rho)f$ $(i = 1, 2)$ непрерывны на множестве $\tilde{\Upsilon}'$. Учитывая также, что значение $\rho = 0$ является точкой коллокации ($\rho_{d,s,k+1} = 0$, если $s \in [s_k, s_{k+1})$), имеем при любых $(d, s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ равенства:

$$\hat{B}_2(d, s, 0)f = \ddot{B}_2(d, s, 0)f = \tilde{\delta}_2(d, s, 0)\ddot{f}(s + \sigma_{d,s}(0)) = \ddot{f}(s). \tag{4.16}$$

Отсюда по аналогии с функциями $G_i(x)f$ $(f \in C(\partial\Omega),\ i = \overline{1, 2})$ приходим к выводу, что функции $\hat{G}_1(x)f$, $\hat{G}_2(x)f$ $(f \in H_L)$ непрерывны на множествах $\overline{\Omega_D}$, Ω_D соответственно, и в силу равенств (4.16) функция $\hat{G}_2(x)f$ может быть доопределена до непрерывной на замыканиях $\overline{\Omega_D^{\pm}}$ с помощью равномерно сходящихся по $s \in \overline{I_S}$ пределов:

$$\lim_{d\to\pm 0} \hat{G}_2(\tilde{x}_d(s))f = \pm 2^{-1}\hat{B}_2(d, s, 0)f = \pm 2^{-1}\ddot{f}(s) \tag{4.17}$$

(ср. с пределами (4.4)).

Так как Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, то в силу определения все $\beta_{s,l}$ ($l \in \mathbb{Z}$) непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, при этом $\beta_{s,l} \le \beta_{s,l+1}$. Поэтому узлы ПКФГ $\tilde{x}(s+\beta_{s,l,j})$ ($l \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,\gamma}$) непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$ и к тому же отстоят от точки наблюдения $\tilde{x}_d(s)$ на расстоянии не меньшем, чем D. Следовательно, функции $\tilde{B}_{3,l}(d,s)f$ ($l \in \mathbb{Z}$) непрерывны на множестве $\overline{I_D} \times \overline{I_S}$, а функция $\tilde{G}_3(x)f$, в свою очередь, непрерывна на множестве $\overline{\Omega_D}$.

Так как в соответствии с определениями (4.11) и (4.12) имеют место равенства $\hat{G}_2(\tilde{x}(s)) = 0$ и $\hat{G}(\tilde{x}(s)) = \hat{G}_1(\tilde{x}(s)) + \tilde{G}_3(\tilde{x}(s))$ ($s \in I_S$), то в силу равенств (4.17) справедливы равенства (4.15). Теорема 4.3 полностью доказана. □

5. Приближенные решения граничных интегральных уравнений и краевых задач

Используем полуаналитические аппроксимации ПДС, полученные в предыдущем параграфе, для приближенного решения ГИУ (2.4). В пространстве H_L зададим операторы $\hat{\mathbf{G}}$: $(\hat{\mathbf{G}}f)_l := \hat{G}(\tilde{x}(s_l))f$ ($f \in H_L$, $l = \overline{-L-1, L}$), а также операторы $\hat{\mathbf{G}}_\pm := \pm 2^{-1} + \hat{\mathbf{G}}$. В силу теоремы 4.2 операторы $\hat{\mathbf{G}}_\pm$ являются сеточными аппроксимациями операторов ГИУ (2.4) на сетке с узлами $\tilde{x}(s_l)$. По аналогии с операторами $\hat{\mathbf{G}}$ определим в пространстве H_L операторы $\ddot{\mathbf{G}}$, $\ddot{\mathbf{G}}_i$ ($i = 1, 3$), $\hat{\mathbf{G}}$, $\hat{\mathbf{G}}_1$, $\tilde{\mathbf{G}}_3$. Тогда $\ddot{\mathbf{G}} = \ddot{\mathbf{G}}_1 + \ddot{\mathbf{G}}_3$, $\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}}_1 + \tilde{\mathbf{G}}_3$.

Теорема 5.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \ge 2$, $\gamma, L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда операторы $\hat{\mathbf{G}}_\pm$ $[H_L]$ обратимы при достаточно больших L, и обратные операторы $\hat{\mathbf{G}}_\pm^{-1}$ $[H_L]$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. Пусть $f \in H_L$. В силу ограниченной обратимости операторов $\mathbf{G}_\pm$ $[C(\partial\Omega)]$ (см. следствие 3.1) имеем оценки:

$$\left\| \mathbf{G}_\pm \ddot{\mathbf{P}}_L f \right\|_{C(\partial\Omega)} \ge c_{-1} \left\| \ddot{\mathbf{P}}_L f \right\|_{C(\partial\Omega)} \ge c_{-1} \|f\|_{H_L}, \quad c_{-1} := \left\| \mathbf{G}_\pm^{-1} \right\|^{-1}. \tag{5.1}$$

Заметим, что $\hat{g} = -a_0(\rho_0^2)\hat{b}$. В силу следствия 2.1 производные $\partial_s \hat{b}$ и $\partial_s \rho_0$ непрерывны на множестве Θ. Поэтому с учетом формулы (2.5) производная $\partial_s a_0(\rho_0^2)$ непрерывна на множестве Θ, и с учетом оценки (2.8) (при $j = 0$) имеет место неравенство:

$$\max_{-L-1 \le l \le L} \sup_{s \in [s_l, s_{l+1}]} \left| \ddot{\mathbf{G}}(\tilde{x}(s_l))f - \mathbf{G}(\tilde{x}(s))\ddot{\mathbf{P}}_L f \right| \le c' c_{\Lambda,0} \|f\|_{H_L} h, \tag{5.2}$$

где $c' := 2S \sup\limits_{(s,s') \in \Theta} |\partial_s \hat{g}(s,s')|$.

Пусть $h \le 1$. Используя вместо оценок (2.9) оценки (2.8) при $j = 1, 2$, по аналогии с неравенствами (4.13), (4.14) получаем при условии $h \le 1$ следующие неравенства:

$$\left\| \hat{\mathbf{G}}_1 f - \ddot{\mathbf{G}}_1 f \right\|_{H_L} \le c_1' \|f\|_{H_L} h, \quad \left\| \tilde{\mathbf{G}}_3 f - \ddot{\mathbf{G}}_3 f \right\|_{H_L} \le c_3' \|f\|_{H_L} h, \tag{5.3}$$

где

$$c_1' := A_1 c_h^3 c_\omega \left[\hat{c}_{1,3} c_{\Lambda,0} + (3\hat{c}_{1,2}\hat{c}_{0,0} + 3\hat{c}_{1,1}\hat{c}_{0,1} + \hat{c}_{1,0}\hat{c}_{0,2}) c_{\Lambda,1} + 3(\hat{c}_{1,1}\hat{c}_{0,0}^2 + \hat{c}_{1,0}\hat{c}_{0,1}\hat{c}_{0,0}) c_{\Lambda,2} \right],$$
$$c_3' := 2S(\gamma!)^4 \left[(2\gamma)!\right]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} \left[\tilde{c}_{3,2\gamma} c_{\Lambda,0} + 2\gamma \tilde{c}_{3,2\gamma-1} c_{\Lambda,1} + \gamma(2\gamma-1)\tilde{c}_{3,2\gamma-2} c_{\Lambda,2} \right].$$

Пусть $h \le 3^{-1} c_{-1} / \max\{c', c_1' + c_3'\}$, и $h \le 1$. Тогда в силу неравенств (5.1)–(5.3) для любых $f \in H_L$ имеем оценки: $\left\| \hat{\mathbf{G}}_\pm f \right\|_{H_L} \ge 3^{-1} c_{-1} \|f\|_{H_L}$, которые означают, что операторы $\hat{\mathbf{G}}_\pm$ $[H_L]$ обратимы, и обратные операторы $\hat{\mathbf{G}}_\pm^{-1}$ ограничены в совокупности: $\left\| \hat{\mathbf{G}}_\pm^{-1} \right\| \le 3/c_{-1}$. Теорема 5.1 доказана. □

Определение 5.1. *Будем говорить, что последовательности ограниченных операторов* $\{\mathbf{A}_n\,[X\to Y]\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\mathbf{B}_n\,[X\to Y]\}_{n=1}^{\infty}$ *аппроксимационно эквивалентны в равномерной операторной топологии с порядком аппроксимации* $O(n^{-k})$ $(k\in\mathbb{N})$*, если существует постоянная* $c>0$*, не зависящая от* n*, такая, что при любых* $n\in\mathbb{N}$*,* $f\in X$ *выполняется неравенство:* $\|\mathbf{A}_n f-\mathbf{B}_n f\|_Y\le c\,n^{-k}\,\|f\|_X$.

На основании теорем 4.2, 5.1, следствия 3.1, оценок (4.9) и $\|\mathbf{P}_L\|\le 1$, $\|\ddot{\mathbf{P}}_L\|\le c_{\Lambda,0}$ получаем следующие утверждения:

Следствие 5.1. *Пусть* $\partial\Omega\in C^{2\gamma+1}$*,* $\gamma\ge 2$*,* $\gamma, L/2\in\mathbb{N}$*. Тогда последовательности операторов* $\{\hat{\mathbf{G}}_{\pm}^{-1}\mathbf{P}_L\,[C^3(\partial\Omega)\to H_L]\}_{L/2=1}^{\infty}$ *и* $\{\mathbf{P}_L\mathbf{G}_{\pm}^{-1}\,[C^3(\partial\Omega)\to H_L]\}_{L/2=1}^{\infty}$ *аппроксимационно эквивалентны в равномерной операторной топологии с порядком аппроксимации* $O(L^{-3})$*. Операторы* $\ddot{\mathbf{P}}_L\hat{\mathbf{G}}_{\pm}^{-1}\mathbf{P}_L$ $[C^3(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)]$ *сходятся при* $L\to\infty$ *в равномерной операторной топологии к соответствующим операторам* $\mathbf{G}_{\pm}^{-1}$ $[C^3(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)]$ *с порядком аппроксимации* $O(L^{-3})$*. Операторы* $\ddot{\mathbf{P}}_L\hat{\mathbf{G}}_{\pm}^{-1}\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega)]$ *сходятся при* $L\to\infty$ *к соответствующим операторам* $\mathbf{G}_{\pm}^{-1}$ $[C(\partial\Omega)]$ *в сильной операторной топологии.*

Следствие 5.1 позволяет получить сеточные и приближенные решения ГИУ (2.4): $\hat{v}_{\pm}:=\hat{\mathbf{G}}_{\pm}^{-1}\mathbf{P}_L w\in H_L$, $\ddot{v}_{\pm}:=\ddot{\mathbf{P}}_L\hat{\mathbf{G}}_{\pm}^{-1}\mathbf{P}_L w\in C(\partial\Omega)$ соответственно.

Зададим функционалы $\hat{R}_{\pm}(x):=\hat{G}(x)\hat{\mathbf{G}}_{\pm}^{-1}$ $(x\in\overline{\Omega_D^{\pm}})$, являющиеся при $x\in\Omega_D^{\pm}$ аппроксимациями резольвентных функционалов $R_{\pm}(x)$ задач (2.1), а при $x=\tilde{x}(s)$ $(s\in I_S)$ — аппроксимациями «прямых» значений функционалов $R_{\pm}(x)$ на границе $\partial\Omega$. С учетом теорем 4.1, 4.2, 5.1 и следствий 3.1, 5.1 делаем вывод:

Следствие 5.2. *Пусть* $\partial\Omega\in C^{2\gamma+1}$*,* $\gamma\ge 2$*,* $\gamma, L/2\in\mathbb{N}$*. Тогда функционалы* $\hat{R}_{\pm}(x)$ $[H_L\to\mathbb{C}]$*,* $\hat{R}_{\pm}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega)\to\mathbb{C}]$ *ограничены в совокупности равномерно по* $x\in\overline{\Omega_D^{\pm}}$*. Функционалы* $\hat{R}_{\pm}(x)\mathbf{P}_L$ $[C^3(\partial\Omega)\to\mathbb{C}]$ *сходятся при* $L\to\infty$ *в равномерной операторной топологии к соответствующим функционалам* $R_{\pm}(x)$ $[C^3(\partial\Omega)\to\mathbb{C}]$ *равномерно по* $x\in\overline{\Omega_D^{\pm}}$ *с порядком аппроксимации* $O(L^{-3})$*. Функционалы* $\hat{R}_{\pm}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega)\to\mathbb{C}]$ *сходятся при* $L\to\infty$ *в сильной операторной топологии к соответствующим функционалам* $R_{\pm}(x)$ $[C(\partial\Omega)\to\mathbb{C}]$ *равномерно по* $x\in\overline{\Omega_D^{\pm}}$.

Зададим функции $\hat{u}_{\pm}(x):=\hat{R}_{\pm}(x)\mathbf{P}_L w$ $(x\in\overline{\Omega_D^{\pm}})$, являющиеся при $x\in\Omega_D^{\pm}$ аппроксимациями решений задач (2.1) $u_{\pm}(x)$, а при $x=\tilde{x}(s)$ $(s\in I_S)$ — аппроксимациями «прямых» значений функций $u_{\pm}(x)$ на границе $\partial\Omega$. На основании следствия 5.2 сформулируем основной результат настоящей работы:

Следствие 5.3. *Пусть* $\partial\Omega\in C^{2\gamma+1}$*,* $\gamma\ge 2$*,* $\gamma, L/2\in\mathbb{N}$*,* $c>0$*. Тогда функции* $\hat{u}_{\pm}(x)$ *сходятся с кубической скоростью при* $L\to\infty$ *к соответствующим функциям (2.1)* $u_{\pm}(x)$ *равномерно относительно* $x\in\overline{\Omega_D^{\pm}}$ *и граничных функций* $w\in C^3(\partial\Omega)$*, удовлетворяющих условию* $\|w\|_{C^3(\partial\Omega)}\le c$*. Кроме того, функции* $\hat{R}_{\pm}(x)\mathbf{P}_L w_{\varepsilon}$ *сходятся к функции* $u_{\pm}(x)$ *при* $L\to\infty$*,* $\varepsilon\to+0$ *равномерно относительно* $x\in\overline{\Omega_D^{\pm}}$*, если* $\|w_{\varepsilon}-w\|_{C(\partial\Omega)}\le\varepsilon$*,* $w, w_{\varepsilon}\in C(\partial\Omega)$.

С учетом равенств $\hat{u}_{\pm}(x)=\hat{G}(x)\hat{v}_{\pm}$, $\ddot{\mathbf{P}}_L\hat{v}_{\pm}=\ddot{v}_{\pm}$ и теоремы 4.3, следствий 5.1, 5.3 и формулы (4.6) получаем также следующее утверждение:

Следствие 5.4. *Пусть* $\partial\Omega\in C^{2\gamma+1}$*,* $\gamma\ge 2$*,* $\gamma, L/2\in\mathbb{N}$*,* $c>0$*. Тогда при условии* $w\in C(\partial\Omega)$ *функции* $\hat{u}_{\pm}(x)$ *непрерывны на соответствующих множествах* $\Omega_D^{\pm}$ *и могут быть доопределены до непрерывных на замыканиях* $\overline{\Omega_D^{\pm}}$ *с помощью равномерно сходящихся по* $s\in I_S$ *пределов:*

$$\hat{u}_{\pm}(\tilde{x}_{\pm 0}(s)):=\lim_{d\to\pm 0}\hat{u}_{\pm}(\tilde{x}_d(s))=\pm 2^{-1}\ddot{v}_{\pm}(s)+\hat{u}_{\pm}(\tilde{x}(s)).$$

Функции $\hat{u}_\pm(\tilde{x}_{\pm 0}(s))$ сходятся с кубической скоростью при $L \to \infty$ к соответствующим граничным функциям $w(s)$ равномерно относительно $s \in I_S$ и функций $w \in C^3(\partial\Omega)$, удовлетворяющих условию $\|w\|_{C^3(\partial\Omega)} \leq c$. Кроме того, функции $\hat{R}_\pm(\tilde{x}_{\pm 0}(s))\mathbf{P}_L w_\varepsilon$ сходятся к функции $w(s)$ при $L \to \infty$, $\varepsilon \to +0$ равномерно относительно $s \in I_S$, если $\|w_\varepsilon - w\|_{C(\partial\Omega)} \leq \varepsilon$, $w, w_\varepsilon \in C(\partial\Omega)$.

6. Отсутствие равномерной сходимости аппроксимаций потенциала двойного слоя в случае использования стандартных квадратурных формул

В настоящем параграфе исследуются причины возникновения эффекта пограничного слоя в случае ПДС. Как было отмечено во введении, для вычисления ПДС внутри области Ω традиционно используются ПКФГ. Вычислительные эксперименты показывают, что скорость сходимости приближенных решений задач (2.1) при этом существенно снижается вблизи границы $\partial\Omega$. Данное явление мы связываем с отсутствием равномерной сходимости таких аппроксимаций ПДС вблизи границы области.

Отсутствие равномерной сходимости аппроксимаций функционалов $\ddot{G}(x)\mathbf{P}_L$ вблизи границы достаточно очевидно в тех случаях, когда точка $\tilde{x}(s)$ — проекция точки наблюдения $x = \tilde{x}_d(s)$ на кривую $\partial\Omega$ — может совпадать с одним из узлов ПКФГ при сколь угодно больших значениях L. Например, рассмотрим аппроксимации $\breve{G}(x)$ функционалов $\ddot{G}(x)$ ($x = \tilde{x}_d(s)$, $s \in I_S$, $d \in I_D$), выполненные исключительно на основе ПКФГ:

$$\breve{G}(x)f := 2^{-1}h \sum_{l=-L-1}^{L} \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j \ddot{B}(d, s, s_{l,j})f, \quad s_{l,j} := 2^{-1}(s_l + s_{l+1}) + 2^{-1}h z_j, \quad f \in H_L.$$

В силу равенств (2.5), (2.6) и $\varphi_6(s,s) = -1$ функции $g(\tilde{x}_d(s), s) \sim d^{-1} \to \infty$ при $d \to 0$ и фиксированных $s \in I_S$. Поэтому значения $\ddot{B}(d, s_{l,j}, s_{l,j})f$ неограниченно возрастают по модулю при $d \to 0$, $\ddot{f}(s_{l,j}) \neq 0$ ($\ddot{f} := \ddot{\mathbf{P}}_L f$) и фиксированных L. Так как $\ddot{B}(d, s_{l,j}, s')f$ непрерывны по $d \in \overline{I_D}$ при фиксированных $s' \neq s_{l,j}$, то значения $\breve{G}(\tilde{x}_d(s_{l,j}))f$ также неограниченно возрастают по модулю при $d \to 0$, $\ddot{f}(s_{l,j}) \neq 0$ и фиксированных L. Пусть $f \in C^3(\partial\Omega)$ и $f(s) \neq 0$ при некотором $s \in I_S$. Тогда согласно оценке (4.9) при любых достаточно больших L существуют значения $s_{l,j}$, зависящие от L, такие, что $\ddot{f}(s_{l,j}) \neq 0$ ($\ddot{f} := \ddot{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L f$). Следовательно, равномерная по $(d,s) \in I_D \times I_S$ сходимость аппроксимирующих функций $\breve{G}\left(\tilde{x}_d(s)\right)\mathbf{P}_L f$ к точной функции $G(\tilde{x}_d(s))f$ при $L \to \infty$ невозможна, так как точные функции $G(\tilde{x}_d(s))f$ с помощью равенств (4.5) можно доопределить до непрерывных функций на множествах $\overline{\Omega_D^\pm}$.

Рассмотрим аппроксимации $\tilde{G}(\tilde{x}_d(s))$ функционалов $\ddot{G}(\tilde{x}_d(s))$, выполненные исключительно на основе ПКФГ таким образом, что точка $\tilde{x}(s)$ не может совпадать ни с одним из узлов ПКФГ. Для этого введем в рассмотрение аппроксимации функционалов $\ddot{G}_{1-2}(x) := G_{1-2}(x)\ddot{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \to \mathbb{C}]$, где $G_{1-2}(x) := G_1(x) + G_2(x)$, с помощью ПКФГ с γ' узлами:

$$\tilde{G}_{1-2}(x)f := \sum_{l=-3L-2}^{3L+2} h_{s,l} \sum_{j=1}^{\gamma'} \omega_j \ddot{B}'(d, s, s + \alpha_{s,l,j})f.$$

Здесь $x = \tilde{x}_d(s)$, $d \in \overline{I_D}$, $s \in I_S$, $f \in H_L$, $\alpha_{s,l,j} := \bar{\alpha}_{s,l} + h_{s,l} z_j$, $\bar{\alpha}_{s,l} := 2^{-1}\left(\alpha_{s,l} + \alpha_{s,l+1}\right)$, $h_{s,l} := 2^{-1}\left(\alpha_{s,l+1} - \alpha_{s,l}\right)$; $\ddot{B}'(d,s,s') := \ddot{B}(d,s,s')$, если $s \neq s'$, и $\ddot{B}'(d,s,s) := 0$. Заметим, что сумму по $l = \overline{-3L-2, 3L+2}$ здесь можно заменить суммой по $l \in \mathbb{Z}$, поскольку все дополнительные слагаемые равны нулю ($h_{s,l} = 0$) при любых $s \in \overline{I_S}$, даже если $\Sigma'_s = -S$, $\Sigma''_s = S$.

Будем полагать $\tilde{G}(x) := \tilde{G}_{1-2}(x) + \tilde{G}_3(x)$. Аппроксимации $\tilde{G}(x)$ отличаются от аппроксимаций $\hat{G}(x)$ только тем, что для вычисления функционалов $\ddot{G}_{1-2}(x)$ вместо точного интегрирования по переменной ρ используются ПКФГ.

Теорема 6.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда функция $\tilde{G}(\tilde{x}_d(s))f$ при любых фиксированных $s \in I_S$, $L/2 \in \mathbb{N}$, $f \in H_L$ непрерывна на множестве $d \in \overline{I_D}$.*

Доказательство. Пусть значения $s \in [s_k, s_{k+1})$ $(-L-1 \le k \le L)$, $L/2 \in \mathbb{N}$, $f \in H_L$ фиксированы. Так как ПКФГ являются формулами открытого типа (см. [26, гл. 3, § 5, п. 1]), то $z_j \neq \pm 1$ $(j = \overline{1,\gamma})$, и точка $\tilde{x}(s)$ не совпадает ни с одним из узлов ПКФГ $\tilde{x}(s+\alpha_{s,l,j})$ (кроме $\tilde{x}(s+\alpha_{s,k,j})$, если $h_{s,k} = 0$, но тогда и $\ddot{B}'(d,s,s+\alpha_{s,k,j})f := 0$ при $d \in \overline{I_D}$). Производная $d\xi_s(\sigma)/d\sigma$ положительна и непрерывна на множестве Ξ_s (см. лемму 2.1), и $\alpha_{s,l,j} \in \Xi_s$. Следовательно, можно определить постоянную $c_s > 0$ — наименьшее из расстояний от точек $\tilde{x}_d(s)$ $(d \in \overline{I_D})$ до узлов ПКФГ $\tilde{x}(s+\alpha_{s,l,j})$ $(l \neq k$, если $h_{s,k} = 0)$. А именно, учитывая, что $\alpha_{s,l,1} < \alpha_{s,l,2} < \ldots < \alpha_{s,l,\gamma}$, имеют место формулы:

$$c_s := \begin{cases} \min\{-\xi_s(\alpha_{s,k,\gamma}), \xi_s(\alpha_{s,k+1,1})\} & \big(s \in (s_k, s_{k+1})\big), \\ \min\{-\xi_s(\alpha_{s,k-1,\gamma}), \xi_s(\alpha_{s,k+1,1})\} & (s = s_k). \end{cases}$$

Поэтому все функции $\ddot{B}(d,s,s+\alpha_{s,l,j})f$ $(l \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1,\gamma})$, и, как следствие, функция $\tilde{G}_{1-2}(\tilde{x}_d(s))f$ непрерывны по $d \in \overline{I_D}$. В теореме 4.3 показано, что функция $\tilde{G}_3(\tilde{x}_d(s))f$ также непрерывна на множестве $\overline{I_D}$. Теорема 6.1 доказана. $\square$

При условии $\partial\Omega \in C^{n+1}$ для любой замкнутой области $\Omega' \subset \Omega_D$ можно определить константы $\tilde{c}_{1-2,j} := \sup\limits_{x\in\Omega',\, s'\in I_S} \left|\partial^j_{s'} g(x,s')\right|$ $(j = \overline{0,n})$ и убедиться при $x \in \Omega'$ в справедливости оценок $\left\|\tilde{G}(x)\right\| \le 2Sc_{\Lambda,0}\,(\tilde{c}_{1-2,0} + \tilde{c}_{3,0})$ и

$$\left|\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L f - \ddot{G}(x)\mathbf{P}_L f\right| \le (c_{1-2} + c_3)\ \|f\|_{C^2(\partial\Omega)}\, h^{2\gamma'} \quad (\partial\Omega \in C^{2\gamma'+1}),$$

где

$$c_{1-2} := 2S\,(\gamma'!)^4 \big/ \big[(2\gamma')!\big]^3 \big/ \,(2\gamma'+1)\,\big[\tilde{c}_{1-2,2\gamma'}\, c_{\Lambda,0} + 2\gamma'\,\tilde{c}_{1-2,2\gamma'-1}\, c'_{\Lambda,1} + \gamma'(2\gamma'-1)\,\tilde{c}_{1-2,2\gamma'-2}\, c'_{\Lambda,2}\big].$$

По аналогии с теоремами 4.1, 4.2 и следствием 4.1 получаем утверждение:

Теорема 6.2. *Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1} \cap C^{2\gamma'+1}$, $\gamma,\gamma' \ge 2$, $\gamma,\gamma',L/2 \in \mathbb{N}$, Ω' — замкнутое подмножество области Ω_D. Тогда функционалы $\tilde{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$, $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ ограничены в совокупности равномерно по $x \in \Omega'$. Функционалы $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ в равномерной операторной топологии к соответствующим функционалам $G(x)$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ равномерно по $x \in \Omega'$ с порядком аппроксимации $O(L^{-3})$. Функционалы $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ к соответствующим функционалам $G(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ в сильной операторной топологии равномерно по $x \in \Omega'$.*

Свойства аппроксимаций $\tilde{G}(x)$ на границе $\partial\Omega$ исследованы в следующей теореме:

Теорема 6.3. *Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \ge 2$, $\gamma,\gamma',L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда функционалы $\tilde{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$, $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ ограничены в совокупности равномерно по $x \in \partial\Omega$. Функционалы $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ в равномерной операторной топологии к соответствующим функционалам $G(x)$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ равномерно по $x \in \partial\Omega$ с порядком аппроксимации $O(L^{-2}\ln L^{-1})$. Функционалы $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ к соответствующим функционалам $G(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ в сильной операторной топологии равномерно по $x \in \partial\Omega$.*

Доказательство. Имеем равенство: $\tilde{g} = -\tilde{a}_0\tilde{b}$, где $\tilde{g}(s,\sigma) := \hat{g}(s, s+\sigma)$, $\tilde{a}_0(s,\sigma) := a_0(\tilde{\rho}_0^2)$, $\tilde{\rho}_0(s,\sigma) := \rho_0(s, s+\sigma)$, $\tilde{b}(s,\sigma) := \hat{b}(s, s+\sigma)$. В силу следствия 2.1 производные $\partial_\sigma^j\tilde{b}$, $\partial_\sigma^j\tilde{\rho}_0$ $(j = \overline{0,2})$ непрерывны на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$. С учетом формулы (2.5) функции $\tilde{a}_0$, $\partial_\sigma\tilde{a}_0$ непрерывны на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$, а функция $\partial_\sigma^2\tilde{a}_0$ может быть представлена в виде суммы $\tilde{a}_1 \ln\sigma^2 + \tilde{a}_2$, где функции $\tilde{a}_i(s,\sigma)$ $(i = 1,2)$ непрерывны на $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$. Следовательно, функции $\tilde{g}_0 := \tilde{g}$, $\tilde{g}_1 := \partial_\sigma\tilde{g}_0$ непрерывны на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$, а функция $\partial_\sigma^2\tilde{g}$ может быть представлена в виде суммы $\tilde{g}_2 \ln\sigma^2 + \tilde{g}_3$, где функции $\tilde{g}_j(s,\sigma)$ $(j = 2,3)$ непрерывны на $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$. Зададим константы: $\tilde{c}_{1,j} := \sup\limits_{(s,\sigma)\in\overline{I_S}\times\overline{I_S}} |\tilde{g}_j|$ $(j = \overline{0,3})$. В силу оценки $\left\|\tilde{G}(\tilde{x}(s))\right\| \leq 2Sc_{\Lambda,0}\left(\tilde{c}_{1,0} + \tilde{c}_{3,0}\right)$, справедливой при любом $s \in I_S$, и неравенства $\|\mathbf{P}_L\| \leq 1$ функционалы $\tilde{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$, $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ ограничены равномерно по $x \in \partial\Omega$.

Пусть $x = \tilde{x}(s)$ $(s \in I_S)$, $f \in C^3(\partial\Omega)$, $\ddot{f} := \ddot{\mathbf{P}}_L\mathbf{P}_L f$, $h < \min\{S^{-1}, e^{-1}\}$. Используя формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [27, п. 318] и формулы $\sum_{j=1}^{\gamma'}\omega_j = 2$, $\sum_{j=1}^{\gamma'}\omega_j(\alpha_{s,l,j} - \bar{\alpha}_{s,l}) = 0$, $\omega_j > 0$ [26, гл. 3, § 5, п. 1] и

$$\bigcup_{l\in\mathbb{Z}}[\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}] = \Xi_s, \quad |\Xi_s| \leq 2S,$$

получаем оценки:

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{G}_{1-2}(x)\mathbf{P}_L f - \ddot{G}_{1-2}(x)\mathbf{P}_L f\right| \\
&\quad= \left|\sum_{l=-3L-2}^{3L+2}\left(\int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} \tilde{g}(s,\sigma)\ddot{f}(s+\sigma)\,d\sigma \right.\right.\\
&\qquad\left.\left. -h_{s,l}\sum_{j=1}^{\gamma'}\omega_j\,\tilde{g}(s,\alpha_{s,l,j})\,\ddot{f}\left(s+\alpha_{s,l,j}\right)\right)\right| \\
&\quad= \left|\sum_{l=-3L-2}^{3L+2}\left[\int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}}\int_{\bar{\alpha}_{s,l}}^{\sigma}\partial_\zeta^2\left(\tilde{g}(s,\zeta)\ddot{f}(s+\zeta)\right)(\sigma-\zeta)\,d\zeta\,d\sigma \right.\right.\\
&\qquad\left.\left. -h_{s,l}\sum_{j=1}^{\gamma'}\omega_j\int_{\bar{\alpha}_{s,l}}^{\alpha_{s,l,j}}\partial_\zeta^2\left(\tilde{g}(s,\zeta)\ddot{f}(s+\zeta)\right)(\alpha_{s,l,j}-\zeta)\,d\zeta\right]\right| \\
&\quad\leq 2S\left(c_1h^2\ln h^{-2} + c_2h^2\right)\|f\|_{C^2(\partial\Omega)}\,.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь $c_1 := 2\tilde{c}_{1,2}c_{\Lambda,0}$, $c_2 := \left((-4\ln 2 + 4)\tilde{c}_{1,2} + \tilde{c}_{1,3}\right)c_{\Lambda,0} + 2\tilde{c}_{1,1}c'_{\Lambda,1} + \tilde{c}_{1,0}c'_{\Lambda,2}$. При получении неравенства (6.1) использовались следующие оценки:

$$\left|\int_{\bar{\alpha}_{s,l}}^{\sigma}\ln\zeta^{-2}\,d\zeta\right| \leq \max\left\{\int_0^{2h}\ln\zeta^{-2}\,d\zeta,\ 2^{-1}h\sup_{\zeta\in[h,\,S]}\left|\ln\zeta^{-2}\right|\right\} = 2h\ln(2h)^{-2} + 4h,$$

где $\sigma \in [\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}]$. Вместе с оценками (4.14), (4.10) оценки (6.1) доказывают равномерную по $x \in \partial\Omega$ сходимость в равномерной операторной топологии функционалов $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ с порядком аппроксимации $O(h^2\ln h)$. С учетом ограниченности совокупности функционалов $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ $(x \in \partial\Omega)$, оценок (4.8), (6.1) и плотности множества $C^3(\partial\Omega)$ в пространстве $C(\partial\Omega)$ получаем также равномерную по $x \in \partial\Omega$ сильную операторную сходимость функционалов $\tilde{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$. Теорема 6.3 полностью доказана. □

Следствие 6.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma'+1} \cap C^{2\gamma+1}$, $\gamma, \gamma' \geq 2$, $\gamma, \gamma', L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда при $L \to \infty$ и фиксированных $s \in I_S$, $d_0 \in (0, D]$ отсутствует равномерная по $|d| \in (0, d_0]$ сходимость в* *сильной операторной топологии функционалов* $\tilde{G}(\tilde{x}_d(s))\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ *к соответствующим функционалам* $G(\tilde{x}_d(s))$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$.

Доказательство. Пусть $f \in C(\partial\Omega)$ и $f(s) \neq 0$ при фиксированном $s \in I_S$. Тогда функция $j(d) := G\left(\tilde{x}_d(s)\right) f$ непрерывна при $d \in I_D$ и в силу предельных равенств (4.3) терпит разрыв в точке $d = 0$: $\lim\limits_{d\to\pm 0} j(d) - j(0) = \pm 2^{-1} f(s) \neq 0$. В соответствии с теоремой 6.1 функция $\tilde{j}(d) := \tilde{G}\left(\tilde{x}_d(s)\right) \mathbf{P}_L f$ непрерывна на множестве $\overline{I_D}$, и согласно теоремам 6.2, 6.3 имеет место поточечная сходимость аппроксимаций $\tilde{j}(d)$ к точной функции: $\tilde{j}(d) \to j(d)$ при $L \to \infty$ и любом фиксированном $d \in \overline{I_D}$. Поэтому при любом $d_0 \in (0, D]$ равномерная по $|d| \in (0, d_0]$ сходимость аппроксимаций $\tilde{j}(d)$ к точной функции $j(d)$ невозможна. Следствие 6.1 доказано. □

Зададим функционалы $\tilde{R}_\pm(x) := \left(\tilde{G}_{1-2}(x) + \tilde{G}_3(x)\right)\hat{\mathbf{G}}_\pm^{-1}$ и функции $\tilde{u}_\pm(x) := \tilde{R}_\pm(x)w$ $(x \in \overline{\Omega_\pm})$, которые при $x \in \Omega_\pm$ являются аппроксимациями резольвентных функционалов $R_\pm(x)$ и решений $u_\pm(x)$ краевой задачи (2.1), а при $x = \tilde{x}(s)$ $(s \in I_S)$ — аппроксимациями "прямых"значений функционалов $R_\pm(x)$ и функций $u_\pm(x)$ на границе $\partial\Omega$. С помощью теорем 6.2, 6.3 по аналогии со следствием 5.3 получаем следующее утверждение:

Следствие 6.2. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2\gamma'+1} \cap C^{2\gamma+1}$, $\gamma, \gamma' \geq 2$, $\gamma, \gamma', L/2 \in \mathbb{N}$, $c > 0$, Ω' *— замкнутое подмножество области* Ω_D, $d_0 \in (0, D]$. *Тогда функции* $\tilde{u}_\pm(x)$ *сходятся с кубической скоростью при* $L \to \infty$ *к соответствующим решениям краевой задачи (2.1)* $u_\pm(x)$ *равномерно относительно* $x \in \Omega'$ *и граничных функций* $w \in C^3(\partial\Omega)$, *удовлетворяющих условию* $\|w\|_{C^3(\partial\Omega)} \leq c$. *Функции* $\tilde{u}_\pm(\tilde{x}(s))$ *сходятся при* $L \to \infty$ *к соответствующим функциям* $u_\pm(\tilde{x}(s))$ *с порядком аппроксимации* $O(L^{-2}\ln L^{-1})$ *равномерно относительно* $s \in I_S$ *и граничных функций* $w \in C^3(\partial\Omega)$, *удовлетворяющих условию* $\|w\|_{C^3(\partial\Omega)} \leq c$. *Кроме того, функции* $\tilde{R}_\pm(x)\mathbf{P}_L w_\varepsilon$ *сходятся к функции* $u_\pm(x)$ *при* $L \to \infty$, $\varepsilon \to +0$ *равномерно относительно* $x \in \Omega'$ *и* $x \in \partial\Omega$, *если* $\|w_\varepsilon - w\|_{C(\partial\Omega)} \leq \varepsilon$, $w, w_\varepsilon \in C(\partial\Omega)$.

На основании следствия 6.2, предельных равенств $\lim\limits_{d\to\pm 0} u_\pm(\tilde{x}_d(s)) - u_\pm(\tilde{x}(s)) = \pm 2^{-1} v_\pm(s)$ и непрерывности по $d \in \overline{I_D}$ функций $\tilde{u}_\pm(\tilde{x}_d(s))$ при фиксированном $s \in I_S$ получаем по аналогии со следствием 6.1 утверждение об отсутствии равномерной сходимости приближенных решений $\tilde{u}_\pm(x)$ вблизи границы $\partial\Omega$:

Следствие 6.3. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2\gamma'+1} \cap C^{2\gamma+1}$, $\gamma', \gamma \geq 2$, $\gamma, \gamma', L/2 \in \mathbb{N}$, $d_0 \in (0, D]$, $w \in C(\partial\Omega)$, *а также* $v_\pm(s) \neq 0$ *при некотором* $s \in I_S$. *Тогда при* $L \to \infty$ *отсутствует равномерная по* $\pm d \in (0, d_0]$ *сходимость функций* $\tilde{u}_\pm(\tilde{x}_d(s))$ *к решению краевой задачи (2.1)* $u_\pm(\tilde{x}_d(s))$.

7. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение задачи (2.1) во внешности единичного круга с граничной функцией $w = \cos\varphi$ и коэффициентом диссипации $k = \pi$. Точное решение $\bar{u}$ такой задачи вычисляется по формуле: $\bar{u} = \cos\varphi K_1(\pi r') \,/\, K_1(\pi)$. Здесь $\varphi = s \in [-\pi, \pi)$, $r' = 1 - d > 1$ — полярные угол и радиус с полюсом в центре круга, $K_1(z)$ — функция Макдональда. Для данной геометрии треть радиуса круга Ляпунова $D = 2/(3\pi)$; полуширины длин дуг, на которых осуществляется точное интегрирование по переменной ρ: $\Sigma''_s = -\Sigma'_s = \arcsin\left(2 \,/\, (3\pi)\right)$. При вычислении полуаналитических решений $\hat{u}$ (см. следствие 5.3) интегралы по ρ в выражениях для $\hat{G}_i(x)$ $(i = 1, 2)$ вычисляются с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Для этого ряды в формуле (2.3) заменяются конечными суммами, образованными степенями z^{2k} $(k = \overline{0, 10})$. В выражениях для $\tilde{G}_3(x)$ используются ПКФГ с $\gamma = 2$ узлами. Приближенные решения $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$ на основе ПКФГ (см.

следствие 6.2) вычисляются со значениями $\gamma' = 12$, 24, 48 соответственно и $\gamma = 2$. Все вычисления осуществляются с двойной точностью. Решения $\hat{u}$, $\tilde{u}_i$ $(i = \overline{1,3})$, $\bar{u}$ находим при фиксированных $d \in [-D, 0)$ в точках $\tilde{x}_d(s_{l/4})$ $(s_{l/4} = lh/4,\ l = \overline{-4L-4, 4L+3})$, поэтому эти решения можно рассматривать как функции в пространстве H_{4L+3}. При фиксированных d вычисляем максимумы модулей абсолютных погрешностей приближенных решений $\hat{u}$, $\tilde{u}_i$: $\triangle\hat{u} := \|\hat{u}-\bar{u}\|_{H_{4L+3}}$, $\triangle\tilde{u}_i := \|\tilde{u}_i-\bar{u}\|_{H_{4L+3}}$. В табл. 1 в каждой основной ячейке представлены значения $\triangle\hat{u}$, $\triangle\tilde{u}_1$, $\triangle\tilde{u}_2$, $\triangle\tilde{u}_3$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Можно заметить, что решение $\hat{u}$ обладает кубической скоростью сходимости, сохраняющейся даже при очень малых расстояниях $|d|$ до границы $\partial\Omega$, что хорошо согласуется со следствием 5.3. Скорости сходимости решений $\tilde{u}_i$ снижаются от кубической до нулевой по мере приближения точек x к границе $\partial\Omega$ при фиксированных шагах дискретизации h и восстанавливаются до кубической по мере уменьшения h при фиксированных d, что согласуется со следствиями 6.2 и 6.3.

Были проведены расчеты, где для аппроксимации функционалов $\ddot{G}_{1-2}(x)$ вместо ПКФГ использовались квадратурные формулы Ньютона-Котеса замкнутого типа [26, гл. 3, § 4, п. 1]. Тогда при приближении точек x к узлам квадратурных аппроксимаций, а именно: точек $\tilde{x}_d(s_l)$ к точкам $\tilde{x}(s_l)$ $(l = \overline{-L-1, L})$ при $d \to 0$ и фиксированных L, ошибки $\triangle\tilde{u}_i$ растут катастрофически.

В заключение отметим, что аналогичным образом, с помощью точного интегрирования по переменной ρ, могут быть получены приближенные решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, поскольку эта задача так же, как и задача Дирихле для диссипативного уравнения Гельмгольца, имеет единственное решение. Соответствующие аппроксимации ПДС были исследованы в работе автора [19].

d	$h_1 = \pi/3$	$h_2 = \pi/7$	$h_3 = \pi/15$	$h_4 = \pi/31$	$h_5 = \pi/63$
-10^{-2}	$6.60 \cdot 10^{-2}$ $6.59 \cdot 10^{-2}$ $6.60 \cdot 10^{-2}$ $6.60 \cdot 10^{-2}$	$5.87 \cdot 10^{-3}$ $6.61 \cdot 10^{-3}$ $5.87 \cdot 10^{-3}$ $5.87 \cdot 10^{-3}$	$5.72 \cdot 10^{-4}$ $5.72 \cdot 10^{-4}$ $5.72 \cdot 10^{-4}$ $5.72 \cdot 10^{-4}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$ $5.60 \cdot 10^{-5}$ $5.60 \cdot 10^{-5}$ $5.60 \cdot 10^{-5}$	$4.90 \cdot 10^{-6}$ $4.90 \cdot 10^{-6}$ $4.90 \cdot 10^{-6}$ $4.90 \cdot 10^{-6}$
-10^{-3}	$6.88 \cdot 10^{-2}$ $3.03 \cdot 10^{-1}$ $7.12 \cdot 10^{-2}$ $6.88 \cdot 10^{-2}$	$6.27 \cdot 10^{-3}$ $2.71 \cdot 10^{-1}$ $3.82 \cdot 10^{-2}$ $6.27 \cdot 10^{-3}$	$6.52 \cdot 10^{-4}$ $3.95 \cdot 10^{-2}$ $6.35 \cdot 10^{-3}$ $6.52 \cdot 10^{-4}$	$7.31 \cdot 10^{-5}$ $2.99 \cdot 10^{-2}$ $7.88 \cdot 10^{-4}$ $7.31 \cdot 10^{-5}$	$8.46 \cdot 10^{-6}$ $3.65 \cdot 10^{-3}$ $2.59 \cdot 10^{-5}$ $8.46 \cdot 10^{-6}$
-10^{-4}	$6.90 \cdot 10^{-2}$ $1.05 \cdot 10^{0}$ $7.58 \cdot 10^{-1}$ $1.13 \cdot 10^{-1}$	$6.31 \cdot 10^{-3}$ $1.03 \cdot 10^{0}$ $7.40 \cdot 10^{-1}$ $6.72 \cdot 10^{-2}$	$6.60 \cdot 10^{-4}$ $9.36 \cdot 10^{-1}$ $4.13 \cdot 10^{-1}$ $5.45 \cdot 10^{-2}$	$7.51 \cdot 10^{-5}$ $7.20 \cdot 10^{-1}$ $9.02 \cdot 10^{-2}$ $1.47 \cdot 10^{-2}$	$8.93 \cdot 10^{-6}$ $3.64 \cdot 10^{-1}$ $5.09 \cdot 10^{-2}$ $1.29 \cdot 10^{-3}$
-10^{-5}	$6.91 \cdot 10^{-2}$ $1.11 \cdot 10^{0}$ $1.12 \cdot 10^{0}$ $9.98 \cdot 10^{-1}$	$6.32 \cdot 10^{-3}$ $1.14 \cdot 10^{0}$ $1.09 \cdot 10^{0}$ $9.73 \cdot 10^{-1}$	$6.61 \cdot 10^{-4}$ $1.13 \cdot 10^{0}$ $1.07 \cdot 10^{0}$ $8.30 \cdot 10^{-1}$	$7.53 \cdot 10^{-5}$ $1.11 \cdot 10^{0}$ $9.84 \cdot 10^{-1}$ $5.30 \cdot 10^{-1}$	$8.98 \cdot 10^{-6}$ $1.07 \cdot 10^{0}$ $8.12 \cdot 10^{-1}$ $1.53 \cdot 10^{-1}$
-10^{-15}	$6.91 \cdot 10^{-2}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$	$6.32 \cdot 10^{-3}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$	$6.61 \cdot 10^{-4}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$	$7.53 \cdot 10^{-5}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$	$8.98 \cdot 10^{-6}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$ $1.16 \cdot 10^{0}$

Табл. 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. *Методы граничных элементов.* Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука. М.: Мир. 1987.
2. J. Lv, Y. Miao, H. Zhu. *The distance sinh transformation for the numerical evaluation of nearly singular integrals over curved surface elements* // Comput. Mech. **53**:2, 359–367 (2014).
3. Z. Niu, C. Cheng, H. Zhou, Z. Hu. *Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM* // Eng. Anal. Bound. Elem. **31**:12, 949–964 (2007).
4. X.W. Gao, K. Yang, J. Wang. *An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals* // Eng. Anal. Bound. Elem. **32**:8, 692–696 (2008).
5. Y.-M. Zhang, Y. Gu, J.-T. Chen. *Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities* // Comput. Mech. **47**:5, 493–504 (2011).
6. Y. Gu, W. Chen, B. Zhang, W. Qu. *Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method* // Comput. Mech. **53**:6, 1223–1234 (2014).
7. Z. Niu, Z. Hu, C. Cheng, H. Zhou. *A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM* // Eng. Anal. Bound. Elem. **61**, 42–51 (2015).
8. C. Cheng, D. Pan, Z. Han, M. Wu, Z. Niu. *A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals* // Acta Mech. Solida Sin. **31**:4, 433–444 (2018).
9. П.А. Крутицкий, В.В. Колыбасова. *Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых* // Дифференц. уравнения. **52**:9, 1262–1276 (2016).
10. П.А. Крутицкий, А.Д. Федотова, В.В. Колыбасова. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференц. уравнения. **55**:9, 1269–1284 (2019).
11. П.А. Крутицкий, И.О. Резниченко. *Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя* // Дифференц. уравнения. **57**:7, 932–950 (2021).
12. X.-W. Gao, J.-B. Zhang, B.-J. Zheng, C. Zhang. *Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures* // Eng. Anal. Bound. Elem. **66**, 145–154 (2016).
13. J. Zhang, P. Wang, C. Lu, Y. Dong. *A spherical element subdivision method for the numerical evaluation of nearly singular integrals in 3D BEM* // Eng. Computations. **34**:6, 2074–2087 (2017).
14. Y.P. Gong, C.Y. Dong, Y. Bai. *Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method* // Eng. Anal. Bound. Elem. **75**, 21–35 (2017).
15. Y. Zhang, Y. Gong, X. Gao. *Calculation of 2D nearly singular integrals over high-order geometry elements using the sinh transformation* // Eng. Anal. Bound. Elem. **60**, 144–153 (2015).
16. Д.Ю. Иванов. *О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов* // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. **50**, 9–29 (2017).
17. Д.Ю. Иванов. *Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода* // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. **57**, 5–25 (2019).
18. Д.Ю. Иванов. *Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя* // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. **65**, 30–52 (2020).
19. Д.Ю. Иванов. *О равномерной сходимости аппроксимаций потенциала двойного слоя вблизи границы двумерной области* // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. **32**:1, 26–43 (2022).
20. Н. Данфорд, Дж. Шварц. *Линейные операторы. Том 1. Общая теория.* Пер. с англ. Л.И. Головиной и Б.С. Митягина. М.: ИЛ. 1962.
21. В.И. Смирнов. *Курс высшей математики. Том 2.* М.: Наука. 1974.
22. Д. Колтон, Р. Кресс. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* Пер. с англ. Ю.А. Еремина и Е.В. Захарова. М.: Мир. 1987.
23. Г.Н. Ватсон. *Теория бесселевых функций. Часть 1.* Пер. с англ. В.С. Бермана. М.: ИЛ. 1949.

24. Д.Ю. Иванов. *Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром* // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. **38**, 33–45 (2015).
25. В.И. Смирнов. *Курс высшей математики. Том 4. Часть 2.* М.: Наука. 1981.
26. И.С. Березин, Н.П. Жидков. *Методы вычислений. Том 1.* М.: ГИФМЛ. 1962.
27. Г.М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2.* М.: Физматлит. 2003.
28. C. Schneider. *Regularity of the solution to a class of weakly singular Fredholm integral equation of the second kind* // Integr. Equat. Oper. Th. **2**, 62–68 (1979).
29. G. Vainikko, A. Pedas. *The properties of solutions of weakly singular integral equations* // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. **22**:4, 419–430 (1981).
30. R. Kangro. *On the smoothness of solutions to an integral equation with a kernel having a singularity on a curve* // Acta et Comm. Univ. Tartuensis. **913**, 24–37 (1990).
31. A. Pedas, G. Vainikko. *On the regularity of solutions to integral equations with nonsmooth kernels on a union of open intervals* // J. Comput. Appl. Math. **229**, 440–451 (2009).
32. A. Pedas, G. Vainikko. *Integral equations with diagonal and boundary singularities of the kernel* // Z. Anal. Anwend. **25**, 487–516 (2006).
33. K. Orav-Puurand, A. Pedas, G. Vainikko. *Nystrom type methods for Fredholm integral equations with weak singularities* // J. Comput. Appl. Math. **234**, 2848–2858 (2010).
34. В.А. Зорич. *Математический анализ. Часть 2.* М.: МЦНМО. 2012.

Дмитрий Юрьевич Иванов,
Российский университет транспорта,
ул. Образцова, д. 9, стр. 9,
127994, ГСП-4, г. Москва, Россия
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru