ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 4 (2023). С. 3-19.

УДК 517.5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ, ИХ ПРЯМЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И РОДСТВЕННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Ф.Г. АВХАДИЕВ

Аннотация. Неравенства Харди имеют многочисленные применения в математической физике и спектральной теории неограниченных операторов. В статье описаны прямые обобщения интегральных неравенств Харди, их усиления и аналоги. Нами систематизированы связи между различными интерпретациями этих неравенств и описаны новые одномерные интегральные неравенства. Показано, что эти известные и новые неравенства справедливы и для комплекснозначных функций.

Подробно рассмотрены интегральные неравенства типа Харди, Реллиха и Бирмана для функций, заданных в конечных интервалах. В частности, мы приводим с доказательством обобщения и усиления интегральных неравенств Бирмана для высших производных. Кратко обсуждаем многомерные аналоги, содержащие интегралы от степеней модуля градиента функции или полигармонического оператора.

Ключевые слова: неравенство Харди, Реллиха, Бирмана, константа Лямба, полигармонический оператор.

Mathematics Subject Classification: 26D10, 33C20

1. Введение

Как известно, неравенства Харди применяются при обосновании теорем вложения в пространствах Соболева. По-видимому, эти применения сыграли ключевую роль в популяризации одномерных интегральных неравенств Харди. Отметим, что в монографии С.Л. Соболева [1] имеется отдельный параграф «Неравенство Харди», стр. 118–124. Там обоснованы несколько вариантов этих неравенств и некоторые обобщения, когда весовые функции имеют вид $t^{-\lambda}|\ln t|^p$.

Появление различных версий неравенства Харди и родственных неравенств обусловлено большим количеством разнообразных приложений. В данной статье базовым версиям неравенства Харди посвящен следующий раздел 2, где, в частности, мы даем обоснование распространения этих неравенств на случай комплекснозначных функций.

В основном разделе 3 изложены неравенства для высших производных, а в разделе 4 даны усиления неравенств в конечных интервалах. Мы последовательно описываем связи между различными интерпретациями интегрального неравенства Харди и неравенств типа Харди, Реллиха и Бирмана для функций, заданных в бесконечных и конечных интервалах. Таким образом, нами систематизированы связи между различными интерпретациями интегральных неравенств Харди, Реллиха и Бирмана. Из новых результатов, полученных в статье, выделим теоремы 3.2 и 4.2, посвященные обобщениям и усилениям интегральных неравенств Реллиха и Бирмана, содержащих модули комплекснозначной функции $f : X \to \mathbb{C}$ и ее производной $f^{(k)}$ порядка $k \geq 2$. Множество $X = (0, \infty)$ в теореме 3.2 и $X = (0, c)$, $c \in (0, \infty)$, в теореме 4.2.

F.G. Avkhadiev, Integral Hardy inequalities, their generalizations and related inequalities.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00066).

Поступила 21 июня 2023 г.

В последнем разделе 5 кратко обсуждаем переход от одномерных интегральных неравенств к неравенствам для комплекснозначных функций, заданных в областях евклидова пространства размерности $n \geq 2$. При этом рассматриваются пространственные аналоги неравенств для функций $u : \Omega \to \mathbb{C}$, когда интегралы по области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ содержат модуль этой функции и модули градиента $\nabla u(x)$ или полигармонического оператора $\Delta^{k/2} u(x)$.

Автор благодарен И.Х. Мусину и Б.Н. Хабибуллину, так как дополнительным стимулом к написанию этой статьи послужили вопросы и замечания И.Х. Мусина и Б.Н. Хабибуллина при обсуждении докладов автора на Международных Уфимских научных конференциях «Комплексный анализ и геометрия» в ноябре 2021 года и «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» в октябре 2022 года.

2. О базовых версиях неравенства Харди

Оригинальное неравенство Харди можно сформулировать следующим образом (см. книгу [2, теоремы 327, 328 и 330]).

Теорема 2.1. *Предположим, что* $p \in [1, \infty)$, $s \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. *Пусть задана функция* $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$, *удовлетворяющая условию* $f/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$.

Определим функцию $F : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *равенствами*

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \text{в случае} \quad s > 1, \qquad F(t) = \int_t^\infty f(\tau) d\tau \quad \text{в случае} \quad s < 1.$$

Тогда справедливы утверждения: если $p = 1$, *то имеет место равенство*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{s-1}}\, dt = |s-1| \int_0^\infty \frac{F(t)}{t^s}\, dt;$$

если же $p > 1$, *то*

$$\int_0^\infty \frac{f^p(t)}{t^{s-p}}\, dt > \left(\frac{|s-1|}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{F^p(t)}{t^s}\, dt, \tag{2.1}$$

кроме случая, когда функция $f \equiv 0$. *Константа* $(|s-1|/p)^p$ *в этом неравенстве является наилучшей, т.е. максимальной из возможных.*

Следующую теорему можно считать версией теоремы Харди, так как она одновременно является и обобщением, и следствием теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *1) Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $1 < s < \infty$. *Предположим, что функция* $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке* $[0, a]$ *и удовлетворяет условиям:* $g(0) = 0$, $g'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$. *Тогда*

$$\int_0^\infty \frac{|g'(t)|^p}{t^{s-p}}\, dt \geq \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|g(t)|^p}{t^s}\, dt. \tag{2.2}$$

Если $p > 1$ *и* $g \not\equiv 0$, *то это неравенство является строгим, но постоянная* $((s-1)/p)^p$ *является точной, т.е. максимальной из возможных.*

2) Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $-\infty < \sigma < 1$. *Предположим, что функция* $g : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на любом луче* $[a, \infty]$, $a > 0$, *и удовлетворяет условиям:*

$$g(\infty) = 0 \quad \text{и} \quad g'/\tau^{\sigma/p-1} \in L^p(0, \infty).$$

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{|g'(\tau)|^p}{\tau^{\sigma-p}}\, d\tau \geq \left(\frac{|\sigma-1|}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|g(\tau)|^p}{\tau^\sigma}\, d\tau. \tag{2.3}$$

Если $p > 1$ *и* $g \not\equiv 0$, *то это неравенство является строгим, но постоянная* $(|\sigma-1|/p)^p$ *является точной, т.е. максимальной из возможных.*

Ясно, что эта теорема является обобщением и усилением теоремы 2.1. Обратим внимание читателя на то, что в теореме 2.2 отсутствуют требования, связанные с монотонностью или знакопостоянством рассматриваемых функций g и g'.

С другой стороны, теорема 2.2 — следствие теоремы 2.1 с точки зрения неравенств.

Действительно, пусть $1 < s < \infty$. Определим функции f и F равенствами $f(t) = |g'(t)|$ и $F(t) = \int_0^t |g'(\tau)| d\tau$.

Так как $\int_0^t |g'(\tau)| d\tau \geq |g(t)|$, следовательно, $F(t) \geq |g(t)|$ при $t \geq 0$, то неравенство (2.2) следует из неравенства (2.1) при $p > 1$, а при $p = 1$ следует из равенства, соответствующего случаю $p = 1$ в теореме 2.1.

Неравенство (2.3) получается из (2.2) при замене переменной $\tau = 1/t$ и параметра $\sigma = 2 - s$. Таким образом, теорема 2.2 является следствием теоремы 2.1, примененной к функциям

$$F(t) = \int_0^t |g'(\tau)| d\tau \quad (s > 1), \quad F(t) = \int_t^\infty |g'(\tau)| d\tau \quad (\sigma < 1), \quad f(t) = |g'(t)| \quad (s > 1, \sigma < 1).$$

Очевидно, что такие формулы для определения функций $F : (0, \infty) \to [0, \infty)$ и $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ можно использовать и в том случае, когда функция g является комплекснозначной. Поэтому справедлива следующая версия теоремы Харди.

Теорема 2.3. *Предположим, что $p \in [1, \infty)$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, непрерывная функция $g : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ является дифференцируемой почти всюду, $|g'|/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$ и выполнены следующие условия:*

1) если $s > 1$, то $g(0) := \lim_{t \to 0} g(t) = 0$ и имеет место равенство $g(t) = \int_0^t g'(\tau) d\tau$, где $0 \leqslant t < \infty$;

2) если $s < 1$, то $g(\infty) := \lim_{t \to \infty} g(t) = 0$ и имеет место равенство $g(t) = \int_\infty^t g'(\tau) d\tau$, где $0 < t \leqslant \infty$.

Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \frac{|g'(t)|^p}{t^{s-p}} \, dt \geq \left(\frac{|s-1|}{p} \right)^p \int_0^\infty \frac{|g(t)|^p}{t^s} \, dt. \tag{2.4}$$

Если $p > 1$ и $g \not\equiv 0$, то это неравенство является строгим, но постоянная $(|s-1|/p)^p$ является точной, т.е. максимальной из возможных.

Пусть k — натуральное число. Как обычно, символом $C^k(\Omega)$ обозначим семейство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций $g : \Omega \to \mathbb{C}$, где Ω — непустое открытое множество. Символом $C_0^k(\Omega)$ обозначим подсемейство, состоящее из функций $g \in C^k(\Omega)$, компактные носители которых лежат в Ω.

Следствие 2.1. *Для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ имеет место следующее неравенство*

$$\int_0^\infty \frac{|g'(t)|^p}{t^{s-p}} \, dt \geq \left(\frac{|s-1|}{p} \right)^p \int_0^\infty \frac{|g(t)|^p}{t^s} \, dt \quad \forall g \in C_0^1(0, \infty) \tag{2.5}$$

с точной постоянной $(|s-1|/p)^p$. Для функции $g \not\equiv 0$ неравенство является строгим при любых $p \in [1, \infty)$ и $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Во многих приложениях теоремы 2.3 нужны ее усеченные версии, связанные с использованием лишь одного из граничных условий $g(0) := \lim_{t \to 0} g(t) = 0$ и $g(\infty) := \lim_{t \to \infty} g(t) = 0$. Эти усеченные версии формально являются некоторыми обобщениями теоремы 2.3 в случае $s > 1$ или $s < 1$, но фактически являются ее следствиями. Сформулируем два таких следствия.

Применяя неравенство (2.4) к функции, определенной равенствами $f(t) = g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $f(t) = g(t_0) = const$, $t_0 < t < \infty$, а также учитывая доводы Харди, использованные при доказательстве точности констант, получаем

Следствие 2.2. *Предположим, что* $t_0 \in (0,\infty)$, $p \in [1,\infty)$, $s \in (1,\infty)$, *функция* $f : [0,t_0] \to \mathbb{C}$ *является абсолютно непрерывной,* $f(0) = 0$ *и* $|f'|/t^{s/p-1} \in L^p(0,t_0)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\int_0^{t_0} \frac{|f'(t)|^p}{t^{s-p}}\,dt \ge \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_0^{t_0} \frac{|f(t)|^p}{t^s}\,dt. \tag{2.6}$$

Если $p > 1$ *и* $f \not\equiv 0$, *то неравенство является строгим, константа* $((s-1)/p)^p$ *является точной.*

Следующее утверждение доказывается так же, как и следствие 2.2. Отличие состоит в том, что мы применяем неравенство (2.4) к функции, определенной равенствами $f(t) = g(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$ и $f(t) = g(t_0) = const$, $0 < t < t_0$.

Следствие 2.3. *Предположим, что* $t_0 \in (0,\infty)$, $p \in [1,\infty)$, $s \in (-\infty,1)$, *функция* $f : [t_0,\infty] \to \mathbb{C}$ *является абсолютно непрерывной,* $f(\infty) = 0$ *и* $|f'|/t^{s/p-1} \in L^p(t_0,\infty)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{|f'(t)|^p}{t^{s-p}}\,dt \ge \left(\frac{|s-1|}{p}\right)^p \int_{t_0}^{\infty} \frac{|f(t)|^p}{t^s}\,dt. \tag{2.7}$$

Если $p > 1$ *и* $f \not\equiv 0$, *то неравенство является строгим, константа* $((s-1)/p)^p$ *является точной.*

Справедливо также

Следствие 2.4. *Предположим, что* $-\infty < a < b < \infty$. *Для любого* $p \in [1,\infty)$ *и любого* $s \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ *имеет место следующее неравенство*

$$\int_a^b \frac{(b-\tau)^{p+s-2}}{(\tau-a)^{s-p}}|f'(\tau)|^p\,d\tau \ge (b-a)^p\left(\frac{|s-1|}{p}\right)^p \int_a^b \frac{(b-\tau)^{s-2}}{(\tau-a)^s}|f(\tau)|^p\,d\tau \quad \forall f \in C_0^1(a,b) \tag{2.8}$$

с точной постоянной $(b-a)^p\,(|s-1|/p)^p$. *Для функции* $f \not\equiv 0$ *неравенство является строгим при любых* $p \in [1,\infty)$ *и* $s \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Неравенство (2.8) следует из неравенства (2.5) при заменах переменной $t = (\tau-a)/(b-\tau)$ и функции $g(t) \equiv f(\tau)$.

Имеет место

Следствие 2.5. *Предположим, что* $-\infty < a < b < \infty$, $\rho(\tau) := \min\{\tau-a, b-\tau\}$, *где* $\tau \in (a,b)$. *Для любого* $p \in [1,\infty)$ *и любого* $s \in (1,\infty)$ *справедливо неравенство*

$$\int_a^b \frac{|f'(\tau)|^p}{\rho^{s-p}(\tau)}\,d\tau \ge \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_a^b \frac{|f(\tau)|^p}{\rho^s(\tau)}\,d\tau \quad \forall f \in C_0^1(a,b) \tag{2.9}$$

с точной постоянной $((s-1)/p)^p$. *Для функции* $f \not\equiv 0$ *неравенство является строгим при любых* $p \in [1,\infty)$ *и* $s \in (1,\infty)$.

Доказательство. Применяя неравенство (2.6) при $t_0 = (b-a)/2$ и линейные замены переменных вида $\tau = t + a$ и $\tau = b - t$, получаем неравенства

$$\int_a^{(a+b)/2} \frac{|f'(\tau)|^p}{(\tau-a)^{s-p}}\,d\tau \ge \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_a^{(a+b)/2} \frac{|f(\tau)|^p}{(\tau-a)^s}\,d\tau \quad \forall f \in C_0^1(a,b),$$

$$\int_{(a+b)/2}^b \frac{|f'(\tau)|^p}{(b-\tau)^{s-p}}\,d\tau \ge \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_{(a+b)/2}^b \frac{|f(\tau)|^p}{(b-\tau)^s}\,d\tau \quad \forall f \in C_0^1(a,b).$$

Сумма этих неравенств дает требуемое неравенство (2.9). □

Заметим, что величина $\rho(\tau) = \min\{\tau-a, b-\tau\}$ равна расстоянию от точки $\tau \in (a,b)$ до границы интервала (a,b).

3. Неравенства для высших производных

Последовательно применяя k раз неравенство (2.5) с параметрами $p = 2$ и $s = 2(k-j)$ к функциям $g = f^{(j)}$ при $s = k-1, ..., 0$, получаем следующее утверждение, принадлежащее Харди при $k = 1$, Реллиху [3] при $k = 2$ и Бирману [4] при $k \geq 3$.

Теорема 3.1. *Пусть k — натуральное число. Имеет место следующее неравенство с точной константой:*

$$\int_0^\infty |f^{(k)}(t)|^2 dt \geq \left(\frac{(2k-1)!!}{2^k}\right)^2 \int_0^\infty \frac{|f(t)|^2}{t^{2k}} dt \quad \forall f \in C_0^k(0,\infty). \tag{3.1}$$

Если $f \not\equiv 0$, то неравенство является строгим.

Подробное доказательство неравенства (3.1) имеется в книге И.М. Глазмана [5]. Доказательство неравенства (3.1) можно найти также в нескольких статьях, в частности, в статье Оуэна [6], препринте 4-х авторов (F. Gesztesy и др. [7]). В этих работах даны и доказательства точности константы $\left((2k-1)!!/2^k\right)^2$ при любом $k \geq 1$.

В теореме Харди имеется одно особое значение параметра. А именно, для $s = \sigma = 1$ неравенство теряет смысл, так как соответствующая константа равна нулю. Обозначим $S_p^*(1) = \{1\}$. Для случая $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ нам потребуется множество $S_p^*(k) := \bigcup_{j=1}^k \{1 + (j-1)p\}$, состоящее из k особых точек.

Справедлив следующий прямой аналог неравенства Харди, совпадающий с теоремой 2.3 при $k = 1$ и включающий неравенство Реллиха и Бирмана (3.1) как частный случай.

Теорема 3.2. *Пусть $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in \mathbb{R} \setminus S_p^*(k)$, где $S_p^*(k) := \bigcup_{j=1}^k \{1 + (j-1)p\}$. Предположим, что $f \in C^{k-1}(0,\infty)$ — комплекснозначная функция, такая, что производная $f^{(k-1)}$ порядка $k-1$ является дифференцируемой почти всюду и $t^{k-\sigma/p}|f^{(k)}| \in L^p(0,\infty)$.*

Пусть $j \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \cap [0, k-1]$. Предположим, что $f^{(0)} := f$ и выполнены следующие условия:

1) если $\sigma > 1 + (k-1)p$, то $f^{(j)}(0) := \lim_{t\to 0} f^{(j)}(t) = 0$ для всех целых чисел $j \in [0, k-1]$ и имеет место равенство

$$f^{(k-1)}(t) = \int_0^t f^{(k)}(\tau) d\tau, \quad 0 \leqslant t < \infty;$$

2) если $\sigma < 1$, то $f^{(j)}(\infty) := \lim_{t\to\infty} f^{(j)}(t) = 0$ для всех целых чисел $j \in [0, k-1]$ и имеет место равенство

$$f^{(k-1)}(t) = \int_\infty^t f^{(k)}(\tau) d\tau, \quad 0 < t \leqslant \infty;$$

3) если $1 + (m-1)p < \sigma < 1 + mp$, где натуральное число $m \in [1, k-1]$, то $f^{(j)}(0) := \lim_{t\to 0} f^{(j)}(t) = 0$ для всех целых чисел $j \in [0, m-1]$, а также $f^{(j)}(\infty) := \lim_{t\to\infty} f^{(j)}(t) = 0$ для всех натуральных чисел $j \in [m, k-1]$ и имеет место равенство

$$f^{(k-1)}(t) = \int_\infty^t f^{(k)}(\tau) d\tau, \quad 0 < t \leqslant \infty.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \frac{\left|f^{(k)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-kp}} dt \geq C_p(k,\sigma) \int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^\sigma} dt, \tag{3.2}$$

где $C_p(k,\sigma) := \prod_{j=1}^k |(\sigma-1)/p - j + 1|^p$. Константа $C_p(k,\sigma)$ является наилучшей. Если $p > 1$ и $f \not\equiv 0$, то неравенство (3.2) является строгим.

Доказательство. Будем считать, что $k \geq 2$, так как при $k = 1$ теорема совпадает с теоремой Харди, точнее, ее вариантом в виде теоремы 2.3. Применяя теорему 2.3 при $s = \sigma - jp$ к функции $g = f^{(j)}$, получаем

$$\int_0^\infty \frac{\left|f^{(j+1)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-(j+1)p}} dt \geq \frac{|\sigma - pj - 1|^p}{p^p} \int_0^\infty \frac{\left|f^{(j)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-jp}} dt \quad (j = k-1, ..., 1, 0). \tag{3.3}$$

Подчеркнем, что в неравенстве Харди (3.3) в силу теоремы 2.3 требуется лишь одно граничное условие: функция $g = f^{(j)}$ должна обратиться в нуль либо в точке $t = 0$ (если $s = \sigma - jp > 1$), либо в точке $t = \infty$ (если $s = \sigma - jp < 1$). Эти требования выполняются в силу условий 1), 2), 3), указанных в формулировке теоремы 3.2. Кроме того, при обосновании неравенства Харди (3.3) необходимо проверить выполнение условия $t^{j-\sigma/p}|f^{(j)}| \in L^p(0,\infty)$ для любого натурального числа $j \in [1,k]$. Требование $t^{k-\sigma/p}|f^{(k)}| \in L^p(0,\infty)$ содержится в условиях теоремы 3.2. Поэтому имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \frac{\left|f^{(k)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-kp}}dt \geq \frac{|\sigma-(k-1)p-1|^p}{p^p}\int_0^\infty \frac{\left|f^{(k-1)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-(k-1)p}}dt.$$

Отсюда следует, что $t^{k-1-\sigma/p}|f^{(k-1)}| \in L^p(0,\infty)$. Но тогда имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \frac{\left|f^{(k-1)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-(k-1)p}}dt \geq \frac{|\sigma-(k-2)p-1|^p}{p^p}\int_0^\infty \frac{\left|f^{(k-2)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-(k-2)p}}dt,$$

и отсюда следует, что $t^{k-2-\sigma/p}|f^{(k-2)}| \in L^p(0,\infty)$.

Последовательно понижая порядок производной в этих рассуждениях, приходим к тому, что $t^{j-\sigma/p}|f^{(j)}| \in L^p(0,\infty)$ для любого натурального числа $j \in [1,k]$, что и требовалось показать.

Применяя последовательно неравенства (3.3) к случаям $j = k-1$, $j = k-2$, ..., $j = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{|f^{(k)}(t)|^p}{t^{\sigma-kp}}dt &\geq \frac{|\sigma-p(k-1)-1|^p}{p^p}\int_0^\infty \frac{|f^{(k-1)}(t)|^p}{t^{\sigma-(k-1)p}}dt \\ &\geq \frac{|\sigma-p(k-1)-1|^p}{p^p}\frac{|\sigma-p(k-2)-1|^p}{p^p}\int_0^\infty \frac{|f^{(k-2)}(t)|^p}{t^{\sigma-(k-2)p}}dt \geq \ldots \\ &\geq \left(p^{-k}\prod_{j=1}^k|\sigma-1-p(j-1)|\right)^p\int_0^\infty \frac{|f^{(0)}(t)|^p}{t^{\sigma}}dt.\end{aligned}$$

В результате получаем искомое неравенство (3.2).

Отметим, что при $p = 2$ и $\sigma = 2k$ в теореме 3.2 имеем константы Харди, Реллиха и Бирмана, так как

$$C_2(k,2k) = \left(2^{-k}\prod_{j=1}^k(2k+1-2j)\right)^2 = \left(\frac{(2k-1)!!}{2^k}\right)^2.$$

Очевидно, при $k \geq 2$ доказательство неравенства (3.2) не позволяет утверждать точность константы $C_p(k,\sigma)$. Поэтому нам остается доказать точность константы в общем случае при $k \geq 2$.

Предположим, что константа $C_p(k,\sigma)$ в теореме 3.2 не является наилучшей. Тогда для некоторого набора $\{p,k,\sigma\}$ фиксированных параметров $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}\setminus S_p^*(k)$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любой функции $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющей условиям теоремы 3.2, справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \frac{\left|f^{(k)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-kp}}dt \geq (\varepsilon_0 + C_p(k,\sigma))\int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^\sigma}dt. \tag{3.4}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$. Рассмотрим функцию $f_\varepsilon \in C(0,\infty) \cap C^\infty((0,\infty)\setminus\{1\})$, определенную равенствами

$$f_\varepsilon(t) = t^{(\sigma-1+\varepsilon)/p}\ (0 < t \leqslant 1); \quad f_\varepsilon(t) = t^{(\sigma-1-\varepsilon)/p}\ (1 < t < \infty).$$

Построим функцию $g_\varepsilon \in C^k(0,\infty)$, полагая

$$g_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t)\ \ (t \in (0,1/2)\cup(2,\infty)); \quad g_\varepsilon(t) = H(t)\ \ (t \in [1/2,2]),$$

где $H(t)$ — интерполяционный полином Эрмита для функции f_ε, построенный по двум узлам $t_0 = 1/2$ и $t_1 = 2$ кратности $k+1$, следовательно, выполнены $2k+2$ условия

$$H^{(j)}(t_\nu) = f_\varepsilon^{(j)}(t_\nu) \quad (j = 0,1,...,k;\ \nu = 0,1).$$

Известно (см., например, Н.Н. Калиткин [8, стр. 38]), что степень полинома $H(t)$ не превосходит $2k+1$ и

$$H(t) = \sum_{\nu=0}^{1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{q=0}^{k-j} c_{kjq} f_\varepsilon^{(j)}(t_\nu)\frac{(t-t_\nu)^{j+k}(t-t_{1-\nu})^{k+1}}{(t_\nu - t_{1-\nu})^{k+q+1}},$$

где $c_{kjq} = (-1)^q(k+q)!/(j!k!q!)$. Нетрудно видеть, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)}\max_{t\in[1/2,2]}|H(t)| = M_0 < \infty, \quad \sup_{\varepsilon\in(0,1)}\max_{t\in[1/2,2]}|H^{(k)}(t)| = M_k < \infty,$$

так как величина $\max_{j,\nu}\sup_{\varepsilon\in(0,1)}|f_\varepsilon^{(j)}(t_\nu)| < \infty$.

Непосредственными вычислениями получаем

$$\int_0^\infty \frac{|g_\varepsilon(t)|^p}{t^\sigma}dt = \frac{2}{2^\varepsilon\varepsilon} + \int_{1/2}^2 \frac{|H(t)|^p}{t^\sigma}dt, \tag{3.5}$$

$$\int_0^\infty \frac{|g_\varepsilon^{(k)}(t)|^p}{t^{\sigma-kp}}dt = \frac{C_p(k,\sigma-\varepsilon)+C_p(k,\sigma+\varepsilon)}{2^\varepsilon\varepsilon} + \int_{1/2}^2 \frac{\left|H^{(k)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-kp}}dt. \tag{3.6}$$

Отметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{1/2}^2 \frac{|H(t)|^p}{t^\sigma}dt = \lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{1/2}^2 \frac{|H^{(k)}(t)|^p}{t^{\sigma-kp}}dt = 0. \tag{3.7}$$

Функция $g_\varepsilon \in C^k(0,\infty)$ удовлетворяет граничным условиям, описанным в пунктах 1, 2 и 3 теоремы 3.2. Следовательно, для функции $f = g_\varepsilon$ согласно (3.4) имеем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\infty \frac{|g_\varepsilon^{(k)}(t)|^p}{t^{\sigma-kp}}dt \geq (\varepsilon_0 + C_p(k,\sigma))\,\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\infty \frac{|g_\varepsilon(t)|^p}{t^\sigma}dt, \tag{3.8}$$

полученное из неравенства (3.4) для функции $f = g_\varepsilon$ после умножения обеих частей неравенства на $\varepsilon/2$.

Переходя к пределу в неравенстве (3.8) при $\varepsilon \to 0$ и учитывая формулы (3.5), (3.6) и (3.7), приходим к соотношениям

$$C_p(k,\sigma) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{C_p(k,\sigma-\varepsilon)+C_p(k,\sigma+\varepsilon)}{2^{1+\varepsilon}} \geq \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon_0 + C_p(k,\sigma)}{2^\varepsilon} = \varepsilon_0 + C_p(k,\sigma),$$

что противоречит положительности числа ε_0.

Свойство $f \not\equiv 0$ с учетом граничных условий влечет аналогичные свойства $f' \not\equiv 0$, ..., $f^{(k-1)} \not\equiv 0$ для производных. Поэтому при $p > 1$ и $f \not\equiv 0$ неравенства (3.3), а значит, и неравенство (3.2) являются строгими.

Теорема доказана. □

Ниже в следствиях мы рассматриваем лишь случай $k \geq 2$. Аналогичные утверждения для случая $k = 1$ также верны и сформулированы во введении как следствия неравенств Харди.

Обобщением неравенств Реллиха и Бирмана является

Следствие 3.1. *Предположим, что $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $1 < p < \infty$, комплекснозначная функция $f \in C^{k-1}[0,\infty)$.*

Если $f^{(k-1)}$ дифференцируема почти всюду, $f^{(k)} \in L^p(0,\infty)$, $f^{(j)}(0) = 0$ для всех $j = 0,...,k-1$ и $f^{(k-1)}(t) = \int_0^t f^{(k)}(\tau)d\tau$, $0 \leqslant t < \infty$, то имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \left|f^{(k)}(t)\right|^p dt \geq \prod_{j=1}^k (j-1/p)^p \int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^{kp}}\,dt$$

с точной константой. В частности, справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \left|f^{(k)}(t)\right|^p dt \geq \prod_{j=1}^k (j-1/p)^p \int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^{kp}}\,dt \qquad \forall f \in C_0^k(0,\infty).$$

При $p = 1$ последнее неравенство не является содержательным, так как $\sigma = k \in S_1^*(k)$ и константа обратится в нуль.

Полагая $p = 1$ и $\sigma = 0$ или $\sigma = k+1$ в теореме 3.2, получаем

Следствие 3.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Тогда для любой комплекснозначной функции $f \in C_0^k(0,\infty)$ имеют место неравенства*

$$\int_0^\infty t^k \left|f^{(k)}(t)\right| dt \geq k! \int_0^\infty |f(t)|\, dt, \qquad \int_0^\infty \frac{\left|f^{(k)}(t)\right|}{t}\, dt \geq k! \int_0^\infty \frac{|f(t)|}{t^{k+1}}\, dt.$$

Константа $k!$ точна в обоих неравенствах.

Следствие 3.3. *Предположим, что $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $1 \leqslant p < \infty$, комплекснозначная функция $f \in C^{k-1}(0,\infty)$, $f^{(k-1)}$ дифференцируема почти всюду, $t^k f^{(k)} \in L^p(0,\infty)$.*

Если $f^{(j)}(\infty) := \lim_{t\to\infty} f^{(j)}(t) = 0$ для всех $j = 0, ..., k-1$, $f^{(k-1)}(t) = \int_\infty^t f^{(k)}(\tau) d\tau$, где $0 < t \leqslant \infty$, то имеет место неравенство

$$\int_0^\infty t^{kp} \left|f^{(k)}(t)\right|^p dt \geq \prod_{j=0}^{k-1} (j+1/p)^p \int_0^\infty |f(t)|^p\, dt.$$

Константа $\prod_{j=0}^{k-1}(j+1/p)^p$ точна.

Следующие две теоремы дают обобщения неравенств (2.6) и (2.7).

Теорема 3.3. *Предположим, что $k \in \mathbb{N}$, $0 < c < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$ и $1 + (k-1)p < \sigma < \infty$. Пусть $f \in C^{k-1}(0,c)$ — комплекснозначная функция, такая, что производная $f^{(k-1)}$ порядка $k-1$ является дифференцируемой почти всюду и $t^{k-\sigma/p}|f^{(k)}| \in L^p(0,c)$.*

Если $f^{(j)}(0) := \lim_{t\to 0} f^{(j)}(t) = 0$ для всех целых чисел $j \in [0, k-1]$ и имеет место равенство $f^{(k-1)}(t) = \int_0^t f^{(k)}(\tau) d\tau, \quad 0 \leqslant t < c$, то справедливо неравенство

$$\int_0^c \frac{\left|f^{(k)}(t)\right|^p}{t^{\sigma-kp}} dt \geq C_p(k,\sigma) \int_0^c \frac{|f(t)|^p}{t^\sigma} dt, \tag{3.9}$$

где $C_p(k,\sigma) := \prod_{j=1}^k |(\sigma-1)/p - j + 1|^p$. Константа $C_p(k,\sigma)$ является наилучшей.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0,c)$ и пусть $f \in C^{k-1}(0,c)$ — одна из функций, удовлетворяющая условиям теоремы. По условиям теоремы эта функция и ее производные до порядка $k-1$ продолжены по непрерывности в точку $t = 0$. Можно считать, что $f \in C^{k-1}[0,c)$, $f^{(j)}(0) = 0$ для всех целых чисел $j \in [0, k-1]$ и производная $f^{(k-1)}$ порядка $k-1$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[0, c-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon \in (0,c)$.

Применяя к функции $f^{(j)}$ неравенство (2.6) при $t_0 = c - \varepsilon$, $s = \sigma - jp$ и $j = k-1, k-2, ..., 0$, получаем

$$\int_0^{c-\varepsilon} \frac{|f^{(j+1)}(t)|^p}{t^{\sigma-(j+1)p}} dt \geq \frac{|\sigma - pj - 1|^p}{p^p} \int_0^{c-\varepsilon} \frac{|f^{(j)}(t)|^p}{t^{\sigma-jp}} dt.$$

Пользуясь итерациями этих неравенств, точнее, применяя это неравенство к случаю $j = k-1$, затем последовательно к случаям $j = k-2$, ..., $j = 0$, будем иметь

$$\int_0^{c-\varepsilon} \frac{|f^{(k)}(t)|^p}{t^{\sigma-kp}} dt \geq C_p(k,\sigma) \int_0^{c-\varepsilon} \frac{|f(t)|^p}{t^\sigma} dt.$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое неравенство (3.9).

Остается доказать точность константы. Предположим, что константа $C_p(k,\sigma)$ в теореме 3.3 не является наилучшей. Тогда для некоторого набора $\{p, k, \sigma\}$ фиксированных параметров $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (1 + (k-1)p, \infty)$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любой функции $f : (0,c) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющей условиям теоремы 3.3, справедливо неравенство

$$\int_0^c \frac{|f^{(k)}(t)|^p}{t^{\sigma-kp}} dt \geq (\varepsilon_0 + C_p(k,\sigma)) \int_0^c \frac{|f(t)|^p}{t^\sigma} dt.$$

Применим это неравенство к функции $f_\varepsilon(t) = t^{(\sigma-1+\varepsilon)/p}$ $(0 \leqslant t \leqslant c)$, удовлетворяющей условиям теоремы 3.3 при любом $\varepsilon \in (0,1)$. Получим

$$C_p(k,\sigma+\varepsilon)\frac{c^\varepsilon}{\varepsilon} \geq (\varepsilon_0 + C_p(k,\sigma))\,\frac{c^\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Умножая обе части на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, будем иметь: $C_p(k,\sigma) \geq \varepsilon_0 + C_p(k,\sigma)$. Полученное противоречие доказывает точность постоянной $C_p(k,\sigma)$ в теореме 3.3.

Теорема доказана. □

Теорема 3.4. *Предположим, что $k \in \mathbb{N}$, $0 < b < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$ и $-\infty < s < 1$. Пусть $f \in C^{k-1}(b,\infty)$ — комплекснозначная функция, такая, что производная $f^{(k-1)}$ порядка $k-1$ является дифференцируемой почти всюду и $t^{k-s/p}|f^{(k)}| \in L^p(b,\infty)$. Если $f^{(j)}(\infty) := \lim_{t\to\infty} f^{(j)}(t) = 0$ для всех целых чисел $j \in [0, k-1]$ и имеет место равенство $f^{(k-1)}(t) = \int_\infty^t f^{(k)}(\tau)d\tau$, где $b \leqslant t < \infty$, то справедливо неравенство*

$$\int_b^\infty \frac{\left|f^{(k)}(t)\right|^p}{t^{s-kp}}dt \geq C_p(k,s)\int_b^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^s}dt, \tag{3.10}$$

где $C_p(k,s) := \prod_{j=1}^k |(s-1)/p - j + 1|^p$. Константа $C_p(k,s)$ является наилучшей.

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство предыдущей теоремы. Отличия состоят в том, что при обосновании требуемого неравенства теоремы 3.4 пользуемся неравенством (2.7) для $t_0 = b + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, а при обосновании точности константы рассматриваем функцию $f_\varepsilon(t) = t^{(s-1-\varepsilon)/p}$ $(b < t < \infty)$, удовлетворяющую условиям теоремы 3.4 при любом $\varepsilon \in (0,1)$. Этим и завершается доказательство теоремы 3.4. □

Замечание 3.1. *При $k = 1$ утверждения теорем 3.3 и 3.4 для вещественнозначных функций f широко известны (см., например, монографию С.Л. Соболева* [1]*).*

Приведем следствие теоремы 3.3, обобщающее и усиливающее неравенство Реллиха-Бирмана при $k \geq 2$.

Следствие 3.4. *Предположим, что $k \in \mathbb{N}$, $0 < c < \infty$, $1 < p < \infty$. Пусть $f \in C^{k-1}(0,c)$ — комплекснозначная функция, такая, что $f^{(k-1)}$ является дифференцируемой почти всюду и $t^{k-\sigma/p}|f^{(k)}| \in L^p(0,c)$.*

Если $f^{(j)}(0) := \lim_{t\to 0} f^{(j)}(t) = 0$ для всех целых чисел $j \in [0, k-1]$ и $f^{(k-1)}(t) = \int_0^t f^{(k)}(\tau)d\tau$, $0 \leqslant t < c$, то справедливо неравенство

$$\int_0^c \left|f^{(k)}(t)\right|^p dt \geq \prod_{j=1}^k (j-1/p)^p \int_0^c \frac{|f(t)|^p}{t^{kp}}\,dt.$$

Константа $\prod_{j=1}^k (j-1/p)^p$ является наилучшей.

4. Усиления неравенств Реллиха и Бирмана в конечных интервалах

Согласно следствию (2.3), для любого $c \in (0,\infty)$ и любой абсолютно непрерывной функции $f : [0,c] \to \mathbb{R}$, такой, что $f(0) = 0$ и $f' \in L^2(0,c)$, справедливо неравенство

$$\int_0^c |f'(t)|^2 dt \geq \frac{1}{4}\int_0^c \frac{|f(t)|^2}{t^2}dt \tag{4.1}$$

с наилучшей константой 1/4. Х. Брезис и М. Маркус [9] воспользовались отсутствием экстремальной функции, реализующей равенство в (4.1), следующим образом. Они доказали, что при тех же условиях на функцию f неравенство (4.1) может быть усилено, а именно, имеет место следующее неравенство

$$\int_0^c |f'(t)|^2 dt \geq \frac{1}{4}\int_0^c \frac{|f(t)|^2}{t^2}dt + \frac{\lambda}{c^2}\int_0^c |f(t)|^2 dt, \tag{4.2}$$

где $\lambda = 1/4$. Автор и К.-Й. Вирц [10] нашли наилучшее значение для постоянной λ в неравенстве Брезиса и Маркуса (4.2). Оказалось, что наилучшее значение для постоянной λ равно λ_0^2, где $z = \lambda_0 \approx 0.940$ — первый положительный корень уравнения $J_0(z) + 2zJ_0'(z) = 0$ для функции Бесселя порядка нуль.

Согласно следствию (2.3), для любого $c \in (0, \infty)$, любого $s \in (1, \infty)$ и любой абсолютно непрерывной функции $f : [0, c] \to \mathbb{R}$, такой, что $f(0) = 0$ и $f'/t^{s/2-1} \in L^2(0, a)$, справедливо неравенство

$$\int_0^c \frac{|f'(t)|^2}{t^{s-2}} dt \geq \frac{(s-1)^2}{4} \int_0^c \frac{|f(t)|^2}{t^s} dt \tag{4.3}$$

с наилучшей константой $(s-1)^2/4$. Возникает естественная задача: доказать, что при тех же условиях на функцию f неравенство (4.3) может быть усилено, а именно, имеет место следующее неравенство

$$\int_0^c \frac{|f'(t)|^2}{t^{s-2}} dt \geq \frac{(s-1)^2}{4} \int_0^c \frac{|f(t)|^2}{t^s} dt + \frac{\lambda}{c^s} \int_0^c |f(t)|^2 dt \tag{4.4}$$

с некоторой положительной постоянной $\lambda > 0$. Эта задача была решена автором и К.-Й. Вирцом в статье [11]. Для точной формулировки соответствующего результата, включающего неравенство (4.4) как частный случай, нам нужны некоторые обозначения.

Пусть (p, q) — пара положительных чисел. Нам потребуется функция

$$y = F_{\nu,p,q}(t) = t^{p/2} J_\nu \left(\lambda_\nu(2p/q)\, t^{q/2} \right), \quad t \in [0, 1],$$

где

$$J_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, t^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(m+1+\nu)}$$

— функция Бесселя порядка $\nu \geq 0$, Γ — гамма функция Эйлера, $\lambda_\nu(2p/q)$ — постоянная Лямба, определенная как первый положительный корень уравнения $(2p/q)J_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0$ при фиксированных $\nu \geq 0$ и $x = 2p/q > 0$.

Нули функции $xJ_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z)$ при фиксированных $\nu > 0$, $x > 0$ были изучены Лямбом (см. H. Lamb [12], а также [13]), а при $\nu = 0$ исследованы в статьях автора и К.-Й. Вирца [10] и [11]. В частности, найдено, что $\lambda_0(1) = \lambda_0 \approx 0.940$.

Через $z = \lambda_\nu(x)$ обозначим первый положительный корень уравнения $xJ_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0$ при фиксированных $x > 0$ и $\nu \in [0, x/2]$. В статьях [10] и [11] доказано, что функция

$$z = \lambda_\nu : (0, \infty) \to (0, \infty)$$

является монотонно возрастающей, значение $z = \lambda_\nu(x)$ для любого $x \in (0, 1]$ или $x \in [1, \infty)$ может быть найдено как решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x^2 - 4\nu^2 + 4z^2}$$

с начальным условием $z(1) = \lambda_\nu(1)$.

При решении задач, связанных с неравенствами типа Харди в выпуклых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, в статье автора и К.-Й. Вирца [11] доказано следующее утверждение (см. в [11] леммы 1 и 2 и теорему 2 при $p = s - 1$).

Теорема 4.1. *Пусть $s \in (1, \infty)$, $q \in (0, \infty)$ и $\nu \in [0, (s-1)/q]$. Пусть*

$$z = \lambda_{\nu,s,q} := \lambda_\nu(2(s-1)/q)$$

— постоянная Лямба, определенная как первый положительный корень уравнения $(2(s-1)/q)J_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0$ при фиксированных $\nu \geq 0$ и $x = 2(s-1)/q$. Если $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция, такая, что $f(0) = 0$ и $f'/t^{s/2-1} \in L^2(0, 1)$, то

$$\int_0^1 \frac{|f'(t)|^2}{t^{s-2}} dt \geq \frac{(s-1)^2 - \nu^2 q^2}{4} \int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{t^s} dt + \frac{q^2 \lambda_{\nu,s,q}^2}{4} \int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{t^{s-q}} dt. \tag{4.5}$$

Если $\nu > 0$, то равенство в (4.5) имеет место тогда и только тогда, когда $f(t) = C\, F_{\nu,s-1,q}(t)$, где $C = const$. Если $\nu = 0$ и $f \not\equiv 0$, то имеет место строгое неравенство

$$\int_0^1 \frac{|f'(t)|^2}{t^{s-2}}dt > \frac{(s-1)^2}{4}\int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{t^s}dt + \frac{q^2\lambda_{0,s,q}^2}{4}\int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{t^{s-q}}dt, \tag{4.6}$$

где обе постоянные $(s-1)^2/4$ и $q^2\lambda_{0,s,q}^2/4$ в неравенстве (4.6) являются точными, т.е. наилучшими, в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $f_{1\varepsilon}$, $f_{2\varepsilon}$ удовлетворяющие условиям теоремы и неравенствам

$$\int_0^1 \frac{|f_{1\varepsilon}'(t)|^2}{t^{s-2}}dt < \frac{(s-1)^2+\varepsilon}{4}\int_0^1 \frac{|f_{1\varepsilon}(t)|^2}{t^s}dt,$$

$$\int_0^1 \frac{|f_{2\varepsilon}'(t)|^2}{t^{s-2}}dt < \frac{(s-1)^2}{4}\int_0^1 \frac{|f_{2\varepsilon}(t)|^2}{t^s}dt + \frac{q^2\lambda_{0,s,q}^2+\varepsilon}{4}\int_0^1 \frac{|f_{2\varepsilon}(t)|^2}{t^{s-q}}dt.$$

Неравенство (4.5) будет справедливо и для комплекснозначных функций. А именно, имеет место

Следствие 4.1. *Предположим, что числа s, q, ν и $\lambda_{\nu,s,q}$ такие же, что и в формулировке теоремы 3.1. Если $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ — абсолютно непрерывная функция, такая, что $g(0) = 0$ и $|g'|/t^{s/2-1} \in L^2(0,1)$, то*

$$\int_0^1 \frac{|g'(t)|^2}{t^{s-2}}dt \geq \frac{(s-1)^2-\nu^2q^2}{4}\int_0^1 \frac{|g(t)|^2}{t^s}dt + \frac{q^2\lambda_{\nu,s,q}^2}{4}\int_0^1 \frac{|g(t)|^2}{t^{s-q}}dt. \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть $g(t) = f_1(t) + if_2(t)$. Нетрудно видеть, что функции $f_1(t) = Re\, g(t)$ и $f_2(t) = Im\, g(t)$ удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому мы можем записать неравенство (4.5) для функции $f = f_1$ и для функции $f = f_2$. Суммируя полученные неравенства и учитывая тождества

$$|g(t)|^2 = f_1^2(t) + f_2^2(t), \quad |g'(t)|^2 = (f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2,$$

приходим к неравенству (4.7). □

Непосредственными вычислениями с использованием замен $s = 2-\sigma$, $t = 1/\tau$, $g(1/\tau) = f(\tau)$ в интегралах неравенства (4.7), получаем

Следствие 4.2. *Пусть $\sigma \in (-\infty, 1)$, $q \in (0,\infty)$ и $\nu \in [0,(1-\sigma)/q]$. Пусть*

$$z = \lambda_{\nu,\sigma,q} := \lambda_\nu(2(1-\sigma)/q)$$

— постоянная Лямба, определенная как первый положительный корень уравнения $(2(1-\sigma)/q)J_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0$ при фиксированных $\nu \geq 0$ и $x = 2(1-\sigma)/q$. Если $f : [1,\infty] \to \mathbb{C}$ — абсолютно непрерывная функция, такая, что $f(\infty) = 0$ и $f'/\tau^{\sigma/2-1} \in L^2(1,\infty)$, то

$$\int_1^\infty \frac{|f'(\tau)|^2}{\tau^{\sigma-2}}d\tau \geq \frac{(1-\sigma)^2-\nu^2q^2}{4}\int_1^\infty \frac{|f(\tau)|^2}{\tau^\sigma}d\tau + \frac{q^2\lambda_{\nu,\sigma,q}^2}{4}\int_1^\infty \frac{|f(\tau)|^2}{\tau^{\sigma+q}}d\tau.$$

В частности, полагая $\tau = \nu = 0$ и $q = 2$, получаем неравенство

$$\int_1^\infty \tau^2|f'(\tau)|^2d\tau \geq \frac{1}{4}\int_1^\infty |f(\tau)|^2d\tau + \lambda_0^2\int_1^\infty \frac{|f(\tau)|^2}{\tau^2}d\tau,$$

где обе константы $1/4$ и $\lambda_0 = \lambda_0(1) \approx 0.940$ являются наилучшими.

Полагая $\nu = 0$ и $q = s$, пользуясь заменами $t = \tau/c$, $g(t) = f(\tau/c)$ в интегралах неравенства (4.7) и непосредственными вычислениями, получаем неравенство вида (4.4) с точными константами.

Следствие 4.3. *Пусть $c \in (0,\infty)$, $s \in (1,\infty)$, $z = \lambda_0(2-2/s)$ — постоянная Лямба, определенная как первый положительный корень уравнения $(2-2/s)J_0(z) + 2zJ_0'(z) = 0$ при фиксированном $s > 1$. Если $f : [0,c] \to \mathbb{C}$ — абсолютно непрерывная функция, такая, что $|f'|/t^{s/2-1} \in L^2(0,c)$ и $f(0) = 0$, то*

$$\int_0^c \frac{|f'(t)|^2}{t^{s-2}}dt \geq \frac{(s-1)^2}{4}\int_0^c \frac{|f(t)|^2}{t^s}d\tau + \frac{s^2\ (\lambda_0(2-2/s))^2}{4c^s}\int_0^c |f(t)|^2dt. \tag{4.8}$$

Следующая теорема дает усиление и обобщение неравенств Харди–Реллиха–Бирмана для случая конечных интервалов.

Теорема 4.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $c \in (0,\infty)$. Пусть $f \in C^{k-1}[0,c]$ — комплекснозначная функция, такая, что производная $f^{(k-1)}$ порядка $k-1$ является дифференцируемой почти всюду и $|f^{(k)}| \in L^2(0,c)$.*

Если $f^{(j)}(0) := \lim_{t\to 0} f^{(j)}(t) = 0$ для всех целых чисел $j \in [0,k-1]$ и имеет место равенство

$$f^{(k-1)}(t) = \int_0^t f^{(k)}(\tau)d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant c,$$

то

$$\int_0^c \left|f^{(k)}(t)\right|^2 dt \geq \left(\frac{(2k-1)!!}{2^k}\right)^2 \int_0^c \frac{|f(t)|^2}{t^{2k}}dt + \lambda_0^2 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6\,c^{2k}} \int_0^c |f(t)|^2 dt, \tag{4.9}$$

где $\lambda_0 \approx 0.940$ — постоянная Лямба.

Доказательство. Если $s = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, то $2 - 2/s \geq 1$. Следовательно,

$$\lambda_0(2-2/s) \geq \lambda_0(1) = \lambda_0 \approx 0.940$$

в силу того, что функция $\lambda_\nu(x)$ является монотонно возрастающей.

Пусть f_0 — одна из функций, удовлетворяющая условиям теоремы. При доказательстве неравенства (3.10) для функции f_0 пользуемся схемой доказательства основного неравенства в теореме 3.2.

Выбирая $s = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, и применяя к производной $f_0^{(k-m)}$ функции f_0 неравенство (4.8) последовательно при $m = 1, ..., k$ с учетом неравенств $\lambda_0(2-1/m) \geq \lambda_0$ будем иметь

$$\int_0^c \frac{|f_0^{(k-m+1)}(t)|^2}{t^{2m-2}}dt \geq \frac{(2m-1)^2}{4} \int_0^c \frac{|f_0^{(k-m)}(t)|^2}{t^{2m}}dt + \frac{m^2\lambda_0^2}{c^{2m}} \int_0^c |f_0(t)|^2 dt.$$

Пользуясь итерациями этих неравенств, точнее, применяя это неравенство к случаю $m = 1$, затем последовательно к случаям $m = 2$, ..., $m = k$, получаем

$$\int_0^c \left|f_0^{(k)}(t)\right|^2 dt \geq \left(\frac{(2k-1)!!}{2^k}\right)^2 \int_0^c \frac{|f_0(t)|^2}{t^{2k}}dt + \lambda_0^2 \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{c^{2j}} \int_0^c |f_0(t)|^2 dt.$$

Применяя это неравенство к функции g, удовлетворяющей условиям теоремы при $c = 1$ и учитывая известное равенство $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$, будем иметь

$$\int_0^1 \left|g^{(k)}(\tau)\right|^2 d\tau \geq \left(\frac{(2k-1)!!}{2^k}\right)^2 \int_0^1 \frac{|g(\tau)|^2}{\tau^{2k}}d\tau + \lambda_0^2 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \int_0^1 |g(\tau)|^2 d\tau.$$

Заменой переменной $\tau = t/c$ и функции $g(\tau) = f(t)$, отсюда получаем неравенство (3.10). Этим и завершается доказательство теоремы 4.2. □

Замечание 4.1. *Константа $((2k-1)!!/2^k)^2$ в неравенстве (3.10) является наилучшей и в том случае, когда второе слагаемое отсутствует. А именно, как следствие теоремы 3.3 имеем следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ существует функция f_ε, удовлетворяющая условиям теоремы 4.2 и неравенству*

$$\int_0^c \left|f_\varepsilon^{(k)}(t)\right|^2 dt < \left(\frac{(2k-1)!!}{2^k} + \varepsilon\right)^2 \int_0^c \frac{|f_\varepsilon(t)|^2}{t^{2k}}dt.$$

Константа $\lambda_0^2\, k(k+1)(2k+1)/(6\,c^{2k})$ перед вторым интегралом в правой части неравенства (3.10) является наилучшей лишь при $k = 1$.

5. Многомерные аналоги

Опишем кратко связь между одномерными интегральными неравенствами и их многомерными аналогами.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Пусть величина $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ обозначает евклидову норму вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ — дифференциальный элемент объема (площади при $n = 2$). Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и функции $u : \Omega \to \mathbb{C}$. Для $u \in C^1(\Omega)$ норма $|\nabla u(x)|$ евклидова градиента

$$\nabla u(x) := \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{C}^n, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

определяется равенством

$$|\nabla u(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(Re\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)^2 + \left(Im\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)^2}.$$

В произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, прямым аналогом неравенства Харди является следующее неравенство

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{\operatorname{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq C_p(s, \Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\operatorname{dist}^s(x, \partial\Omega)} dx \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{5.1}$$

где постоянная $C_p(s, \Omega) \in [0, \infty)$ предполагается наибольшей из возможных.

В многомерном случае по-прежнему важна роль параметров $p \in [1, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$, но главными становятся следующие проблемы: *1) как геометрически описать «хорошие» области, т.е. те области, для которых $C_p(s, \Omega) > 0$; 2) получить нижние и верхние оценки $C_p(s, \Omega) > 0$ в зависимости от геометрических характеристик области и от параметров p, s.*

Ряд результатов по исследованию неравенства (5.1) можно найти в недавно изданных монографиях [14]–[16]. Опишем кратко лишь несколько результатов, относящихся к особым случаям неравенства (5.1).

Можно указать несколько областей, в которых неравенство вида (5.1) эквивалентно неравенству (2.5), т.е. неравенству

$$\int_0^\infty \frac{|g'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq \left(\frac{|s-1|}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|g(t)|^p}{t^s} dt \quad \forall g \in C_0^1(0, \infty).$$

Отметим, что следующие теоремы 5.1 и 5.2 можно отнести к фольклору теории многомерных неравенств Харди.

Теорема 5.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $\sigma \in \mathbb{R}$ имеет место следующее неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(x)|^p}{|x|^{\sigma-p}} dx \geq \left(\frac{|\sigma - n|}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^\sigma} dx \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \tag{5.2}$$

с точной константой $(|\sigma - n|/p)^p$.

Приведем краткое доказательство эквивалентности неравенств (2.5) и (5.2) при фиксированном $n \geq 2$. Возьмем $s = \sigma - n + 1$, воспользуемся сферическими координатами

$$x = r\omega \in \mathbb{R}^n \quad (r = |x| > 0, \, \omega \in S := \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}),$$

формулой $dx = r^{n-1} dr d\omega$ и неравенством $|\nabla u(x)| \geq |\partial u(x)/\partial r|$.

Применяя неравенство (2.5) к функции $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ при фиксированном $\omega \in S$, получаем неравенство

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial u(r\omega)}{\partial r}\right|^p \frac{dr}{r^{s-p}} \geq \left(\frac{|s-1|}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|u(r\omega)|^p}{r^s} dr,$$

эквивалентное неравенству

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial u(r\omega)}{\partial r}\right|^p \frac{r^{n-1} dr}{|x|^{\sigma-p}} \geq \left(\frac{|\sigma - n|}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|u(r\omega)|^p}{|x|^\sigma} r^{n-1} dr,$$

где $|x| = r$ и $\sigma = s + n - 1$. Умножая обе части последнего неравенства на $d\omega$ и интегрируя по сфере S, приходим к неравенству

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial u(r\omega)}{\partial r}\right|^p \frac{dx}{|x|^{\sigma-p}} \geq \left(\frac{|\sigma - n|}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(r\omega)|^p}{|x|^\sigma} dx,$$

что влечет (5.2). Обратно, применяя (5.2) к радиальным функциям, определенным равенством $u(x) \equiv u(|x|) =: g(|x|)$, получаем неравенство (2.5) с $s = \sigma - n + 1$ и $t = r = |x|$.

Если $\sigma = s + n - 1 < n$, то $s < 1$. Неравенство (5.2) будет справедливо при выполнении граничного свойства $u(\infty) = 0$, что будет следовать из условия $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. В частности, полагая $p = \sigma$, получаем

Следствие 5.1. *Для любого $p \in [1, n)$ имеет место следующее неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \tag{5.3}$$

с точной константой $((n-p)/p)^p$.

Неравенство (5.3) принято называть неравенством Лерэ (J. Leray). Оно было доказано Лерэ в 1933 году для случая $p = 2$, $n = 3$ в работе [17], посвященной исследованию уравнений Навье-Стокса. Таким образом, Лерэ впервые рассмотрел неравенство типа Харди в пространственной области.

Нетрудно также показать, что неравенство (2.5) эквивалентно соответствующему неравенству в полупространстве $\mathbb{H}_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$.

Теорема 5.2. *Для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $s \in \mathbb{R}$ имеет место следующее неравенство*

$$\int_{\mathbb{H}_n^+} \frac{|\nabla u(x)|^p}{x_1^{s-p}} dx \geq \left(\frac{|s-1|}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}_n^+} \frac{|u(x)|^p}{x_1^s} dx \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{H}_n^+) \tag{5.4}$$

с точной константой $(|s-1|/p)^p$.

Опишем несколько нетривиальных результатов о неравенстве (5.1) в областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, отличных от областей $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\mathbb{H}_n^+$. Точнее, рассмотрим неравенство (5.1) в областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, когда отсутствуют простые формулы для нахождения расстояния $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $x \in \Omega$.

Отметим прежде всего, что *описанные ниже теоремы 5.3 — 5.7 в оригинальных работах сформулированы и доказаны для вещественнозначных функций. Но теоремы 5.3 — 5.7 являются справедливыми и для комплекснозначных функций, так как их доказательства основаны на применениях неравенств вида (2.4), которые верны и для комплекснозначных функций.*

Для случая $s > 1$ наиболее полные результаты о неравенстве (5.1) получены для выпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Усилиями ряда математиков, а именно, Е.Б. Дэвиса, Т. Матскевича и Р.Е. Слободецкого, Х. Брезиса, М. Маркуса и В.Й. Митцеля, автора и И.К. Шафигуллина (см. статью [18] и библиографию в ней) доказано следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть $n \geq 2$. Для любого $p \in [1, \infty)$, любого $s \in (1, \infty)$ и любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{\operatorname{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\operatorname{dist}^s(x, \partial\Omega)} dx \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где константа является наилучшей, т.е. $C_p(s, \Omega) = ((s-1)/p)^p$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ при любых $p \in [1, \infty)$ и $s \in (1, \infty)$.

Теорема 5.3 интересна и удивительна тем, что различные выпуклые области имеют одну и ту же константу Харди, равную $((s-1)/p)^p$.

В статье [19] нами доказана

Теорема 5.4. *Пусть $n \geq 2$. Для любого $p \in [1, \infty)$, любого $s > n$ и любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{\operatorname{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq \left(\frac{s-n}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\operatorname{dist}^s(x, \partial\Omega)} dx \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где константа является оптимальной в том смысле, что существуют области, для которых константа $((s-n)/p)^p$ является точной.

Обратим внимание на то, что в этой теореме отсутствуют дополнительные геометрические требования на границу области. Такая ситуация в теоремах вложения подобного типа встречается крайне редко.

При $s \in (-\infty, 1)$ «хорошими» областями оказываются внешности выпуклых компактов. А именно, справедлива следующая теорема, доказанная автором и Р.В. Макаровым в статье [20].

Теорема 5.5. *Предположим, что $n \geq 2$, $1 \leqslant p < \infty$, $-\infty < s < n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ область, такая, что $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ — непустой выпуклый компакт. Тогда*

$$c_p(s, \Omega) \geq c_{psn} := \frac{\min_{j=1,2,\ldots,n} |s-j|^p}{p^p},$$

т.е. для любой комплекснозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{\operatorname{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq c_{psn} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\operatorname{dist}^s(x, \partial\Omega)} dx,$$

где константа является оптимальной в том смысле, что существуют области, которые удовлетворяют условиям теоремы и для них константа c_{psn} является точной.

Многомерные аналоги неравенств Реллиха – Бирмана связаны с полигармоническими операторами порядка $k \geq 2$.

Пусть Δ — оператор Лапласа. Для гладких функций $u \in C^k(\Omega)$ рассмотрим полигармонический оператор, определенный равенствами (см. [21])

$$\Delta^{k/2} u(x) := \begin{cases} \Delta^j u(x), & \text{если } k = 2j \text{ — четное число,} \\ \nabla \Delta^j u(x), & \text{если } k = 2j+1 \text{ — нечетное число,} \end{cases}$$

с формальным соглашением $\Delta^{1/2} u := \nabla u$. Очевидно, в одномерном случае $\Delta^{k/2} f(t) = f^{(k)}(t)$ для функции $f \in C^k(a, b)$ от переменной $t \in (a, b)$.

Справедлива

Теорема 5.6. *Пусть $n \geq 2$, $k \geq 2$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\int_\Omega |\Delta^{k/2} u(x)|^2 dx \geq \frac{((2k-1)!!)^2}{4^k} \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\operatorname{dist}^{2k}(x, \partial\Omega)} dx \quad \forall u \in C_0^k(\Omega).$$

При любых $n \geq 2$, $k \geq 2$ константа точна для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Указанное в теореме 5.6 неравенство доказал М.П. Оуэн в статье [6], где указано, что константа $A_k(\Omega) := ((2k-1)!!)^2/4^k$ является оптимальной, так как она точна для случая полупространства $x_1 > 0$. Точность константы для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, доказана нами в статьях [22] и [23].

Имеются также несколько обобщений этой теоремы на случай невыпуклых областей. Например, в статье [24] нами доказана

Теорема 5.7. *Пусть $k \geq 2$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\Omega \neq \mathbb{R}^2$. Предположим, что постоянная $A_k(\Omega) \in [0, \infty)$ — точная, т.е. максимальная из возможных константа в неравенстве*

$$\int_\Omega |\Delta^{k/2} u(x)|^2 dx \geq A_k(\Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\operatorname{dist}^{2k}(x, \partial\Omega)} dx \quad \forall u \in C_0^k(\Omega).$$

Тогда

$$A_k(\Omega) \geq ((k-1)!)^2 A_1(\Omega),$$

и справедливо следующее утверждение: при любом $k \geq 2$ константа $A_k(\Omega) > 0$ тогда и только тогда, когда область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ имеет равномерно совершенную границу.

Отметим, что в доказательствах теорем 5.6 и 5.7 существенную роль играют теоремы 5.3 и 5.4 и следующее обобщенное тождество О.А. Ладыженской (см. [25, гл. 2, формула (6.26)] для $m = 2$ и [21, гл. 2, формула (2.12)] для общего случая): для любой функции $u \in C_0^m(\Omega)$

$$\int_\Omega \left|\Delta^{m/2} u(x)\right|^2 dx = \int_\Omega \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_m=1}^n \left(\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_m}}\right)^2 dx.$$

Приведем несколько следствий теоремы 5.7. Граница круга с выколотым центром не является совершенным множеством. Поэтому справедливо

Следствие 5.2. *Если $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ — круг $|x| < 3$ с выколотым центром, то $A_k(\Omega_1) = 0$.*

Выбрасывая из круга достаточно «густое» замкнутое множество точек, можно построить область с равномерно совершенной границей. В частности, имеет место

Следствие 5.3. *Если $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ — круг $|x| < 3$, из которого удалено классическое канторово множество, лежащее на отрезке $[0, 1]$, то константа $A_k(\Omega_2) > 0$.*

Можно указать явные оценки снизу для величины $A_k(\Omega_2)$, а также для константы $A_k(\Omega)$ с использованием модульных характеристик области Ω. Простейший частный случай представлен в следующем утверждении.

Следствие 5.4. *Если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, $\Omega \neq \mathbb{R}^2$, то $A_k(\Omega) \geq ((k-1)!/4)^2$.*

В заключение отметим, что в недавних статьях [26] и [27] сформулирован ряд нерешенных проблем по многомерным неравенствам типа Харди и Реллиха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Л. Соболев. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций.* М.: Наука. 1989.
2. Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа. *Неравенства.* (С дополнениями В.И. Левина и С.Б. Стечкина.) М.: ИЛ. 1948.
3. F. Rellich. *Perturbation theory of eigenvalue problems.* New York-London-Paris: Gordon and Breach. 1969.
4. М.Ш. Бирман. *О спектре сингулярных граничных задач* // Матем. сб. **55(97)**:2, 125–174 (1961).
5. И.М. Глазман. *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.* М.: Физматлит. 1963.
6. M.P. Owen. *The Hardy-Rellich inequality for polyharmonic operators* // Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A: Math. **129**:4, 825–839 (1999).
7. F. Gesztesy, L.L. Littlejohn, I. Michael, R. Wellman. *On Birman's sequence of Hardy-Rellich type inequalities* // J. Differ. Equ. **264**:4, 2761–2801 (2018).
8. Н.Н. Калиткин. *Численные методы.* М.: Наука. 1978.
9. H. Brezis, M. Marcus. *Hardy's inequalities revisited* // Dedicated to Ennio De Giorgi, Ann. Scuola Sup. Pisa Cl. Sci. (4). **25**, 217–237 (1997).
10. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM). **87**:8-9, 632–642 (2007).
11. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **18**, 723–736 (2011).

12. H. Lamb. *Note on the Induction of Electric Currents in a Cylinder placed under across the lines of Magnetic Force* // Proc. London Math. Soc. **15**, 270–274 (1884).
13. G.N. Watson. *Theory of the Bessel functions.* Second edition. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1962.
14. A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* Universitext. Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer. 2015.
15. M. Ruzhansky, D. Suragan. *Hardy Inequalities on Homogeneous Groups.* Progress in Mathematics, 327. Birkhauser. 2019.
16. Ф.Г. Авхадиев. *Конформно инвариантные неравенства.* К.: Изд-во Казанского университета. 2020.
17. J. Leray. *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique* // J. Math. Pures Appl. **12**, 1–82 (1933).
18. Ф.Г. Авхадиев, И.К. Шафигуллин. *Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами* // Изв. вузов. Матем. 2. 69–73 (2014).
19. F.G. Avkhadiev. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. **21**, 3–31 (2006).
20. F.G. Avkhadiev, R.V. Makarov. *Hardy Type Inequalities on Domains with Convex Complement and Uncertainty Principle of Heisenberg* // Lobachevskii J. Math. **40**:9, 1250–1259 (2019).
21. F. Gazzola, H.Ch. Grunau, G. Sweers. *Polyharmonic boundary value problems.* Lect. Notes Math. **1991**. Berlin-Heidelberg: Springer. 2010.
22. F.G. Avkhadiev. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space* // J. Math. Anal. Appl. **442**, 469–484 (2016).
23. Ф.Г. Авхадиев. *Обобщенная проблема Дэвиса для полигармонических операторов* // Сиб. матем. журнал. **58**:6, 1205–1217 (2017).
24. Ф.Г. Авхадиев. *Неравенства Реллиха для полигармонических операторов в областях на плоскости* // Матем. сборник. **209**:3, 4–33 (2018).
25. O.A. Ladyzhenskaya. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics.* New York: Springer. 1985.
26. F. Avkhadiev. *Selected results and open problems on Hardy-Rellich and Poincaré-Friedrichs inequalities* // Anal. Math. Phys. **11**:134, 1–20 (2021).
27. Ф.Г. Авхадиев, И.Р. Каюмов, С.Р. Насыров. *Экстремальные проблемы в геометрической теории функций* // УМН. **78**:2(470), 3–70, (2023).

Фарит Габидинович Авхадиев,
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская 18,
420008 г. Казань, Россия
E-mail: `avkhadiev47@mail.ru`