ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 4 (2023). С. 61-74.

УДК 517.982.274+517.983.22

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРА ДЮАМЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

О.А. ИВАНОВА, С.Н. МЕЛИХОВ

Аннотация. Пусть Δ — отличный от точки отрезок или (открытый) интервал на вещественной прямой, содержащий точку 0. В пространстве целых функций, реализующем посредством преобразования Фурье-Лапласа сопряженное к пространству ультрадифференцируемых или всех бесконечно дифференцируемых функций на Δ, исследованы операторы из коммутанта одномерного возмущения оператора обратного сдвига. Доказан критерий их обратимости. При этом применяется теория Рисса-Шаудера, использование которой в подобной ситуации восходит к работам В.А. Ткаченко. В топологическом сопряженном к исходному пространству введено умножение $\circledast$ и показано, что с ним это сопряженное пространство, наделенное сильной топологией, является топологической алгеброй. С помощью отображения, сопряженного к преобразованию Фурье-Лапласа, введенное умножение $\circledast$ реализовано как обобщенное произведение Дюамеля в соответствующем пространстве ультрадифференцируемых или бесконечно дифференцируемых функций на Δ. Доказан критерий обратимости оператора Дюамеля в этом пространстве. Умножение $\circledast$ использовано, чтобы распространить на классы ультрадифференцируемых функций формулу Дюамеля. Она представляет решение неоднородного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющего нулевым начальным условиям в точке 0, в виде произведения Дюамеля правой части и такого решения этого уравнения с правой частью, тождественно равной 1. Полученные результаты охватывают как неквазианалитический, так и квазианалитический случай.

Ключевые слова: оператор обратного сдвига, целая функция, произведение Дюамеля, ультрадифференцируемая функция.

Mathematics Subject Classification: 46E10, 47B38

1. Введение

Пусть Δ — отличный от точки отрезок или интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку 0. В настоящей работе изучается одномерное возмущение $D_{0,u}$ оператора обратного сдвига D_0, действующего в пространстве $A_\omega(\Delta)$ целых в $\mathbb{C}$ функций экспоненциального типа, реализующем посредством преобразования Фурье-Лапласа сопряженное к пространству ультрадифференцируемых функций типа Берлинга или бесконечно дифференцируемых функций на Δ. Оператор $D_{0,u}$ задается целой функцией u такой, что $u(0) = 1$. Впервые его определил В.А. Ткаченко [14] с помощью функции $u = e^P$, где P — некоторый многочлен такой, что $P(0) = 1$. В [14], [15] исследован сопряженный к $D_{0,u}$ оператор, названный оператором обобщенного интегрирования. При этом $D_{0,u}$ действует в счетном индуктивном пределе весовых банаховых пространств, задаваемых некоторой ρ-тригонометрически выпуклой функцией. Отметим, что общий подход к изучению пространств ультрадифференцируемых функций был предложен в работе Р. Брауна, Р. Майзе, Б.А. Тейлора [19] (в этой статье подробно исследован неквазианалитический случай). В последнее

O.A. Ivanova, S.N. Melikhov, On invertibility of a Duhamel operator in spaces of ultradifferentiable functions.

Поступила 7 апреля 2023 г.

время появилось много работ, посвященных ультрадифференцируемым функциям, в которых, в частности, обобщается и расширяется подход к этой теме, предложенный в [19] (см., например, книгу А.В. Абанина [1], статью А. Райнера, Г. Шиндла [25] и библиографию в этих работах). В [19] рассматривается случай неквазианалитической весовой функции, но многие результаты из [19] справедливы и для квазианалитической ситуации. Поэтому в некоторых случаях мы приводим ссылки на [19] и для общей ситуации.

Основной результат статьи — теорема 3.1 — содержит критерий обратимости оператора B_μ из коммутанта $D_{0,u}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $A_\omega(\Delta)$. Он охватывает как неквазианалитический, так и квазианалитический случай. Доказательство достаточности условия обратимости использует теорию Рисса-Шаудера для банаховых пространств посредством рассмотрения соответствующих операторов на банаховых «ступеньках», образующих индуктивный предел. Использование данного метода восходит к работе В.А. Ткаченко [15]. Доказательство инъективности оператора B_μ при этом существенно использует результаты работы [21]. Такой критерий был ранее доказан авторами в статье [5, теорема 2] в случае $u \equiv 1$ для пространства $C^\infty(\Omega)$, где Ω — интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку 0. При этом доказательство инъективности соответствующего оператора в [5] другое, оно проведено с помощью сингулярных интегралов.

Теория двойственности позволила приведенные выше результаты применить к реализации сопряженного к оператору B_μ, названной здесь обобщенным оператором Дюамеля. Заголовок статьи отражает именно эту часть работы. В сильном сопряженном $A_\omega(\Delta)'$ к $A_\omega(\Delta)$ вводится умножение $\circledast$ и доказывается, что $A_\omega(\Delta)'$ с ним является топологической алгеброй. Посредством отображения, сопряженного к преобразованию Фурье-Лапласа, введенная операция $\circledast$ реализована как обобщенное произведение Дюамеля в $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$. Если в нем зафиксировать один множитель, то получаем соответствующий оператор Дюамеля. Он является оператором из коммутанта реализации оператора обобщенного интегрирования, сопряженного к $D_{0,u}$. Здесь установлен критерий обратимости оператора Дюамеля в пространстве $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$. Ранее такой критерий был получен Р. Тапдигоглу и Б.Т. Торебеком [26] для пространства $C^\infty[0,1]$ в случае $u \equiv 1$.

В заключительной части работы мы применяем произведение $\circledast$ к новому доказательству известной формулы Дюамеля для решения дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющего нулевым начальным условиям в точке 0. Она выражает это решение в виде произведения Дюамеля правой части и такого решения с правой частью, тождественно равной 1. В частности, упомянутая формула получена для классов ультрадифференцируемых функций, ранее в этой связи не рассматривавшихся. Доказательство основывается на возможности делить линейные непрерывные функционалы на $A_\omega(\Delta)$ на ненулевой многочлен так, что полученное «частное» обращается в нуль на мономах, степени которых меньше степени этого многочлена.

2. Основные пространства и операторы

Следуя [19], непрерывную неубывающую функцию $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ будем называть *весовой функцией*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(α) $\omega(2t) = O(\omega(t)), \quad t \to +\infty;$
(β) $\omega(t) = O(t), \quad t \to +\infty;$
(γ) $\log t = o(\omega(t)), \quad t \to +\infty;$
(δ) Функция $\varphi = \omega \circ \exp$ выпукла на $\mathbb{R}$.

Вследствие [19, лемма 1.2] весовая функция ω удовлетворяет такому условию:
(α_1) Существует постоянная $C \geq 1$, для которой

$$\omega(x+y) \leq C(\omega(x) + \omega(y) + 1) \text{ для любых } x, y \in [0,+\infty).$$

Весовая функция ω называется неквазианалитической, если $\int\limits_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt < +\infty$, и квазианалитической, если $\int\limits_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt = +\infty$.

Через φ^* обозначим сопряженную по Юнгу к φ, т.е. $\varphi^*(x) := \sup\limits_{y\geq 0}(xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$.

Пусть ω - весовая функция, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Как в [19], определим пространства ультрадифференцируемых функций типа Берлинга, задаваемые с помощью ω. Для отрезка $K \subset \mathbb{R}$ с непустой внутренностью введем пространство

$$\mathcal{E}_\omega(K) := \left\{ f \in C^\infty(K) \,\middle|\, |f|_{K,m} := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in K} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp(m\varphi^*(\alpha/m))} < +\infty \text{ для любого } m \in \mathbb{N} \right\}$$

и зададим его локально выпуклую топологию набором преднорм $|\cdot|_{K,m}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{E}_\omega(K)$ является (FS)-пространством, т.е. пространством Фреше-Шварца (см. [2, § 1], [24, § 25]).

Пусть Ω — интервал в $\mathbb{R}$. Зафиксируем последовательность отрезков K_n, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int} K_1 \neq \emptyset$ и $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ ($\operatorname{int} Q$ — внутренность множества $Q \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$). Положим

$$\mathcal{E}_\omega(\Omega) := \left\{ f \in C^\infty(\Omega) \,\middle|\, |f|_{\Omega,m,n} := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in K_n} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp(m\varphi^*(\alpha/m))} < +\infty \text{ для любых } m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Локально выпуклая топология в $\mathcal{E}_\omega(\Omega)$ задается набором преднорм $|\cdot|_{\Omega,m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. С ней $\mathcal{E}_\omega(\Omega)$ является (FS)-пространством. Пространство $\mathcal{E}_\omega(\Omega)$ алгебраически и топологически не зависит от выбора последовательности отрезков $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, как выше.

Для $\omega(t) = \log(1+t)$, $t \in [0, +\infty)$, для отрезка $K \subset \mathbb{R}$ с непустой внутренностью и для интервала $\Omega \subset \mathbb{R}$ считаем, что

$$\mathcal{E}_\omega(K) := C^\infty(K), \qquad \mathcal{E}_\omega(\Omega) := C^\infty(\Omega).$$

Пространства $C^\infty(K)$ и $C^\infty(\Omega)$ снабжаются их стандартными топологиями.

Для ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}$ символ H_Q обозначает опорную функцию Q, т.е. $H_Q(y) := \sup_{x \in Q}(xy)$, $y \in \mathbb{R}$. Пусть $e_\lambda(x) := e^{-i\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Для локально выпуклого пространства H через H' обозначаем топологическое сопряженное к H. Будем H' снабжать сильной топологией. Преобразование Фурье-Лапласа функционала φ из $\mathcal{E}_\omega(K)'$ или $\mathcal{E}_\omega(\Omega)'$ определяется равенством

$$\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) := \varphi(e_\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Продолжим функцию ω на $\mathbb{C}$, полагая $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Через $H(\mathbb{C})$ обозначим пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций. Для отрезка $K \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство целых функций

$$A_{\omega,n}(K) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \,\middle|\, \|f\|_{K,n} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_K(\operatorname{Im} z) + n\omega(z))} < +\infty \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_{K,n}$ и положим $A_\omega(K) := \operatorname{ind}_{n\to} A_{\omega,n}(K)$. Если Ω — интервал в $\mathbb{R}$, то $A_\omega(\Omega) := \operatorname{ind}_{n\to} A_{\omega,n}(K_n)$. При этом выполняется алгебраическое и топологическое равенство $A_\omega(\Omega) = \operatorname{ind}_{n\to} A_\omega(K_n)$. Пространства $A_\omega(K)$ и $A_\omega(\Omega)$ являются (DFS)-пространствами (см. [2, 2.10], [24, теорема 25.20]). Если $f \in A_\omega(K)$ или $f \in A_\omega(\Omega)$, то для любого нуля z функции f функция $\frac{f(t)}{t-z}$ также принадлежит $A_\omega(K)$, соответственно, $A_\omega(\Omega)$. Отметим, что пространства $A_\omega(K)$ и $A_\omega(\Omega)$ содержат все многочлены, если $0 \in K$ и $0 \in \Omega$.

По теореме Пэли-Винера-Шварца для ультрараспределений и квазианалитических функционалов [19, предложение 3.5, теорема 7.4], [23, предложение 3.6] и обычных распределений [16, теорема 7.3.1] справедливо следующее.

Теорема 2.1. *Пусть ω — весовая функция или $\omega(t) := \log(1+t)$, $t \in [0, +\infty)$. Преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом $\mathcal{E}_\omega(K)'$ на $A_\omega(K)$ и $\mathcal{E}_\omega(\Omega)'$ на $A_\omega(\Omega)$.*

Приведем некоторые утверждения, которые будут использоваться далее.

Лемма 2.1. (i) *Пусть K — отрезок в $\mathbb{R}$. Тогда*

$$|H_K(t) - H_K(z)| \le \alpha_K |t - z|, \quad t, z \in \mathbb{C},$$

где $\alpha_K = \sup_{|\xi|=1} H_K(\xi) < +\infty$.

(ii) *Для любых $t, z \in \mathbb{C}$, для которых $|t-z| \le \frac{1}{2}\log(1+|z|)$, выполняется неравенство*

$$\log(1+|z|) \le \log(1+|t|) + \log 2.$$

(iii) *Пусть ω — весовая функция. Для любых $z, \xi, t \in \mathbb{C}$ таких, что $|\xi - z| \le \frac{1}{2}\log(1+|z|)$ и $|t-z| \le \frac{1}{2}\log(1+|z|)$, выполняется неравенство*

$$\omega(\xi) \le C(C+1)\omega(t) + C(C\omega(\log 2) + C + 1),$$

где C — постоянная из условия (α_1).

Доказательство. Неравенство в (i) хорошо известно; оно вытекает из полуаддитивности и положительной однородности опорной функции H_K.

(ii): Так как

$$|z| \le |t| + |t-z| \le |t| + \frac{1}{2}\log(1+|z|) \le |t| + \frac{|z|}{2},$$

то $|z| \le 2|t|$, а значит,

$$\log(1+|z|) \le \log(1+2|t|) \le \log(1+|t|) + \log 2.$$

(iii): Используя условие (α_1) и утверждение (ii), получим:

$$\begin{aligned} w(\xi) &\le C(\omega(t) + \omega(\xi - t) + 1) \le C(\omega(t) + \omega(\log(1+|z|)) + 1) \\ &\le C(\omega(t) + \omega(\log(1+|t|) + \log 2) + 1) \le C(\omega(t) + C(\omega(\log(1+|t|)) + \omega(\log 2) + 1) + 1) \\ &\le C(\omega(t) + C\omega(t) + C\omega(\log 2) + C + 1) = C(C+1)\omega(t) + C(C\omega(\log 2) + C + 1). \end{aligned}$$

□

Далее Δ — отличный от точки отрезок или интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку 0. Зафиксируем функцию $u \in A_\omega(\Delta)$ такую, что $u(0) = 1$. Оператор обобщенного обратного сдвига $D_{0,u}$, линейный и непрерывный в $A_\omega(\Delta)$, задается равенством $D_{0,u}(f)(t) := \frac{f(t)-u(t)f(0)}{t}$, $f \in A_\omega(\Delta)$ (см. [3, § 1]). Если $u \equiv 1$, то $D_0 := D_{0,u}$ — обычный оператор обратного сдвига. Отметим равенства

$$D_{0,u}(f)(t) = \frac{f(t) - u(t)f(0)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t} - f(0)\frac{u(t) - u(0)}{t} = D_0(f)(t) - f(0)D_0(u)(t). \quad (2.1)$$

Они показывают, что $D_{0,u}$ является одномерным возмущением оператора D_0. Оператор $D_{0,u}$ в виде, как в равенствах (2.1) справа, в пространстве функций, голоморфных в области в $\mathbb{C}$, исследовал Ю.С. Линчук [22].

Следуя [15], [18], введем операторы сдвига $T_z(f)(t) := \frac{tf(t)u(z) - zf(z)u(t)}{t-z}$ для оператора $D_{0,u}$ и операторы Поммье $D_z(f)(t) := \frac{f(t)u(z) - f(z)u(t)}{t-z}$, $f \in A_\omega(\Delta)$. Все они линейно и непрерывно действуют в $A_\omega(\Delta)$.

Замечание 2.1. *Для любых функций $f \in A_\omega(K)$, $z \in \mathbb{C}$, нуля a функции u функция $u_a(t) := \frac{u(t)}{t-a}$ является собственным вектором оператора T_z:*

$$T_z(u) = u(z)u, \qquad T_z(u_a) = -au_a(z)u_a.$$

Последние равенства проверяются непосредственно.

Лемма 2.2. *Пусть K — отличный от точки отрезок в $\mathbb{R}$, содержащий точку 0.*
(i) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и постоянная $c_1 \ge 0$, такие, что для любой функции $f \in A_{\omega,n}(K)$ выполняется неравенство

$$|f'(t)| \le c_1 \|f\|_{K,n} \exp\left(H_K(\operatorname{Im} t) + m(\omega(t))\right), \quad t \in \mathbb{C}.$$

(ii) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $s \in \mathbb{N}$ и постоянная $c_2 \ge 0$, такие, что для любой функции $f \in A_{\omega,n}(K)$ выполняется неравенство

$$|T_z(f)(t)| \le c_2 \|f\|_{K,n} \exp\left(H_K(\operatorname{Im} t) + H_K(\operatorname{Im} z) + s(\omega(t) + \omega(z))\right), \quad t, z \in \mathbb{C}.$$

Это утверждение вытекает из принципа максимума модуля голоморфной функции с учетом леммы 2.1 (см. также общий результат [4, лемма 4 (i)]).

Для функционала $\mu \in A_\omega(\Delta)'$ введем оператор

$$B_\mu(f)(z) := \mu(T_z(f)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad f \in A_\omega(\Delta),$$

линейный и непрерывный в $A_\omega(\Delta)$. В силу [4, теорема 15] множество $\{B_\mu \,|\, \mu \in A_\omega(\Delta)'\}$ совпадает с коммутантом оператора $D_{0,u}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $A_\omega(\Delta)$. Отметим при этом, что вследствие леммы 2.1 последовательности функций $(H_K(\operatorname{Im} z) + n\omega(z))_{n\in\mathbb{N}}$ и $(H_{K_n}(\operatorname{Im} z) + n\omega(z))_{n\in\mathbb{N}}$, задающие пространство $A_\omega(\Delta)$, удовлетворяют исходным предположениям (1.1) в [4].

Следующие ниже равенства полезны, например, при использовании теории Рисса-Шаудера в задаче об обратимости оператора B_μ в $A_\omega(\Delta)$.

Замечание 2.2. *Для $\mu \in A_\omega(\Delta)'$, $f \in A_\omega(\Delta)$, $z \in \mathbb{C}$ выполняются равенства*

$$B_\mu(f)(z) = \mu(u)f(z) + \mu_t\left(t\frac{f(t)u(z) - f(z)u(t)}{t-u}\right) = \mu(u)f(z) + \mu_t\left(tD_z(f)(t)\right)$$

(нижний индекс t означает, что функционал μ действует по переменной t).

3. Критерий обратимости оператора B_μ

Для отличного от точки отрезка K в $\mathbb{R}$, для $\nu \in A_\omega(K)'$, $n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\|\nu\|^*_{K,n} := \sup_{\|f\|_{K,n}\le 1} |\nu(f)|.$$

Символом $S_n(K)$ обозначим замкнутый единичный шар в $A_{\omega,n}(K)$.

Лемма 3.1. *Пусть K — отличный от точки отрезок в $\mathbb{R}$, содержащий точку 0, $\mu \in A_\omega(K)'$, $u \in A_{\omega,m}(K)$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $n \ge m$ оператор $C_\mu(f)(z) := \mu_t\left(t\frac{f(t)u(z)-f(z)u(t)}{t-z}\right)$ компактен в $A_{\omega,n}(K)$.*

Доказательство. Используем некоторую модификацию метода доказательства В.А. Ткаченко [15, теорема 2]. Положим $d(z) := \max\left(1; \frac{1}{2}\log(1+|z|)\right)$, $z \in \mathbb{C}$.

Зафиксируем $n \ge m$. Пусть $|t-z| \ge d(z)$. Тогда для любой функции $f \in S_n(K)$

$$\begin{aligned}
|tD_z(f)(t)| &\le \frac{|t|(|f(t)||u(z)| + |f(z)||u(t)|)}{d(z)} \\
&\le \frac{|t|}{d(z)}\|u\|_{K,m}\left(e^{H_K(\operatorname{Im} t)+n\omega(t)}e^{H_K(\operatorname{Im} z)+m\omega(z)} + e^{H_K(\operatorname{Im} z)+n\omega(z)}e^{H_K(\operatorname{Im} t)+m\omega(t)}\right) \\
&\le \frac{2|t|}{d(z)}\|u\|_{K,m}e^{H_K(\operatorname{Im} z)+n\omega(z)}e^{H_K(\operatorname{Im} t)+n\omega(t)}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь $|t-z| < d(z)$. По принципу максимума модуля голоморфной функции для любой функции $f \in S_n(K)$ найдется точка $\xi \in \mathbb{C}$, для которой $|\xi - z| = d(z)$ и

$$|tD_z(f)(t)| \le |\xi D_z(f)(\xi)| \le \frac{2|\xi|}{d(z)}\|u\|_{K,m}e^{H_K(\operatorname{Im} z)+n\omega(z)}e^{H_K(\operatorname{Im} \xi)+n\omega(\xi)}.$$

Вследствие леммы 2.1 (и условия (γ) для весовой функции ω) существуют постоянные $A_1, A_2 > 0$, для которых для любых $t, z \in \mathbb{C}$, $f \in S_n(K)$

$$\begin{aligned}
|tD_z(f)(t)| &\le \frac{|t|}{d(z)}\|u\|_{K,m}e^{H_K(\operatorname{Im} z)+n\omega(z)}e^{H_K(\operatorname{Im} t)+A_1\omega(t)+A_1} \\
&\le \frac{1}{d(z)}\|u\|_{K,m}e^{H_K(\operatorname{Im} z)+n\omega(z)}e^{H_K(\operatorname{Im} t)+A_2\omega(t)+A_2}.
\end{aligned}$$

Возьмем $s \in \mathbb{N}$ такое, что $s \ge A_2$. Тогда для любых $z \in \mathbb{C}$, $f \in S_n(K)$

$$|C_\mu(f)(z)| \le \|\mu\|^*_{K,s}\sup_{t\in\mathbb{C}}\frac{|tD_z(f)(t)|}{\exp(H_K(\operatorname{Im} t) + s\omega(t))} \le e^{A_2}\frac{\|\mu\|^*_{K,s}\|u\|_{K,m}}{d(z)}e^{H_K(\operatorname{Im} z)+n\omega(z)}.$$

Поэтому

$$\lim_{|z|\to+\infty}\sup_{\|f\|_{K,n}\le 1}\frac{|C_\mu(f)(z)|}{\exp(H_K(\operatorname{Im}z)+n\omega(z))}=0.$$

Значит, множество $C_\mu(S_n(K))$ относительно компактно в $A_{\omega,n}(K)$. Лемма доказана. □

Далее $\mathbb{C}[z]$ и $\mathbb{C}[z]_n$, $n\in\mathbb{N}_0$, — множества всех многочленов одной переменной, соответственно степени не выше n, над полем $\mathbb{C}$. Для удобства приведем здесь используемые ниже результаты статьи [21] (леммы 2, 4–6 из [21]).

Лемма 3.2. *(i) Пусть $v,w\in H(\mathbb{C})$, $v(0)=w(0)=1$. Тогда для любых функций $h\in H(\mathbb{C})$, $j\in\mathbb{N}$ выполняется равенство $D^j_{0,vw}(vh)=vD^j_{0,w}(h)$.*
(ii) Если многочлены $v,h\in\mathbb{C}$ взаимно простые, $v(0)=1$, то многочлены $D_{0,v}(h)$ и v тоже взаимно простые.
(iii) Пусть $v\in H(\mathbb{C})$, $v(0)=1$. Если функция $f\in H(\mathbb{C})$ удовлетворяет равенству

$$\sum_{j=1}^{s}a_jD^j_{0,v}(f)(z)=0,\quad z\in\mathbb{C},\quad s\in\mathbb{N},\quad a_j\in\mathbb{C},\quad 1\le j\le s,\quad a_s\ne 0,$$

то найдутся многочлены $p,r\in\mathbb{C}[z]$, степени не выше $n-1$, для которых $f=\frac{r}{p}v$.
(iv) Пусть $v,r\in\mathbb{C}[z]$, $v(0)=1$. Если многочлены v,r взаимно простые, то система

$$\{D^j_{0,v}(r)\,|\,1\le j\le\deg(v)\}$$

линейно независима в $H(\mathbb{C})$.

Символом $\mathcal{N}(u)$ обозначим множество всех корней функции u. Полагаем $u_a(t):=\frac{u(t)}{t-a}$ для $a\in\mathcal{N}(u)$.

Теорема 3.1. *Пусть Δ — отрезок в $\mathbb{R}$, отличный от точки, или интервал в $\mathbb{R}$, $0\in\Delta$; ω — весовая функция или $\omega(t)=\log(1+t)$, $t\in[0,+\infty)$. Для $\mu\in A_\omega(\Delta)'$ следующие утверждения равносильны:*
(i) B_μ является изоморфизмом $A_\omega(\Delta)$ на $A_\omega(\Delta)$;
(ii) $\mu(u)\ne 0$ и $\mu(u_a)\ne 0$ для любого $a\in\mathcal{N}(u)$.

Доказательство. (i)⇒(ii): По замечанию 2.1 $B_\mu(u)=\mu(u)u$ и, если $\mathcal{N}(u)\ne\emptyset$, $B_\mu(u_a)=-a\mu(u_a)u_a$, $a\in\mathcal{N}(u)$. Значит, $\mu(u)\ne 0$ и $\mu(u_a)\ne 0$ для любого $a\in\mathcal{N}(u)$.

(ii)⇒(i): Рассмотрим вначале случай, когда Δ является отрезком K. Выберем $m\in\mathbb{N}$ такое, что $u\in A_{\omega,m}(K)$. Возьмем $n\ge m$. По замечанию 2.2 и лемме 3.1 оператор $D_{0,u}$ действует в $A_{\omega,n}(K)$. Кроме того, по лемме 3.1, вследствие представления в замечании 2.2, ядро $\operatorname{Ker}B_\mu$ оператора $B_\mu: A_{\omega,n}(K)\to A_{\omega,n}(K)$ конечномерно. Покажем, что оператор B_μ инъективен в $A_{\omega,n}(K)$. Предположим, что найдется ненулевая функция $f\in A_{\omega,n}(K)$ такая, что $B_\mu(f)=0$. Рассмотрим случай, когда f не может быть представлена в виде $f=\frac{r}{p}u$, где r,p — многочлены. Согласно лемме 3.2 тогда f не удовлетворяет в $H(\mathbb{C})$ ни одному уравнению $\sum_{j=1}^{s}a_jD^j_{0,u}(f)=0$, $s\in\mathbb{N}$, $a_s\ne 0$. Значит, система $\{D^j_{0,u}(f)\,|\,j\in\mathbb{N}\}$ линейно независима в $H(\mathbb{C})$. Поскольку $B_\mu D_{0,u}=D_{0,u}B_\mu$ в $A_\omega(K)$ (и в $A_{\omega,n}(K)$), то $B_\mu(D^j_{0,u}(f))=0$ для любого $j\in\mathbb{N}$. Значит, $\operatorname{Ker}B_\mu$ бесконечномерно. Получено противоречие. Таким образом, найдутся взаимно простые многочлены r и p такие, что $f=\frac{r}{p}u$. Тогда $\frac{u}{p}\in H(\mathbb{C})$ и без ограничения общности можно считать, что $p(0)=1$. Вследствие леммы 3.2 для любого $j\ge 0$ выполняется равенство

$$D^j_{0,u}(f)=\frac{u}{p}D^j_{0,p}(r).\tag{3.1}$$

При этом $D^j_{0,u}(f)\in\operatorname{Ker}B_\mu$ для любого $j\ge 0$. Положим $k:=\deg(r)$, $l:=\deg(p)$. Если $l=0$, то $p\equiv 1$, и равенства $\deg(D^k_{0,p}(r))=0$ и (3.1) при $j=k$ влекут, что $u\in\operatorname{Ker}B_\mu$. Значит, $\mu(u)u=0$. Получено противоречие.

Пусть $l\ge 1$. Применим далее метод, использованный при доказательстве леммы 8 в [21]. По лемме 3.2 множество $S:=\{D^j_{0,p}(r)\,|\,1\le j\le l\}$ линейно независимо в $H(\mathbb{C})$. Предположим, что $k < l$. Поскольку $\deg(D_{0,p}^j(r)) < l$ для всех j таких, что $1 \le j \le l$, то система S является базисом в $\mathbb{C}[z]_{l-1}$. Пусть a — какой-либо корень p. Тогда a — также корень функции u. Используя (3.1), получим, что $\frac{u}{p}\mathbb{C}[z]_{l-1} \subset \operatorname{Ker} B_\mu$, а поэтому функция $\frac{u(t)}{t-a}$ принадлежат $\operatorname{Ker} B_\mu$. Получено противоречие. Пусть $k = l$. Тогда система S является базисом в $\mathbb{C}[z]_{l-1}$, а $S \cup \{r\}$ — базисом в $\mathbb{C}[z]_l$. Поэтому $\frac{u}{p}\mathbb{C}[z]_l \subset \operatorname{Ker} B_\mu$, что приводит к противоречию. Пусть теперь $k > l$. По лемме 3.2 многочлены $D_{0,p}^{k-l}(r)$ и p взаимно простые и множество

$$\left\{D_{0,p}^j(r) = D_{0,p}^{j-k+l}(D_{0,p}^{k-l}(r)) \,\middle|\, k-l+1 \le j \le k\right\}$$

линейно независимо. Поскольку $\deg(D_{0,p}^{k-l}(r)) = l$, то это множество содержится в $\mathbb{C}[z]_{l-1}$, а значит, является базисом в $\mathbb{C}[z]_{l-1}$. Снова получаем противоречие.

Итак, оператор $B_\mu : A_{\omega,n}(K) \to A_{\omega,n}(K)$ инъективен. Вследствие замечания 2.2 и леммы 3.1 B_μ — изоморфизм каждого пространства $A_{\omega,n}(K)$, $n \ge m$, на себя. Поэтому B_μ — изоморфизм $A_\omega(K)$ на $A_\omega(K)$. (Из теоремы об открытом отображении следует, что он является топологическим.)

Рассмотрим теперь случай, когда Δ является интервалом Ω, содержащим точку 0. Тогда $A_\omega(\Omega) = \operatorname{ind}_{n\to} A_\omega(K_n)$, где K_n — отрезки такие, что $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int} K_1 \ne \emptyset$ и $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. При этом для любого $n \in \mathbb{N}$ сужение μ на $A_\omega(K_n)$ — линейный непрерывный функционал на $A_\omega(K_n)$. Если $u \in A_\omega(K_s)$, то по предыдущей части доказательства оператор B_μ является изоморфизмом каждого пространства $A_\omega(K_n)$ при $n \ge s$. Значит, B_μ — изоморфизм $A_\omega(\Omega)$ на себя. □

Замечание 3.1. *(i) Критерий в теореме 3.1 был доказан в работе* [5, теорема 2] *в случае $\omega(t) = \log(1+t)$, $u \equiv 1$.*
(ii) При доказательстве предыдущей теоремы существенно использовалась компактность оператора $C_\mu(f) = \mu_t\left(t\frac{f(t)u(z)-f(z)u(t)}{t-z}\right)$ в каждом пространстве $A_{\omega,n}(K)$ для достаточно больших n. При определенных условиях этот оператор не является компактным в $A_\omega(K)$, а значит, в данном случае нельзя использовать теорию Рисса-Шаудера для операторов в локально выпуклых пространствах, отличных от банаховых (см., например, [27], [13, глава VIII]*).*

Покажем это для $\omega(t) = \log(1+t)$ и $u \equiv 1$. Положим $\widehat{\mu}(x) := \mu_t(e^{-itx})$, $x \in \Delta$. Тогда $\widehat{\mu} \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ (см. п. 4.2). Предположим, что функция $\widehat{\mu}-\widehat{\mu}(0)$ не является плоской в нуле, т.е. что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $0 \ne \widehat{\mu}^{(k)}(0) = (-i)^k\mu_t(t^k)$ и (при $k \ge 2$) $0 = \widehat{\mu}^{(j)}(0) = (-i)^j\mu_t(t^j)$, если $1 \le j < k$. Пусть $v_n(z) := (C_\mu)_t(t^n)(z) = \mu_t\left(t\frac{t^n-z^n}{t-z}\right)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что оператор $C_\mu : A_\omega(K) \to A_\omega(K)$ компактный, т.е. отображает некоторую окрестность нуля на подмножество компактного множества в $A_\omega(K)$. Поскольку счетный индуктивный предел $A_\omega(K)$ регулярный, т.е. каждое ограниченное подмножество $A_\omega(K)$ содержится и ограничено в некотором пространстве $A_{\omega,s}(K)$ (см. [2, § 2, 2.9 (в)]*), то найдется $s \in \mathbb{N}$ такое, что все функции v_n, $n \in \mathbb{N}$, принадлежат $A_{\omega,s}(K)$. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$|v_n(z)| \le \|v_n\|_{K,s} e^{H_K(\operatorname{Im} z)}(1+|z|)^s, \ z \in \mathbb{C},$$

где $\|v_n\|_{K,s} < +\infty$. Поэтому для $n = k+s+1$ получим:

$$\left|\sum_{l=0}^{k+s} z^l \mu_t(t^{k+s+1-l})\right| \le \|v_n\|_{K,s}(1+|z|)^s, \ z \in \mathbb{C}.$$

Но последнее неравенство не выполняется для достаточно больших $|z|$. Получили противоречие.

4. Результаты для оператора Дюамеля

По-прежнему Δ — отрезок в $\mathbb{R}$, отличный от точки, или интервал в $\mathbb{R}$, $0 \in \Delta$, ω — весовая функция или $\omega(t) = \log(1+t)$, $t \in [0, +\infty)$.

4.1. $A_\omega(\Delta)'$ как топологическая алгебра. Следуя [4, § 2.2], введем операцию $\circledast$:

$$(\varphi \circledast \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))), \quad \varphi, \psi \in A_\omega(\Delta)', \quad f \in A_\omega(\Delta).$$

Согласно [4, § 2.2] $\circledast$ — ассоциативная и коммутативная бинарная операция в $A_\omega(\Delta)'$. Покажем, что $A_\omega(\Delta)'$ является топологической алгеброй с умножением $\circledast$. При этом используем такую терминологию. Алгебра — это комплексное линейное пространство $\mathcal{A}$ с умножением, т.е. билинейным отображением из $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$. Она называется топологической, если $\mathcal{A}$ является локально выпуклым пространством, и умножение непрерывно из $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$.

Поскольку индуктивный предел $A_\omega(\Delta)$ регулярен, то [24, теорема 25.9] сильное сопряженное $A_\omega(\Delta)'$ является пространством Фреше с фундаментальной последовательностью непрерывных преднорм

$$\|\varphi\|^*_{K,n} = \sup_{\|f\|_{K,n}\le 1} |\varphi(f)|, \quad \varphi \in A_\omega(K)', \quad n \in \mathbb{N},$$

если Δ является отрезком K, и

$$\|\varphi\|^*_{K_n,n} = \sup_{\|f\|_{K_n,n}\le 1} |\varphi(f), \quad \varphi \in A_\omega(\Omega)', \quad n \in \mathbb{N},$$

если Δ — интервал Ω.

Теорема 4.1. *$(A_\omega(\Delta)', \circledast)$ — топологическая алгебра.*

Доказательство. Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$ и полагаем $Q := K$, если Δ — отрезок K, и $Q := K_n$, если Δ — интервал Ω. Выберем s и c_2 по n и Q, как в лемме 2.2 (ii). Тогда

$$\begin{aligned}\|\varphi\circledast\psi\|^*_{Q,n} &= \sup_{\|f\|_{Q,n}\le 1} |(\varphi\circledast\psi)(f)|\,| = \sup_{\|f\|_{Q,n}\le 1} |\varphi_z(\psi(T_z(f)))| \\ &\le \|\varphi\|^*_{Q,s} \sup_{\|f\|_{Q,n}\le 1}\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\psi(T_z(f))|}{\exp(H_Q(\operatorname{Im} z)+s\omega(z))} \\ &\le \|\varphi\|^*_{Q,s}\|\psi\|^*_{Q,s} \sup_{\|f\|_{Q,n}\le 1}\sup_{z\in\mathbb{C}}\sup_{t\in\mathbb{C}} \frac{|T_z(f)(t)|}{\exp(H_Q(\operatorname{Im} z)+H_Q(\operatorname{Im} t)+s(\omega(z)+\omega(t)))} \\ &\le c_2\|\varphi\|^*_{Q,s}\|\psi\|^*_{Q,s}.\end{aligned}$$

Значит, билинейное отображение $(\varphi,\psi)\mapsto\varphi\circledast\psi$ непрерывно из $A_\omega(\Delta)'\times A_\omega(\Delta)'$ в $A_\omega(\Delta)'$. □

Замечание 4.1. *Для $\mu\in A_\omega(\Delta)'$ сопряженным к оператору $B_\mu : A_\omega(\Delta)\to A_\omega(\Delta)$ относительно дуальной пары $(A_\omega(\Delta), A_\omega(\Delta)')$ является оператор $B'_\mu : A_\omega(\Delta)'\to A_\omega(\Delta)'$ такой, что $B'_\mu(\varphi)=\varphi\circledast\mu$, $\varphi\in A_\omega(\Delta)'$. Действительно, для любых $\varphi\in A_\omega(\Delta)'$, $f\in A_\omega(\Delta)$*

$$B'_\mu(\varphi)(f) = \varphi(B_\mu(f)) = (\varphi\circledast\mu)(f).$$

Ниже в п. 4.3 мы покажем, что операция $\circledast$ реализуется в $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$ как обобщенное произведение Дюамеля, а оператор B'_μ — как обобщенный оператор Дюамеля.

4.2. Оператор обобщенного интегрирования. Пусть $\mathcal{F}' : A_\omega(\Delta)'\to\mathcal{E}_\omega(\Delta)$ — сопряженное отображение к преобразованию Фурье-Лапласа $\mathcal{F} : \mathcal{E}_\omega(\Delta)'\to A_\omega(\Delta)$ относительно дуальных пар $(\mathcal{E}_\omega(\Delta)', \mathcal{E}_\omega(\Delta))$ и $(A_\omega(\Delta), A_\omega(\Omega)')$. Поскольку пространство $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$ рефлексивно и $\mathcal{F}$ — топологический изоморфизм $\mathcal{E}_\omega(\Delta)'$ на $A_\omega(\Delta)$ (см. теорему 2.1), то $\mathcal{F}'$ — топологический изоморфизм $A_\omega(\Delta)'$ на $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$. Для $z\in\mathbb{C}$, функции f, определенной в точке z, полагаем $\delta_z(f) := f(z)$. Ясно, что $\delta_x\in\mathcal{E}_\omega(\Delta)'$ для $x\in\Delta$ и $\delta_z\in A_\omega(\Delta)'$ для $z\in\mathbb{C}$. Кроме того, для любых $\varphi\in A_\omega(\Delta)'$, $x\in\Delta$

$$\mathcal{F}'(\varphi)(x) = \delta_x(\mathcal{F}'(\varphi)) = \varphi(\mathcal{F}(\delta_x)) = \varphi(e_x). \tag{4.1}$$

Положим $\widehat{\varphi} := \mathcal{F}'(\varphi)$, $\varphi\in A_\omega(\Delta)'$. Отметим, что $\widehat{\delta_\alpha} = e_\alpha$ для любого $\alpha\in\mathbb{C}$. Кроме того, выполняются стандартные равенства

$$\varphi_t(t^j e^{-ixt}) = i^j\widehat{\varphi}^{(j)}(x), \quad \varphi\in A_\omega(\Delta)', \quad x\in\Delta, \quad j\in\mathbb{N}_0. \tag{4.2}$$

Они вытекают из того, что для любой функции $f\in A_\omega(\Delta)$ в пространстве $A_\omega(\Delta)$ существует предел $\lim\limits_{\eta\to 0}\frac{f(\cdot+\eta)-f}{\eta}$, равный f' (см., например, [8, лемма 2]; исходные предположения (V1) и (V2) о рассматриваемых в [8] пространствах в данном случае выполняются).

Для линейного непрерывного оператора $B : A_\omega(\Delta) \to A_\omega(\Delta)$ символом B' обозначим оператор в $A_\omega(\Delta)'$, сопряженный к B относительно естественной дуальной пары $(A_\omega(\Delta), A_\omega(\Delta)')$. Следуя В.А. Ткаченко [15], назовем $D'_{0,u}$ оператором обобщенного интегрирования. В.А. Ткаченко [15] ввел оператор обобщенного интегрирования также как сопряженный к оператору $D_{0,u}$, действующему в счетном индуктивном пределе весовых банаховых пространств целых функций, задаваемых ρ-тригонометрически выпуклой функцией. При этом в [15] $u = e^{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P}$ — многочлен. Операторы с таким названием исследовались Р. Крауновером, Р. Хансеном [20]. Вследствие (2.1) выполняется равенство

$$D'_{0,u}(\varphi) = D'_0(\varphi) - \varphi(D_0(u))\delta_0, \quad \varphi \in A_\omega(\Delta)'. \tag{4.3}$$

Определим комплексную билинейную форму

$$\langle f, g\rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(g), \quad f \in A_\omega(\Delta), \quad g \in \mathcal{E}_\omega(\Delta).$$

Она устанавливает двойственность между $A_\omega(\Delta)$ и $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$. Отметим, что

$$f(z) = \langle f, e_z\rangle, \quad f \in A_\omega(\Delta), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad h(x) = \langle e_x, h\rangle, \quad h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta), \quad x \in \Delta.$$

Для линейного непрерывного оператора $B : A_\omega(\Delta) \to A_\omega(\Delta)$ обозначим через $\widetilde{B}$ действующий в $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$ оператор, сопряженный к B относительно дуальной пары $(A_\omega(\Delta), \mathcal{E}_\omega(\Delta))$. Выполняется равенство $\widetilde{B} = \mathcal{F}'B'(\mathcal{F}')^{-1}$. Если $u \equiv 1$, то $\widetilde{D}_0 = \widetilde{D}_{0,u}$ является вольтерровским оператором:

$$\widetilde{D}_0(h)(x) = -i\int_0^x h(\xi)d\xi, \ x \in \Delta, \ h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta). \tag{4.4}$$

Доказательство равенства (4.4) стандартно (см., например, [7, лемма 2]). В силу (2.1) выполняется равенство

$$\widetilde{D}_{0,u}(h)(x) = \int_0^x h(\xi)d\xi - \langle D_0(u), h\rangle, \quad x \in \Delta, \quad h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta). \tag{4.5}$$

Конкретизируем последнее представление в случае, когда $u = Pe_\lambda$, где $P \in \mathbb{C}[z]$, $P(0) = 1$, $\lambda \in \Delta$. Для многочлена $w(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j \in \mathbb{C}[z]$ определим дифференциальный оператор

$$w(d)(f) := \sum_{j=0}^n i^j b_j f^{(j)}.$$

Отметим, что для любых $w \in \mathbb{C}[z]$, $h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$, $x \in \Delta$

$$\langle we_x, h\rangle = w(d)(h)(x). \tag{4.6}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} D_0(Pe_\lambda)(t) &= \frac{P(t)e_\lambda(t) - 1}{t} = \frac{P(t) - 1}{t}e_\lambda(t) + \frac{e_\lambda(t) - 1}{t} \\ &= D_0(P)(t)e_\lambda(t) + D_0(e_\lambda)(t), \end{aligned}$$

то для $h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$

$$\langle D_0(u), h\rangle = \langle D_0(P)e_\lambda, h\rangle + \langle D_0(e_\lambda), h\rangle = D_0(P)(d)(h)(\lambda) + \int_0^\lambda h(\xi)d\xi. \tag{4.7}$$

Из равенств (4.4)–(4.7) следует, что для любых $h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$, $x \in \Delta$ выполняется равенство

$$\widetilde{D}_{0,u}(h)(x) = \int_\lambda^x h(\xi)d\xi - D_0(P)(d)(h)(\lambda).$$

4.3. Обобщенное произведение Дюамеля. Рассмотрим случай, когда $u = Pe_\lambda$, где $P \in \mathbb{C}[z]$, $P(0) = 1$, $\lambda \in \Delta$. Пусть $P(z) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j z^j$, $m \in \mathbb{N}$ (при этом $a_0 = 1$ и не исключается случай $a_m = 0$). Введем многочлены p_j, $0 \le j \le m-1$, для которых $\sum\limits_{j=0}^{m-1} (-i)^j p_j(t) z^j = \frac{P(t)-P(z)}{t-z}$ для всех $t, z \in \mathbb{C}$. Выполняются равенства $p_j(t) = i^j \sum\limits_{k=j}^{m-1} a_{k+1} t^{k-j}$, $0 \le j \le m-1$. Положим $\widetilde{p}_j(t) := tp_j(t)$, $0 \le j \le m-1$, $t \in \mathbb{C}$.

Определим обобщенное произведение Дюамеля: для $g, h \in C^\infty(\Delta)$, $x \in \Delta$

$$(g * h)(x) = P(d)(g)(\lambda)h(x) + \int\limits_{\lambda}^{x} (P(d)(g))'(\xi)h(x+\lambda-\xi)d\xi - \sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{p}_j(d)(g)(x)h^{(j)}(\lambda).$$

Ясно, что $g*h \in C^\infty(\Delta)$ и билинейное отображение $(g,h) \mapsto g*h$ непрерывно из $C^\infty(\Delta) \times C^\infty(\Delta)$ в $C^\infty(\Delta)$, а значит, и из $\mathcal{E}_\omega(\Delta) \times \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ в $C^\infty(\Delta)$. Если $P \equiv 1$, то

$$(g * h)(x) = g(\lambda)h(x) + \int\limits_{\lambda}^{x} g'(\xi)h(x+\lambda-\xi)d\xi.$$

При $P \equiv 1$ и $\lambda = 0$ произведение $g * h$ является обычным произведением Дюамеля:

$$(g * h)(x) = g(0)h(x) + \int\limits_{0}^{x} g'(\xi)h(x-\xi)d\xi.$$

Ранее обобщенное произведение Дюамеля, аналогичное введенному выше, было определено в пространстве ростков всех функций, голоморфных на выпуклом локально замкнутом подмножестве $\mathbb{C}$ [21, § 4] и в пространстве целых функций экспоненциального типа, реализующем с помощью преобразования Лапласа сопряженное к пространству всех функций, голоморфных в односвязной области в $\mathbb{C}$ [6, § 1.2]. В [9] М.Т. Караев рассмотрел обобщенное произведение Дюамеля как некоторый дискретный аналог произведения Дюамеля.

Лемма 4.1. *Отображение $t \mapsto \delta_t$ непрерывно из $\mathbb{C}$ в $A_\omega(\Delta)'$.*

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $Q := K$, если Δ является отрезком K, и $Q := K_n$ в случае, когда Δ — интервал Ω. Выберем $m \in \mathbb{N}$, c_1 по n, как в лемме 2.2 (i). Для фиксированного $t_0 \in \mathbb{C}$, для $t \in \mathbb{C}$ получим:

$$\begin{aligned}\|\delta_t - \delta_{t_0}\|^*_{Q,n} &= \sup_{\|f\|_{Q,n} \le 1} |f(t) - f(t_0)| = \sup_{\|f\|_{Q,n} \le 1} \Big| \int\limits_{t_0}^{t} f'(\xi)d\xi \Big| \\ &\le |t-t_0| \sup_{\|f\|_{Q,n} \le 1} \sup_{\xi \in [t_0,t]} |f'(\xi)| \le c_1 |t-t_0| \sup_{\xi \in [t_0,t]} \exp((H_K(\operatorname{Im}\xi) + m\omega(\xi)).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|\delta_t - \delta_{t_0}\|^*_{Q,n} \to$ при $t \to t_0$. □

Теорема 4.2. *Для любых $\varphi, \psi \in A_\omega(\Delta)'$ выполняется равенство $\widehat{\varphi \circledast \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$.*

Доказательство. Покажем вначале, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ в $C^\infty(\Delta)$ выполняется равенство

$$\widehat{\delta_\alpha \circledast \delta_\beta} = e_\alpha * e_\beta. \tag{4.8}$$

Действительно, для $x \in \Delta$

$$\begin{aligned}\widehat{\delta_\alpha \circledast \delta_\beta}(x) &= (\delta_\alpha \circledast \delta_\beta)(e_x) = (\delta_\alpha)_z \left((\delta_\beta)_t \left(\frac{te^{-ixt}P(z)e^{-i\lambda z} - ze^{-ixz}P(t)e^{-i\lambda t}}{t-z} \right) \right) \\ &= \frac{\alpha e^{-ix\alpha}P(\beta)e^{-i\lambda\beta} - \beta e^{-ix\beta}P(\alpha)e^{-i\lambda\alpha}}{\alpha - \beta}.\end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$(e_\alpha * e_\beta)(x) = \frac{\alpha e^{-ix\alpha}P(\beta)e^{-i\lambda\beta} - \beta e^{-ix\beta}P(\alpha)e^{-i\lambda\alpha}}{\alpha - \beta}.$$

Возьмем теперь $\varphi, \psi \in A_\omega(\Delta)'$. Поскольку множество $\{\delta_t \,|\, t \in \mathbb{C}\}$ полно в пространстве Фреше $A_\omega(\Delta)'$, то существуют последовательности функционалов φ_n, ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, из линейной оболочки множества $\{\delta_t \,|\, t \in \mathbb{C}\}$ такие, что $\varphi_n \to \varphi$, $\psi_n \to \psi$ в $A_\omega(\Delta)'$. Вследствие (4.8) $\widehat{\varphi_n \circledast \psi_n} = \widehat{\varphi_n} * \widehat{\psi_n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как непрерывны отображения $(\nu, \eta) \mapsto \nu \circledast \eta$ из $A_\omega(\Delta)' \times A_\omega(\Delta)'$ в $A_\omega(\Delta)'$, $\mathcal{F} : A_\omega(\Delta)' \to \mathcal{E}_\omega(\Delta)$, $(g, h) \mapsto g * h$ из $C^\infty(\Delta) \times C^\infty(\Delta)$ в $C^\infty(\Delta)$, $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$ непрерывно вложено в $C^\infty(\Delta)$, то, переходя в последнем равенстве к пределу, получим, что $\widehat{\varphi \circledast \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ в $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$. Одновременно показано, что $g * h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ для любых функций $g, h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$. □

Для $g \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ определим оператор Дюамеля $S_g(h) := g * h$, $h \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$, линейный и непрерывный в $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$. Из [4, теорема 15], замечания 4.1, теоремы 4.2 следует, что множество $\{S_g \,|\, g \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)\}$ является коммутантом реализации $\widetilde{D}_{0,u}$ оператора обобщенного интегрирования в алгебре всех линейных непрерывных в $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$ операторов. Отметим, что в пространстве $C^\infty[0,1]$ коммутант вольтерровского оператора $\widetilde{D}_0(h)(x) = \widetilde{D}_{0,u}(h)(x) = \int\limits_0^x h(\xi)d\xi$, соответствующего случаю $u \equiv 1$, описан в работе [26].

Для корня a многочлена P полагаем $P_a(t) := \frac{P(t)}{t-a}$. Теоремы 3.1 с помощью обычных двойственных аргументов, теорема 4.2 и равенство (4.6) влекут

Следствие 4.1. *Оператор Дюамеля S_g является изоморфизмом $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$ на себя тогда и только тогда, когда $P(d)(g)(\lambda) \neq 0$ и $P_a(d)(g)(\lambda) \neq 0$ для любого корня a многочлена P.*

4.4. Доказательство формулы Дюамеля для решения дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с помощью умножения $\circledast$. В этом пункте предполагается, что $u \equiv 1$. Применим умножение $\circledast$ к доказательству формулы, выражающей решение $f \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{n} a_j f^{(j)} = g, \quad g \in \mathcal{E}_\omega(\Delta), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0, \tag{4.9}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям $f^{(j)}(0) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$, через такое решение для правой части, тождественно равной 1. Существуют различные подходы к ее обоснованию для некоторых классов функций, отличных от пространств, рассмотренных в этой статье (см., например, монографию М.А. Лаврентьева, Б.В. Шабата [11, гл. VI], статью И.Л. Когана [10]).

Для многочлена $q \in \mathbb{C}[z]$, $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$ положим

$$(q\varphi)(f) := \varphi(qf), \quad f \in A_\omega(\Delta).$$

Поскольку оператор $M_q(f) := qf$ умножения на q линеен и непрерывен в $A_\omega(\Delta)$, то $q\varphi \in A_\omega(\Delta)$ для любого функционала $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$. Пусть $m_j(z) := z^j$, $z \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 4.2. *Пусть $L \in \mathbb{N}$. Для любых попарно различных чисел λ_l, $1 \leq l \leq L$, любых $k_l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq L$, $c_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq n-1$, где $n := \sum\limits_{l=1}^{L} k_l$, система уравнений*

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{s=0}^{k_l - 1} b_{l,s} m_j^{(s)}(\lambda) = c_j, \quad 0 \leq j \leq n-1, \tag{4.10}$$

имеет единственное решение $b_{l,s} \in \mathbb{C}$, $1 \leq l \leq L$, $0 \leq s \leq k_l - 1$.

Доказательство. Семейству комплексных чисел $c = (c_{l,s})_{1 \leq l \leq L, 0 \leq s \leq k_l - 1}$ поставим в соответствие «вытянутый» вектор $\sigma(c) := (c_{1,0}, ..., c_{1,k_1-1}, ..., c_{L,0}, ..., c_{L,k_L-1}) \in \mathbb{C}^n$. Отображение

$$\Phi(f) := \sigma\left(\left(f^{(s)}(\lambda_l)\right)_{1 \leq l \leq L, 0 \leq s \leq k_l - 1}\right)$$

линейно из $\mathbb{C}[z]$ в $\mathbb{C}^n$. Вследствие единственности решения соответствующей кратной интерполяционной задачи Эрмита в $\mathbb{C}[z]_{n-1}$ (см. [12, гл. 4, § 16.2]) Φ биективно отображает $\mathbb{C}[z]_{n-1}$ на $\mathbb{C}^n$. Поскольку система многочленов $\mathcal{M}_n := \{m_j \,|\, 0 \le j \le n-1\}$ линейно независима в $\mathbb{C}[z]_{n-1}$, то ее образ $\Phi(\mathcal{M}_n)$ — линейное независимое подмножество $\mathbb{C}^n$. Это влечет, что для любого $(c_j)_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ система (4.10) имеет единственное решение. $\square$

Введем функционалы $\delta_{\lambda,j}(f) := f^{(j)}(\lambda)$, $\lambda \in \Delta$, $j \ge 0$ ($\delta_{\lambda,0}$ — это рассматривавшаяся ранее дельта-функция δ_λ). Все они линейны и непрерывны на $A_\omega(\Delta)$. Для подпространства Q пространства $A_\omega(\Delta)$ через Q^0 обозначим поляру (аннулятор) Q в $A_\omega(\Delta)'$. Докажем утверждение о делении на многочлен в пространстве $A_\omega(\Delta)'$.

Теорема 4.3. *Пусть $q \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен степени $n \in \mathbb{N}$.*
(i) Для любого $\psi \in A_\omega(\Delta)'$ уравнение $q\varphi = \psi$ имеет решение $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$. Это уравнение имеет единственное решение $\varphi_0 \in A_\omega(\Delta)'$, удовлетворяющее условиям $\varphi(m_j) = 0$, $0 \le j \le n-1$.
(ii) Пусть $\frac{\delta_0}{q} \in A_\omega(\Delta)'$ — решение уравнения $q\varphi = \delta_0$ такое, что $\frac{\delta_0}{q}(m_j) = 0$, $0 \le j \le n-1$. Тогда для любого $\psi \in A_\omega(\Delta)'$ функционал $\varphi_0 := \psi \circledast \frac{\delta_0}{q}$ — решение уравнения $q\varphi = \psi$, удовлетворяющее условиям $\varphi_0(m_j) = 0$, $0 \le j \le n-1$.

Доказательство. (i): Сопряженным к оператору $M_q : A_\omega(\Delta) \to A_\omega(\Delta)$ умножения на q является оператор $M_q' : A_\omega(\Delta)' \to A_\omega(\Delta)'$, $\varphi \mapsto q\varphi$. Поскольку M_q инъективен и имеет замкнутый образ, то [17, гл. 8, $\tilde{8}$.6; теорема 8.6.13] M_q' сюръективен. При этом

$$\operatorname{Ker} M_q' = (\operatorname{Im} M_q)^0 = \operatorname{span}\{\delta_{\lambda_l,s} \,|\, 1 \le l \le L,\, 0 \le s \le k_l - 1\}. \tag{4.11}$$

Пусть $\lambda_l \in \mathbb{C}$, $1 \le l \le L$ ($L \in \mathbb{N}$), — все попарно различные корни q, k_l — кратность корня λ_l; $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$ — некоторое решение уравнения $q\varphi = \psi$, $c_j := \varphi(m_j)$, $0 \le j \le n-1$. По лемме 4.2 система уравнений

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{s=0}^{k_l-1} b_{l,s} m_j^{(s)}(\lambda_l) = c_j,\ \ 0 \le j \le n-1,$$

имеет решение $b_{l,s} \in \mathbb{C}$, $1 \le l \le L$, $0 \le s \le k_l - 1$. Для функционала

$$\varphi_0 := \varphi - \sum_{1 \le l \le L} \sum_{s=0}^{k_l-1} b_{l,s} \delta_{\lambda,s} \in A_\omega(\Delta)'$$

выполняются равенства $q\varphi_0 = \psi$ и $\varphi_0(m_j) = 0$, $0 \le j \le n-1$.

Покажем теперь, что такой функционал φ_0 единственный. Пусть $q\xi = 0$, т.е. $M_q'(\xi) = 0$, где $\xi \in A_\omega(\Delta)'$. По (4.11) найдутся числа $d_{l,s}$, $1 \le j \le L$, $0 \le s \le k_l - 1$, для которых $\xi = \sum\limits_{j=1}^{L} \sum\limits_{s=1}^{k_l-1} d_{l,s} \delta_{\lambda_l,s}$. Если $\xi(m_j) = 0$, $0 \le j \le n-1$, то $\sum\limits_{l=1}^{L} \sum\limits_{s=0}^{k_l-1} d_{l,s} m_j^{(s)}(\lambda_l) = 0$, $0 \le j \le n-1$. Вследствие леммы 4.2 $\xi = 0$.

(ii): Вначале покажем, что $q\varphi_0 = \psi$. Для $f \in A_\omega(\Delta)$

$$\begin{aligned}
(q\varphi_0)(f) &= q\left(\psi \circledast \frac{\delta_0}{q}\right)(f) = \left(\psi \circledast \frac{\delta_0}{q}\right)(qf) \\
&= \psi_z\left(\frac{\delta_0}{q}(T_z(qf))\right) = \psi_z\left(\left(\frac{\delta_0}{q}\right)_t \left(\frac{tq(t)f(t) - zq(z)f(z)}{t-z}\right)\right) \\
&= \psi_z\left(\left(\frac{\delta_0}{q}\right)_t \left(tq(t)\frac{f(t)-f(z)}{t-z} + f(z)\frac{tq(t)-zq(z)}{t-z}\right)\right).
\end{aligned}$$

Так как

$$\left(\frac{\delta_0}{q}\right)_t \left(tq(t)\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\right) = (\delta_0)_t\left(t\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\right) = 0,$$

то

$$(q\varphi_0)(f) = \psi_z\left(f(z)\left(\frac{\delta_0}{q}\right)_t \left(\frac{tq(t)-zq(z)}{t-z}\right)\right).$$

Пусть $q(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$, $a_n \neq 0$. Тогда

$$\frac{tq(t) - zq(z)}{t - z} = \frac{1}{t - z} \sum_{j=0}^{n} a_j (t^{j+1} - z^{j+1}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{j} t^k z^{j-k}.$$

Поэтому

$$(q\varphi_0)(f) = \psi_z \left(f(z) \left(\frac{\delta_0}{q} \right)_t (a_n t^n) \right) = \psi(f) \left(\frac{\delta_0}{q} \right)_t (a_n t^n).$$

Поскольку

$$\left(\frac{\delta_0}{q} \right)_t (a_n t^n) = \left(\frac{\delta_0}{q} \right)_t \left(q(t) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j \right) = \left(\frac{\delta_0}{q} \right)(q) = 1,$$

то $(q\varphi_0)(f) = \psi(f)$ для любой функции $f \in A_\omega(\Delta)$. Итак, $q\varphi_0 = \psi$.

Проверим выполнимость начальных условий $\varphi_0(m_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$. Для j такого, что $0 \leq j \leq n-1$, получим:

$$\left(\psi \circledast \frac{\delta_0}{q} \right)(m_j) = \psi_z \left(\left(\frac{\delta_0}{q} \right)_t \left(\frac{t^{j+1} - z^{j+1}}{t - z} \right) \right) = \psi_z \left(\left(\frac{\delta_0}{q} \right)_t \left(\sum_{k=0}^{j} t^k z^{j-k} \right) \right) = 0.$$

□

Так как $\mathcal{F}'$ — изоморфизм $A_\omega(\Delta)'$ на $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$, то (4.2) и равенства (см. п. 4.2)

$$\begin{aligned} \widehat{v\varphi}(x) &= (v\varphi)(e_x) = \varphi(ve_x) = \varphi(\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(ve_x))) = \mathcal{F}^{-1}(ve_x)(\mathcal{F}'(\varphi)) \\ &= \langle ve_x, \widehat{\varphi} \rangle = v(d)(\widehat{\varphi})(x), \quad v \in \mathbb{C}[z], \quad \varphi \in A_\omega(\Delta)', \quad x \in \Delta, \end{aligned}$$

влекут такое утверждение.

Следствие 4.2. *Для любой функции $g \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ уравнение (4.9) имеет единственное решение $f \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ удовлетворяющее условиям $f^{(j)}(0) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$.*

Если $f_1 \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ — решение уравнения (4.9) с правой частью $g \equiv 1$, удовлетворяющее условиям $f_1^{(j)}(0) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$, то для любой функции $g \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ функция $f = g * f_1 \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ является решением (4.9) таким, что $f^{(j)}(0) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Абанин. *Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.* М.: Мир. 2007.
2. В.В. Жаринов. *Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS* // Успехи матем. наук. **34**:4 (208), 97–131 (1979).
3. О.А. Иванова, С.Н. Мелихов. *Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева* // Уфимск. матем. журн. **6**:3, 17–27 (2014).
4. О.А. Иванова, С.Н. Мелихов. *Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций* // Алгебра и анализ. **28**:2, 114–137 (2016).
5. О.А. Иванова, С.Н. Мелихов. *Коммутант оператора Поммье в пространстве целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной прямой* // Владикавк. матем. журн. **20**:3, 48–56 (2018).
6. О.А. Иванова, С.Н. Мелихов. *Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля* // Владикавк. матем. журн. **22**:3, 72–84 (2020).
7. О.А. Иванова, С.Н. Мелихов. *Циклические векторы и инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в модулях Шварца* // Функц. анализ и его прил. **56**:3, 39–51 (2022).
8. О.А. Иванова, С.Н. Мелихов, Ю.Н. Мелихов. *О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций* // Уфимск. матем. журн. **9**:3, 38–49 (2017).
9. М.Т. Караев. *О некоторых применениях обыкновенного и обобщенного произведений Дюамеля* // Сиб. матем. журн. **46**:3, 553–566 (2005).

10. И.Л. Коган. *Метод интеграла Дюамеля для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с точки зрения теории обобщенных функций* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 1(20), 37–45 (2010).
11. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука. 1973.
12. В.И. Прасолов. *Многочлены.* М.: МЦНО. 2003.
13. А.П. Робертсон, В.Дж. Робертсон. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир. 1967.
14. В.А. Ткаченко. *Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов* // Матем. заметки. **22**:2, 221–230 (1977).
15. В.А. Ткаченко. *Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов* // Матем. заметки. **25**:2, 271–282 (1979).
16. Л. Хермандер. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Т. 1. М.: Мир. 1986.
17. Р. Эдвардс. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* М.: Мир. 1969.
18. Z. Binderman. *Functional shifts induced by right invertible operators* // Math. Nachr. **157**:2, 211–224 (1992).
19. R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor. *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis* // Results in Math. **17**, 206–237 (1990).
20. R.M. Crownover, R.C. Hansen. *Commutants of generalized integrations on a space of analytic functions* // Ind. Univ. Math. J. **26**:2, 233–245 (1977).
21. O.A. Ivanova, S.N. Melikhov. *On invariant subspaces of the Pommiez operator in the spaces of entire functions of exponential type* // J. Math. Sci. **241**:6, 760–769 (2019).
22. Yu.S. Linchuk. *Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable* // MFAT. **12**:4, 384–388 (2006).
23. R. Meise, B.A. Taylor. *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type* // Ark. Mat., **2**, 265–287 (1988).
24. R. Meise, D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis.* Oxford Clarendon. 1997.
25. A. Rainer, G. Schindl. *Composition in ultradifferentiable classes* // Studia Math. **224**:2, 97–131 (2014).
26. R. Tapdigoglu, B.T. Torebek. *Commutant and Uniqueness of Solutions of Duhamel Equations* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **44**, 705–710 (2021).
27. J.H. Williamson. *Compact linear operators in linear topological spaces* // J. London Math . Soc. **29**:2, 149–156 (1954).

Ольга Александровна Иванова,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: `ivolga@sfedu.ru`

Сергей Николаевич Мелихов,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Ватутина, 53,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: `snmelihov@sfedu.ru, snmelihov@yandex.ru`