ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 4 (2023). С. 30-41.

УДК 517.547.22 : 514.17

ЗАДАЧА СИЛЬВЕСТРА, ПОКРЫТИЯ СДВИГАМИ И ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Г.Г. БРАЙЧЕВ, Б.Н. ХАБИБУЛЛИН, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Идея написать заметку возникла в ходе обсуждения, последовавшего за докладом первого автора на Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2022». Предложены три общих способа построения множеств единственности в классах целых функций с ограничениями на рост. Во всех трех случаях в качестве такого множества выбирается последовательность нулей целой функции со специальными свойствами. Первый способ связан с известной проблемой Сильвестра о наименьшем круге, содержащем заданный набор точек на плоскости, и теоремами выпуклой геометрии. Второй исходно опирается на теорему Хелли о пересечении выпуклых множеств и ее применения к возможности покрытия одного множества сдвигом другого. Третий способ основан на классической формуле Йенсена, позволяющей оценить тип целой функции через усредненную верхнюю плотность последовательности ее нулей. Мы даем сейчас только базовые результаты. Развитие наших подходов предполагается изложить в последующих работах.

Ключевые слова: задача Сильвестра, теорема Юнга, теорема Хелли, множество единственности, тип целой функции, последовательность нулей, индикатор целой функции, усредненная верхняя плотность, формула Йенсена, индикаторная диаграмма, наименьший круг.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 52A10

1. Предварительные сведения. Формулировка и обсуждение результатов

1.1. Множества единственности для классов целых функций экспоненциального типа с ограничением на тип. В 1857 году английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр в сообщении [1] поставил следующую задачу. Для заданного конечного набора точек плоскости требуется найти круг наименьшего радиуса, содержащий эти точки. Задача Сильвестра затем неоднократно обобщалась вплоть до абстрактной постановки для произвольного множества в метрическом пространстве. Изложению современного состояния вопроса в русле теории аппроксимации, включая приложения, посвящен, к примеру, обзор [2]. Важную роль в развитии проблематики сыграла доказанная в 1901 году теорема Генриха Юнга [3], согласно которой любой расположенный на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ компакт K диаметра $d := \max\bigl\{|z_1 - z_2| \colon z_1, z_2 \in K\bigr\}$ можно поместить в замкнутый круг радиуса $d/\sqrt{3}$. По каждому плоскому компакту K соответствующий замкнутый круг наименьшего радиуса r находится однозначно, но существует проблема точного вычисления величины r через подходящие геометрические характеристики компакта K. Для одноточечного компакта такой круг очевидно вырождается в ту же точку, т.е. $r = 0$. За

G.G. Braichev, B.N. Khabibullin, V.B. Sherstyukov, Sylvester problem, coverings by shifts, and uniqueness theorems for entire functions.

Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Поступила 6 марта 2023 г.

исключением этого тривиального случая всегда $r > 0$. Простые примеры (отрезок и правильный треугольник) убеждают в точности двусторонней оценки $d/2 \leqslant r \leqslant d/\sqrt{3}$, справедливой для экстремального радиуса r. Отметим еще, что для остроугольного и прямоугольного треугольников экстремальная величина r равна радиусу описанной около треугольника окружности, в то время как для тупоугольного треугольника r есть половина большей стороны, что меньше радиуса описанной окружности. Прекрасное элементарное введение в соответствующий раздел выпуклой геометрии дано в [4], [5].

Раскроем связь задачи Сильвестра с вопросами единственности в традиционных классах целых функций одной переменной. Символом $\mathbb{N}$ обозначаем множество всех натуральных чисел. В основном используем стандартную для теории целых функций терминологию и обозначения [6]. Для целой функции f на $\mathbb{C}$ полагаем

$$M(f;r) := \max_{|\lambda|\leqslant r} |f(\lambda)| = \max_{|\lambda|=r} |f(\lambda)|, \qquad r \geqslant 0.$$

Напомним, что целая функция f имеет экспоненциальный тип, если верхний предел

$$\sigma(f) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(f;\, r)}{r}$$

конечен. Величину $\sigma(f)$ называем (экспоненциальным) *типом* целой функции f.

Целая функция f *обращается в нуль на последовательности* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ комплексных чисел λ_n, если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ не меньше числа точек λ_n из Λ, равных λ. Если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ совпадает с числом точек λ_n из Λ, равных λ, то Λ — *последовательность всех нулей функции* f, обозначаемая далее как $\Lambda(f)$. Последовательность Λ называется *множеством единственности* для некоторого класса целых функций, если всякая функция из этого класса, обращающаяся в нуль на Λ, является нулевой. В противном случае Λ — *множество неединственности* для этого класса.

Индикатором целой функции экспоненциального типа f называется характеристика

$$h(f;\, \theta) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{1.1}$$

Если в этом определении для фиксированного θ при $r \to +\infty$ вне некоторого множества нулевой относительной линейной лебеговой меры существует предел, то говорят, что f — функция вполне регулярного роста на луче $\arg\lambda = \theta$. Функция имеет *вполне регулярный рост* (в смысле Левина–Пфлюгера), если такой специальный предел существует для любого θ из отрезка $[0, 2\pi]$.

Геометрическим двойником индикатора функции f является ее *индикаторная диаграмма* — выпуклый компакт, определяемый как

$$D(f) := \bigcap_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \left\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}(\lambda e^{-i\theta}) \leqslant h(f;\, \theta)\right\}.$$

Отметим универсальное для всех целых функций экспоненциального типа равенство

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} h(f;\, \theta) = \sigma(f). \tag{1.2}$$

Для числа $\sigma > 0$ через $\operatorname{Ent}[1, \sigma)$ обозначаем класс всех целых функций f экспоненциального типа $\sigma(f) < \sigma$. Очевидно, если Λ — множество единственности для класса $\operatorname{Ent}[1, \sigma)$, то оно таково же и для любого класса $\operatorname{Ent}[1, \sigma')$, когда $0 < \sigma' < \sigma$. Ясно также, что если Λ содержит лишь конечное число элементов, то Λ не может служить множеством единственности ни для какого класса $\operatorname{Ent}[1, \sigma)$. Требованием $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая ситуация исключена из определения множества единственности. Поэтому в формулировках наших результатов считаем, не оговаривая это особо, что порождающая функция f имеет бесконечно много нулей, образующих последовательность $\Lambda(f)$. Для определенности элементы этой последовательности нумеруем в порядке возрастания их модулей и с учетом кратностей. Наш первый результат состоит в следующем.

Теорема 1.1. *Пусть $f \not\equiv 0$ — целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста, а $r(f)$ — радиус наименьшего круга, содержащего индикаторную диаграмму $D(f)$. Последовательность $\Lambda(f)$ — множество единственности для* $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$, *если и только если $\sigma \leqslant r(f)$.*

Подчеркнем, что ранее в подобных утверждениях вместо геометрической характеристики $r(f)$ обычно использовались какие-либо плотности последовательности $\Lambda(f)$. Укажем также на возможность переформулировки приведенной теоремы в терминах радиуса полноты соответствующей экспоненциальной системы. Теоретическая база для такого перехода и основные результаты в этом направлении по состоянию к 2012 году подробно изложены в монографии-обзоре [7].

Рассмотрим два примера, в которых действие теоремы 1.1 отличается простотой и наглядностью. Более сложные конструкции, охватываемые этой теоремой, можно извлечь, например, из [8], [9].

Пример 1. Возьмем целую функцию экспоненциального типа вполне регулярного роста $f(\lambda) \underset{\lambda\in\mathbb{C}}{=} \sin\pi\lambda$. Тогда $\Lambda(f)=\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $D(f)$ — отрезок мнимой оси с концами в точках $\pm\pi i$. Здесь $r(f)=\pi$. Применив теорему 1.1, получим известный результат Ф. Карлсона [10] о том, что $\mathbb{Z}$ является множеством единственности в классе $\mathrm{Ent}[1,\pi)$.

Пример 2. Пусть каноническое произведение f построено по множеству Λ, составленному из $\pm\Omega$ и $\pm iM$, где $\Omega=\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $M=\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ суть возрастающие последовательности положительных чисел с плотностями ω и μ соответственно, т.е. существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\omega_n}=\omega>0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n}=\mu>0.$$

Тогда индикаторная диаграмма $D(f)$ — прямоугольник $|\operatorname{Re}\lambda|\leqslant\pi\mu$, $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant\pi\omega$, и на основании теоремы 1.1 заключаем, что $\Lambda(f)=\Lambda$ — множество единственности в классах $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$, где $\sigma\leqslant r(f)=\pi\sqrt{\omega^2+\mu^2}$.

Теорема 1.1 в сочетании с теоремой Юнга дает такое утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть целая функция f такая же, как в теореме* 1.1, *и d — диаметр индикаторной диаграммы $D(f)$. Если $0<\sigma\leqslant d/2$, то $\Lambda(f)$ — множество единственности для* $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$, *а если $\sigma>d/\sqrt{3}$, то $\Lambda(f)$ — множество неединственности для* $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$.

Действительно, если $0<\sigma\leqslant d/2$, то теорема Юнга дает $r(f)\geqslant d/2\geqslant\sigma$, и $\Lambda(f)$ — множество единственности для $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$ по теореме 1.1. Если $d/\sqrt{3}<\sigma$, то по теореме Юнга $r(f)\leqslant d/\sqrt{3}<\sigma$. Согласно теореме 1.1 это означает, что $\Lambda(f)$ — множество неединственности для $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$.

1.2. Множества единственности для классов целых функций экспоненциального типа с ограничением на индикатор. Перейдем к теоремам единственности для классов целых функций f экспоненциального типа с ограничениями на их рост не только в отношении типа, но и применительно к более тонкой характеристике — индикатору (1.1), который удобно продолжить 2π-периодически на всю *вещественную ось* $\mathbb{R}$ и обозначать далее как $h_f(\theta) \overset{(1.1)}{:=} h(f;\theta)$, где $\theta\in\mathbb{R}$.

Порядковое пополнение множества $\mathbb{R}$ верхней и нижней гранями

$$+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \emptyset \notin \mathbb{R} \quad \text{и} \quad -\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \emptyset \notin \mathbb{R},$$

где $\emptyset$ — *пустое множество,* определяет *расширенную* вещественную ось $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$, где, в дополнение к стандартным операциям, полагаем $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0$.

Для *опорной функции* произвольного подмножества $S \subseteq \mathbb{C}$ используем обозначение

$$h_S(\theta) := \sup_{s \in S} \operatorname{Re}\bigl(se^{-i\theta}\bigr) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

которое не должно вызвать разночтений с обозначением h_f для индикатора, поскольку в последнем случае нижний индекс $_f$ — это функция, а в (1.3) нижний индекс $_S$ — это множество.

Пусть 2π-периодическая функция $H\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *тригонометрически выпуклая* [6], [11], т.е.

$$H(\theta) \leqslant \frac{\sin(\theta_2 - \theta)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}\, H(\theta_1) + \frac{\sin(\theta - \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}\, H(\theta_2) \text{ при всех } \theta \in (\theta_1, \theta_2) \subset \mathbb{R},\ 0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi.$$

Каждая такая функция H — опорная функция *выпуклого замкнутого* в $\mathbb{C}$ множества

$$D_H := \bigl\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) \leqslant H(\theta)\bigr\}, \tag{1.4}$$

которое становится непустым *выпуклым компактом,* когда функция H *конечная,* т.е. $H(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Отметим, что для любого $S \subseteq \mathbb{C}$ опорная функция h_S из (1.3) тригонометрически выпуклая 2π-периодическая, а если множество $S \neq \emptyset$ и ограничено в $\mathbb{C}$, то опорная функция h_S конечна.

Замкнутый (соответственно открытый) *треугольник в* $\mathbb{C}$ — это непустое пересечение трех замкнутых (соответственно открытых) полуплоскостей, для которого в случае неограниченности в $\mathbb{C}$ требуем параллельности или совпадения границ двух из полуплоскостей.

Через $\operatorname{Ent}[1, H]$ обозначаем класс всех целых функций f экспоненциального типа с индикатором $h_f(\theta) \leqslant H(\theta)$ при каждом $\theta \in \mathbb{R}$. Множества (не)единственности для таких классов функций, выделяемых ограничениями на индикатор, подробно рассматривались в обзоре [7, гл. 3]; в терминах предельных множеств для целых и субгармонических функций исследовались в монографии В.С. Азарина [12, гл. 6] 2009 года, а после этого детально и в более общей трактовке, зачастую в субгармонических версиях, изучались в работах [13, раздел 3], [14, теоремы 2, 4, 5], [15, теорема 3].

В следующем критерии ключевое утверждение о множестве единственности размещено в конце, поскольку это удобно для более слаженного структурирования доказательства.

Теорема 1.2. *Если целая функция f такая же, как в теореме* 1.1, *а $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — тригонометрически выпуклая 2π-периодическая функция, то равносильны следующие пять утверждений.*

I. *Нет сдвига индикаторной диаграммы $D(f)$, содержащегося в D_H из* (1.4).

II. *Существуют два замкнутых треугольника — содержащий D_H и содержащийся в $D(f)$ — для которых любой сдвиг первого треугольника не содержит в себе второй треугольник.*

III. *Существует тройка чисел $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ со свойством $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, для которой*

$$\sum_{j=1}^{3} |z_j|\, h_{D(f)}(\arg z_j) > \sum_{j=1}^{3} |z_j|\, H(\arg z_j). \tag{1.5}$$

IV. *Существует $\theta \in \mathbb{R}$, для которого $h_f(\theta) + h_f(\theta + \pi) > H(\theta) + H(\theta + \pi)$, или существует тройка $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$, для которой разность $\theta_2 - \theta_1$ не кратна π и выполнено* *неравенство*

$$h_f(\theta_1)\,\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}+h_f(\theta_3)+h_f(\theta_2)\,\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$
$$>H(\theta_1)\,\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}+H(\theta_3)+H(\theta_2)\,\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}.$$

V. *Последовательность* $\Lambda(f)$ *— множество единственности для класса* $\mathrm{Ent}[1,H]$.

Через $\mathrm{Ent}[1,H)$ обозначаем класс всех целых функций f экспоненциального типа с индикатором $h_f(\theta)<H(\theta)$ для любого $\theta\in\mathbb{R}$. Так, при $H(\theta)\equiv\sigma>0$ класс $\mathrm{Ent}[1,H)$ — это предыдущий класс $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$, обсуждавшийся в подразделе 1.1. Если выполнено дополнительное условие

$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}}\bigl(H(\theta)+H(\theta+\pi)\bigr)>0, \tag{1.6}$$

то H — опорная функция непустой *выпуклой области*

$$O_H:=\bigl\{z\in\mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}(ze^{-i\theta})<H(\theta)\bigr\}, \tag{1.7}$$

а класс $\mathrm{Ent}[1,H)$ содержит непостоянные функции. Из теоремы 1.2 вытекает такой факт.

Следствие 1.2. *Пусть целая функция* f *такая же, как в теореме* 1.1, *а* $H\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *— тригонометрически выпуклая* 2π*-периодическая функция, подчиненная условию* (1.6). *Тогда попарно равносильны следующие шесть утверждений.*

I. *Нет сдвига индикаторной диаграммы* $D(f)$, *содержащегося в* O_H *из* (1.7).

II. *Для любого числа* $c\in(0,1)\subset\mathbb{R}$ *существуют описанный вокруг* cO_H *открытый треугольник и замкнутый треугольник, содержащийся в* $D(f)$, *для которых любой сдвиг открытого треугольника не содержит в себе замкнутый треугольник.*

III. *Для любого* $c\in(0,1)$ *существуют* $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ *с* $z_1+z_2+z_3=0$, $|z_1|+|z_2|+|z_3|\neq0$ *и*

$$\sum_{j=1}^{3}|z_j|\,h_{D(f)}(\arg z_j)\geqslant c\sum_{j=1}^{3}|z_j|\,H(\arg z_j). \tag{1.8}$$

IV. *Для любого* $c\in(0,1)$ *существует* $\theta\in\mathbb{R}$, *для которого*

$$h_f(\theta)+h_f(\theta+\pi)>cH(\theta)+cH(\theta+\pi),$$

или существует тройка $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in\mathbb{R}$, *для которой разность* $\theta_2-\theta_1$ *не кратна* π *и*

$$h_f(\theta_1)\,\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}+h_f(\theta_3)+h_f(\theta_2)\,\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$
$$\geqslant cH(\theta_1)\,\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}+cH(\theta_3)+cH(\theta_2)\,\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}.$$

V. *Последовательность* $\Lambda(f)$ *— множество единственности в* $\mathrm{Ent}[1,cH]$ *при любом* $c\in(0,1)$.

VI. *Последовательность* $\Lambda(f)$ *— множество единственности для класса* $\mathrm{Ent}[1,H)$.

Следствие 1.2 будет выведено из теоремы 1.2 после ее доказательства в разделе 2.

1.3. Множества единственности для классов целых функций произвольного порядка роста. Дадим результат иного характера, допускающий достаточно произвольный рост целых функций. Напомним, что *порядком* целой функции f называется величина

$$\rho(f):=\varlimsup_{r\to+\infty}\ \frac{\ln\ln\,M(f;\,r)}{\ln r}.$$

Как показал еще Валирон, для всякой целой функции f конечного положительного порядка ρ найдется неограниченно возрастающая дифференцируемая на некотором луче положительной полуоси функция $\nu(r)$, называемая далее весовой, для которой существует предел

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r\nu'(r)}{\nu(r)} = \rho, \tag{1.9}$$

и величина

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(f;\, r)}{\nu(r)}$$

конечна и положительна. Исходное утверждение Валирона было распространено на целые функции нулевого и бесконечного порядков (см. [16]). Тем самым для любой целой функции f порядка ρ, где $0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$, найдется такая весовая функция ν с условием (1.9), что

$$0 < \sigma_\nu(f) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(f;\, r)}{\nu(r)} < +\infty. \tag{1.10}$$

Величину $\sigma_\nu(f)$ называем *ν-типом* целой функции f. Различным подходам к описанию роста целых функций посвящена гл. II диссертации [17], и там же приведена обширная библиография.

В дальнейшем всегда считаем, что функция ν возрастает к $+\infty$, удовлетворяет (1.9) с некоторым заданным значением $0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$, и такова, что

$$\ln r = o(\nu(r)), \quad r \to +\infty. \tag{1.11}$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность комплексных чисел без конечных предельных точек, упорядоченная по возрастанию модулей. Обозначаем через $n_\Lambda(r) = \max\{n\colon |\lambda_n| \leqslant r\}$, где $r \geqslant 0$, ее *считающую функцию,* а *усредненную считающую функцию* для Λ определяем как

$$N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t) - n_\Lambda(0)}{t}\, dt, \quad r > 0.$$

Если число $\varepsilon > 0$ меньше модуля первого ненулевого члена последовательности Λ, то

$$N_\Lambda(r) = \int\limits_\varepsilon^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\, dt \,-\, n_\Lambda(0) \ln \frac{r}{\varepsilon}, \quad r > \varepsilon.$$

В качестве асимптотической характеристики величины $N_\Lambda(r)$ рассматриваем *усредненную верхнюю ν-плотность*

$$\overline{\Delta}_\nu^*(\Lambda) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{\nu(r)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\nu(r)} \int\limits_\varepsilon^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\, dt \tag{1.12}$$

при указанном выборе значения ε. Равенство верхних пределов в (1.12) основано на (1.11).

Для $\sigma > 0$ через $\operatorname{Ent}[\nu, \sigma)$ обозначаем класс всех целых функций, ν-тип которых меньше, чем σ. Благодаря (1.11) класс $\operatorname{Ent}[\nu, \sigma)$ содержит функции, отличные от многочленов. Классическая формула Йенсена [6, гл. I, § 5] позволяет записать неравенство

$$\sigma_\nu(f) \geqslant \overline{\Delta}_\nu^*(\Lambda), \tag{1.13}$$

связывающее ν-тип (1.10) целой функции f с усредненной верхней ν-плотностью (1.12) последовательности ее нулей $\Lambda = \Lambda(f)$. Следующий простой и одновременно достаточно общий факт непосредственно вытекает из неравенства (1.13), но нам в литературе не встречался.

Теорема 1.3. *Если ν-тип целой функции f с последовательностью нулей $\Lambda := \Lambda(f)$ и усредненная верхняя ν-плотность последовательности Λ совпадают и не равны нулю, т.е.*

$$0 < \sigma := \sigma_\nu(f) = \overline{\Delta}^*_\nu(\Lambda), \tag{1.14}$$

то Λ — множество единственности для $\mathrm{Ent}[\nu,\sigma)$*, но не является таковым для* $\mathrm{Ent}[\nu,\sigma')$ *при любом $\sigma' > \sigma$.*

Обсудим, насколько существенным в теореме 1.3 является требование, чтобы последовательность Λ была нулевым множеством некоторой целой функции. Вначале рассмотрим классы целых функций нулевого порядка, когда значение ρ в условии (1.9) равно нулю. Подходящими примерами весовых функций, удовлетворяющих также (1.11), здесь служат $\nu(r) = \exp(\ln^\alpha r)$ с параметром $\alpha \in (0,1)$ и $\nu(r) = \ln^\beta r$ с параметром $\beta > 1$. В таких случаях для каждой последовательности Λ конечной усредненной верхней ν-плотности $\overline{\Delta}^*_\nu(\Lambda) > 0$ существует целая функция f с нулевым множеством $\Lambda(f) = \Lambda$. Такая функция задается каноническим произведением Вейерштрасса–Адамара. При этом, как показано в диссертации [17, § 2.2], справедливо равенство (1.14). С учетом сделанных замечаний из теоремы 1.3 извлекаем такое утверждение.

Следствие 1.3. *Пусть возрастающая к $+\infty$ функция ν удовлетворяет условию* (1.9) *со значением $\rho = 0$ и условию* (1.11)*. Тогда любая последовательность комплексных чисел с конечной усредненной верхней ν-плотностью $\overline{\Delta}^*_\nu(\Lambda) =: \sigma > 0$ является множеством единственности для класса* $\mathrm{Ent}[\nu,\sigma)$*.*

Для функций конечного положительного порядка ситуация иная. Если весовая функция ν удовлетворяет условию (1.9) с конечным $\rho > 0$ (тогда и (1.11) выполнено), то уже не всякая последовательность комплексных чисел Λ с конечной усредненной верхней ν-плотностью может служить множеством нулей целой функции конечного ν-типа. Произведение Вейерштрасса–Адамара, построенное по Λ, будет задавать целую функцию конечного ν-типа, если ρ — нецелое число. Если же число ρ является целым, то для построения нужной целой функции от Λ требуется определенная «сбалансированность» в духе условия Линделефа [18].

Важно отметить также, что при $\rho > 0$ условие (1.14) в теореме 1.3 является довольно жестким, «заставляя» целую функцию f иметь постоянный ν-индикатор

$$h_\nu(f;\theta) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{\nu(r)} \equiv \sigma, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{1.15}$$

Фактически, простая идея привлечь свойство (1.14) к вопросам единственности была заложена в обзоре [19, раздел 2], где имеется и дополнительная информация, связанная с ограничением (1.15).

При фиксированном $\sigma > 0$ условие (1.14) выделяет в классе целых функций, имеющих ν-тип $\sigma_\nu(f) = \sigma$, те, у которых последовательность нулей $\Lambda(f)$ имеет максимально возможную усредненную верхнюю ν-плотность. Приведем еще одно наблюдение, демонстрирующее связь между теоремами 1.1 и 1.3. Пусть f — целая функция экспоненциального типа с $\sigma(f) = \sigma > 0$. Предположим, что последовательность ее нулей $\Lambda := \Lambda(f)$ *измерима*, т.е. существует предел

$$\Delta^*(\Lambda) := \lim_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r},$$

причем выполнено равенство $\Delta^*(\Lambda) = \sigma$. Тогда (см. [19, раздел 2]; см. также [20]) f имеет вполне регулярный рост, а индикаторная диаграмма $D(f)$ в точности совпадает с содержащим ее наименьшим кругом $\bigl\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant \sigma = r(f)\bigr\}$. По теореме 1.1 такая последовательность Λ образует множество единственности для класса $[1,\sigma)$.

Проверить равенство (1.14) можно непосредственно по тейлоровским коэффициентам и нулям целой функции f, выразив его в этих терминах, следуя [17, гл. 2] и [20].

Следствие 1.4. *Пусть строго возрастающая к $+\infty$ функция ν удовлетворяет условию* (1.9) *с конечным значением $\rho > 0$, φ — обратная к ν функция, а $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность всех нулей целой функции $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Если выполнено условие*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt[n]{|\lambda_1\,\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|}} = \varlimsup_{n\to\infty} \varphi(n)\,\sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e\rho)^{1/\rho},$$

то Λ является множеством единственности для класса $\mathrm{Ent}[\nu,\sigma)$.

2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. В случае $r(f) = 0$ индикаторная диаграмма $D(f) = \{a\}$ — одноточечное множество, а $\sigma > r(f) = 0$. При этом $\Lambda(f)$ не является множеством единственности для $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$, поскольку ненулевая целая функция $\lambda \underset{\lambda\in\mathbb{C}}{\longmapsto} f(\lambda)\,e^{-\overline{a}\lambda}$ (черта означает комплексное сопряжение) имеет нулевой тип, по-прежнему обращается в нуль на $\Lambda(f)$ и принадлежит классу $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$ при любом $\sigma > 0$. Видим, что в этом случае теорема 1.1 верна, и далее рассматриваем только случай $r(f) > 0$.

Покажем, что в условиях теоремы 1.1 последовательность $\Lambda(f)$ является множеством единственности для класса $\mathrm{Ent}\bigl[1, r(f)\bigr)$ и не является таковым ни для какого класса $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$ при $\sigma > r(f)$. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — центр наименьшего круга радиуса $r(f)$, содержащего индикаторную диаграмму $D(f)$ функции f. Рассмотрим функцию $f_{-\overline{a}}(\lambda) \underset{\lambda\in\mathbb{C}}{\equiv} f(\lambda)\,e^{-\overline{a}\lambda}$. Эта целая функция также имеет экспоненциальный тип, и ее индикаторная диаграмма $D(f_{-\overline{a}})$ лежит в круге

$$\bigl\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant r(f)\bigr\}. \tag{2.1}$$

Учитывая экстремальный характер такого круга и свойство (1.2), заключаем, что экспоненциальный тип $\sigma(f_{-\overline{a}})$ вспомогательной целой функции $f_{-\overline{a}}$ равен $r(f)$. Поскольку $f_{-\overline{a}} \in \mathrm{Ent}[1,\sigma)$ при любом $\sigma > r(f)$, то последовательность $\Lambda(f_{-\overline{a}}) = \Lambda(f)$ не является множеством единственности для $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$ при любом $\sigma > r(f)$. Обратим внимание, что необходимая часть теоремы справедлива без дополнительного требования о регулярности роста функции f. Это требование понадобится при доказательстве достаточности.

Итак, пусть порождающая целая функция f экспоненциального типа имеет вполне регулярный рост. Покажем, что последовательность ее нулей $\Lambda(f)$ образует множество единственности для класса $\mathrm{Ent}\bigl[1, r(f)\bigr)$, где $r(f)$ — радиус наименьшего круга, содержащего индикаторную диаграмму $D(f)$. Как и выше, работаем со вспомогательной функцией $f_{-\overline{a}}$, имеющей ту же последовательность нулей, что и f. Индикаторная диаграмма $D(f_{-\overline{a}})$ содержится в круге (2.1), но не может быть помещена ни в какой круг меньшего радиуса. Пусть $F \in \mathrm{Ent}\bigl[1, r(f)\bigr)$ и F обращается в нуль на $\Lambda(f)$. Тогда частное $g(\lambda) \underset{\lambda\in\mathbb{C}}{\equiv} F(\lambda)/f_{-\overline{a}}(\lambda)$ задает целую функцию экспоненциального типа. Поскольку $f_{-\overline{a}}$ имеет вполне регулярный рост, то действует правило сложения индикаторов

$$h(g f_{-\overline{a}};\,\theta) = h(g;\,\theta) + h(f_{-\overline{a}};\,\theta) = h(F;\,\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{2.2}$$

Экстремальный по отношению к выпуклому компакту $D(f_{-\overline{a}})$ характер круга (2.1) показывает, что реализуется хотя бы одна из следующих ситуаций.

1. Найдется направление $\theta_0 \in [0,\pi]$, для которого

$$h(f_{-\overline{a}};\theta_0) = h(f_{-\overline{a}};\theta_0+\pi) = \sigma(f_{-\overline{a}}) = r(f).$$

Ввиду (2.2), с учетом (1.2) и выбора F, в таком случае имеем

$$\begin{gathered}h(g;\,\theta_0)=h(F;\theta_0)-h(f_{-\overline{a}};\theta_0)\leqslant\sigma(F)-r(f)<0,\\ h(g;\,\theta_0+\pi)=h(F;\theta_0+\pi)-h(f_{-\overline{a}};\theta_0+\pi)\leqslant\sigma(F)-r(f)<0.\end{gathered}$$

Здесь $h(g;\,\theta_0)+h(g;\,\theta_0+\pi)<0$, что по известному свойству индикатора не может выполняться для отличной от тождественного нуля функции g.

2. Найдутся такие три направления $\theta_1<\theta_2<\theta_3$ на $[0,2\pi]$, что

$$\theta_2-\theta_1<\pi,\quad \theta_3-\theta_2<\pi,\quad \theta_3-\theta_1>\pi,$$

и для которых $h(f_{-\overline{a}};\theta_1)=h(f_{-\overline{a}};\theta_2)=h(f_{-\overline{a}};\theta_3)=\sigma(f_{-\overline{a}})=r(f)$. В этом случае, снова привлекая (2.2), получим, что значения $h(g;\,\theta)$ будут отрицательными при $\theta=\theta_j$, где $j=1,2,3$. Расположение указанных точек позволяет из общих свойств индикатора заключить, что и в этом случае $g(\lambda)\equiv 0$. Таким образом, в любом случае $g(\lambda)\equiv 0$, откуда и $F(\lambda)\equiv 0$. Следовательно, $\Lambda(f)$ — множество единственности для класса $\mathrm{Ent}\big[1,r(f)\big)$. Теорема 1.1 доказана. □

Доказательство теоремы 1.2. Сначала докажем равносильность отрицаний утверждений V и I. Пусть для некоторого $a\in\mathbb{C}$ сдвиг $D(f)+a$ содержится в D_H. Это означает, что индикаторная диаграмма целой функции $f_{\overline{a}}(\lambda)\underset{\lambda\in\mathbb{C}}{\equiv}f(\lambda)\,e^{\overline{a}\lambda}$ лежит в выпуклом компакте D_H, т.е. выпуклый компакт $D(f_{\overline{a}})$ содержится в выпуклом компакте D_H. По определению индикаторной диаграммы это влечет за собой неравенство $h_{f_{\overline{a}}}(\theta)\leqslant H(\theta)$ при каждом $\theta\in\mathbb{R}$. Следовательно, $\Lambda(f_{\overline{a}})=\Lambda(f)$ — множество неединственности в классе $\mathrm{Ent}[1,H]$.

Обратно, пусть $\Lambda(f)$ — множество неединственности для $\mathrm{Ent}[1,H]$. Тогда существует ненулевая целая функция F экспоненциального типа, обращающаяся в нуль на последовательности $\Lambda(f)$, для которой $h_F(\theta)\leqslant H(\theta)$ при каждом $\theta\in\mathbb{R}$. Это означает, что индикаторная диаграмма $D(F)$ содержится в D_H и F делится на функцию f, т.е. $F=gf$ для некоторой ненулевой целой функции g. При этом g — целая функция экспоненциального типа как отношение таковых. Поскольку f вполне регулярного роста, то по известной теореме о сложении индикаторов так же, как в (2.2), получаем $h_f(\theta)+h_g(\theta)\equiv h_{gf}(\theta)\equiv h_F(\theta)\leqslant H(\theta)$ для всех $\theta\in\mathbb{R}$. Последнее на языке индикаторных диаграмм и выпуклого компакта D_H с опорной функцией H означает, что $D(f)+D(g)\subseteq D_H$. В частности, для любой точки $z\in D(g)$ имеет место включение $D(f)+z\subseteq D_H$. Таким образом, некоторый сдвиг $D(f)$ лежит в D_H. Равносильность утверждений V и I доказана.

При доказательства эквивалентности утверждения I оставшимся трем утверждениям II–IV снова будем оперировать их отрицаниями. Основную роль сыграет следующий результат из [21].

Теорема 2.1 ([21, теорема 2])**.** *Пусть C — выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, $\mathcal{S}$ — семейство множеств из $\mathbb{C}$, а S — объединение всех множеств из $\mathcal{S}$. Допустим, что C — замкнутое или S — открытое множество. Тогда следующие четыре утверждения попарно эквивалентны:*

(i) *некоторый сдвиг множества S содержится в C;*

(ii) *для любого набора трех множеств S_1,S_2,S_3 из $\mathcal{S}$ и любого замкнутого непустого треугольника, описанного вокруг C, найдется точка $z\in\mathbb{C}$, для которой все три сдвига S_1+z,S_2+z,S_3+z содержатся в этом треугольнике;*

(iii) *для любого набора трех множеств $S_1,S_2,S_3\in\mathcal{S}$ и для любых наборов трех вещественных чисел $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in\mathbb{R}$ и чисел $q_1,q_2,q_3\geqslant 0$ при условии $q_1e^{i\theta_1}+q_2e^{i\theta_2}+q_3e^{i\theta_3}=0$ имеет место неравенство*

$$q_1h_{S_1}(\theta_1)+q_2h_{S_2}(\theta_2)+q_3h_{S_3}(\theta_3)\leqslant q_1h_C(\theta_1)+q_2h_C(\theta_2)+q_3h_C(\theta_3);$$

(iv) *для любого набора трех множеств S_1, S_2, $S_3 \in \mathcal{S}$ и для любого набора чисел θ_1, θ_2, $\theta_3 \in \mathbb{R}$, если всякая разность из этого набора чисел кратна π, то при $\theta_j - \theta_k$, не кратном 2π, имеет место неравенство $h_{S_1}(\theta_k) + h_{S_2}(\theta_j) \leqslant h_C(\theta_k) + h_C(\theta_j)$, а если разность $\theta_2 - \theta_1$ не кратна π, то справедливо неравенство*

$$h_{S_1}(\theta_1)\,\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} + h_{S_3}(\theta_3) + h_{S_2}(\theta_2)\,\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} \\ \leqslant h_C(\theta_1)\,\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} + h_C(\theta_3) + h_C(\theta_2)\,\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}.$$

Положим $S := D(f)$ и $C := D_H$. При таком выборе оба множества S и C — выпуклые компакты в $\mathbb{C}$. При этом сразу видим, что утверждение (i) теоремы 2.1 — это отрицание утверждения I теоремы 1.2.

Перейдем к утверждению (ii). В теореме 2.1 можно мыслить S как объединение всех множеств из семейства $\mathcal{S} = \bigl\{\{s\}\colon s \in S\bigr\}$ всех одноточечных множеств, содержащихся в S. Тогда утверждение (ii) будет означать, что для любой тройки точек $s_1, s_2, s_3 \in S$ и любого замкнутого непустого треугольника, описанного вокруг C, найдется точка $z \in \mathbb{C}$, для которой все три сдвига $s_1 + z, s_2 + z, s_3 + z$ содержатся в этом треугольнике. В силу выпуклости S это значит, что любой замкнутый треугольник с произвольными вершинами $s_1, s_2, s_3 \in S$ сдвигом можно поместить в упоминавшийся описанный вокруг C замкнутый треугольник. Отсюда легко видеть, что утверждение (ii) — это отрицание утверждения II теоремы 1.2 при указанном выборе семейства $\mathcal{S}$.

Перейдем к (iii). В теореме 2.1 можно мыслить S как объединение всех множеств из семейства $\mathcal{S} = \{S\}$, состоящего из одного множества S. Тогда утверждению (iii) будет означать, что для любой тройки комплексных чисел в полярной форме $z_1 = q_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = q_2 e^{i\theta_2}$, $z_3 = q_3 e^{i\theta_3}$ при условии $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ имеет место нестрогое неравенство, противоположное строгому неравенству (1.5) из утверждения III теоремы 1.2. Таким образом, (iii) — это отрицание III теоремы 1.2.

Перейдем к (iv). В теореме 2.1 снова можем рассматривать S как объединение всех множеств из семейства $\mathcal{S} = \{S\}$, состоящего из одного множества S, т.е. $S_1 = S_2 = S_3 = S$ в двух нестрогих неравенствах утверждения (iv), которые противоположны строгим неравенствам из утверждения IV теоремы 1.2. Таким образом, утверждение (iv) — это отрицание утверждения IV теоремы 1.2.

По теореме 2.1 утверждения (i)–(iv) в описанных выше в доказательстве версиях эквивалентны, а значит, равносильны и их отрицания I–IV из теоремы 1.2. Таким образом, теорема 1.2 доказана. □

Вывод следствия 1.2 *из теоремы* 1.2. Обоснуем сначала эквивалентность утверждений V и VI следствия 1.2 через эквивалентность их отрицаний. Отрицание утверждения VI следствия 1.2 — это то, что $\Lambda := \Lambda(f)$ есть множество неединственности для класса $\operatorname{Ent}[1, H)$. Другими словами, существует целая функция $F \not\equiv 0$ экспоненциального типа, обращающаяся в нуль на Λ, с индикаторной диаграммой-компактом $D(F)$, лежащим внутри выпуклой области O_H. В частности, Λ — множество неединственности для $\operatorname{Ent}[1, h_F]$. Следовательно, существует такое $c \in (0, 1)$, для которого некоторый сдвиг выпуклого компакта D_{cH} с опорной функций cH включает в себя $D(F)$ и содержится в O_H. Применение сдвига к D_{cH} означает, что при некотором a_c целая функция экспоненциального типа $F(\lambda)\,e^{a_c\lambda} \not\equiv 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ по-прежнему обращается в нуль на Λ и принадлежит классу $\operatorname{Ent}[1, cH]$. Таким путем вывели, что Λ — множество неединственности для $\operatorname{Ent}[1, cH]$, а отрицание утверждения VI следствия 1.2 влечет за собой отрицание утверждения V следствия 1.2. Движение по этой цепочке рассуждений в обратном порядке показывает, что отрицание утверждения V следствия 1.2 влечет за собой отрицание утверждения VI следствия 1.2. Таким образом, утверждения V и VI следствия 1.2 равносильны.

Эквивалентность утверждения V следствия 1.2 всем предшествующим утверждениям I–IV следствия 1.2 — это в точности эквивалентность утверждения V теоремы 1.2 предшествующим утверждениям I–IV теоремы 1.2 для cH вместо H. При этом замена строгих неравенств $>$ из (1.5) и неравенств утверждения IV теоремы 1.2 на нестрогие $\geqslant$ в (1.8) и утверждении IV из следствия 1.2 возможна ввиду того, что число $c \in (0,1)$ допускает определенные варьирования внутри $(0,1)$. То же самое относится и к описанному вокруг cO_H открытому треугольнику в утверждении II следствия 1.2 вместо, казалось бы, требуемого согласно утверждению II теоремы 1.2 замкнутого треугольника, описанного вокруг D_{cH}. Следствие 1.2 доказано. □

Доказательство теоремы 1.3. Пусть в условиях теоремы F — целая функция ν-типа $\sigma_\nu(F) < \sigma$, обращающаяся в нуль на Λ. Предположим, что F отлична от тождественного нуля. Тогда F имеет бесконечно много нулей, образующих последовательность $\Lambda(F)$, для которой $\Lambda = \Lambda(f) \subseteq \Lambda(F)$. Вложение здесь означает, что число вхождений в $\Lambda(F)$ каждого значения $\lambda \in \mathbb{C}$ не меньше числа его вхождений в Λ. Следовательно, для считающих функций этих последовательностей выполнено неравенство $n_{\Lambda(F)}(r) \geqslant n_\Lambda(r)$ при всех $r \geqslant 0$. Привлекая (1.12)–(1.14), имеем

$$\sigma_\nu(F) \overset{(1.13)}{\geqslant} \overline{\Delta}_\nu^*\bigl(\Lambda(F)\bigr) \overset{(1.12)}{=} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_{\Lambda(F)}(r)}{\nu(r)} \geqslant \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{\nu(r)} \overset{(1.12)}{=} \overline{\Delta}_\nu^*(\Lambda) \overset{(1.14)}{=} \sigma_\nu(f) \overset{(1.14)}{=} \sigma,$$

что противоречит условию $\sigma_\nu(F) < \sigma$. Следовательно, $F(\lambda) \equiv 0$ на $\mathbb{C}$, и Λ — множество единственности для класса $\mathrm{Ent}[1,\sigma)$. Если же взять $\sigma' > \sigma$, то в класс $\mathrm{Ent}[1,\sigma')$ попадет сама функция f, что не позволяет последовательности ее нулей $\Lambda = \Lambda(f)$ быть множеством единственности для такого класса $\mathrm{Ent}[1,\sigma')$ с $\sigma' > \sigma$. Теорема 1.3 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.J. Sylvester. *A question in the geometry of situation* // Quarterly Journal of Mathematics. **1**, 79 (1857).
2. А.Р. Алимов, И.Г. Царьков. *Чебышевский центр множества, константа Юнга и их приложения* // Успехи матем. наук. **74**:5, 3–82 (2019).
3. H. Jung. *Ueber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst* // Journal für die reine und angewandte Mathematik. **123**, 241–257 (1901).
4. Г. Радемахер, О. Теплиц. *Числа и фигуры. Опыты математического мышления.* М.: ГИФМЛ. 1966.
5. В.Ю. Протасов. *Теорема Хелли и вокруг нее* // Квант. **3**, 8–14 (2009).
6. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
7. Б.Н. Хабибуллин. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Изд. 4-е допол. Уфа: РИЦ БашГУ. 2012. https://www.researchgate.net/publication/271841461
8. Ю.Ф. Коробейник. *Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям.* I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Республ. научн. сб. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та. **54**, 42–49 (1990).
9. Ю.Ф. Коробейник. *Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям.* II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Республ. научн. сб. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та. **55**, 23–34 (1991).
10. F. Carlson. *Über ganzwertige Funktionen* // Mathematishe Zeitschrift. **11**, 1–23 (1921).
11. А.Ф. Гришин, К.Г. Малютин. *Тригонометрически выпуклые функции.* Курск: Юго-Западный государственный ун-т. 2015.
12. V. Azarin. *Growth theory of subharmonic functions.* Birkhäuser Adv. Texts Basler Lehrbücher. Basel: Birkhäuser Verlag. 2009.
13. Б.Н. Хабибуллин. *Последовательности неединственности для весовых пространств голоморфных функций* // Изв. вузов. Матем. 4, 75–84 (2015).
14. Б.Н. Хабибуллин, Ф.Б. Хабибуллин. *К распределению нулевых множеств голоморфных функций.* III. *Теоремы обращения* // Функц. анализ и его прил. **53**:2, 42–58 (2019).

15. B.N. Khabibullin, F.B. Khabibullin. *Necessary and Sufficient Conditions for Zero Subsets of Holomorphic Functions with Upper Constraints in Planar Domains* // Lobachevskii Jour. of Math. **42**:4, 800–810 (2021).
16. E.P. Earl, W.K. Hayman. *Smooth majorants for functions of arbitrarily rapid growth* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **109**:3, 565–569 (1991).
17. Г.Г. Брайчев. *Экстремальные задачи в теории относительного роста выпуклых и целых функций* // Дисс. ... д.ф.-м.н. М.: РУДН. 2018.
18. L.A. Rubel, B.A. Taylor. *A Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bulletin de la S.M.F. **96**, 53–96 (1968).
19. Г.Г. Брайчев, В.Б. Шерстюков. *Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах* // Фундамент. и прикл. матем. **22**:1, 51–97 (2018).
20. Г.Г. Брайчев. *О связи между ростом нулей и убыванием тейлоровских коэффициентов целой функции* // Матем. заметки. **113**:1, 32–45 (2023).
21. Б.Н. Хабибуллин. *Теорема Хелли и сдвиги множеств.* II. *Опорная функция, системы экспонент, целые функции* // Уфимск. матем. журн. **6**:4, 125–138 (2014).

Георгий Генрихович Брайчев,
Московский педагогический государственный университет,
Краснопрудная, 14,
107140, г. Москва, Россия,
Российский университет дружбы народов,
Математический институт имени С.М. Никольского,
Миклухо-Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
E-mail: braichev@mail.ru

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Владимир Борисович Шерстюков,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com