ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 4 (2023). С. 20-29.

УДК 517.958

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.О. БАГАПШ

Аннотация. Рассмотрена классическая постановка задачи Дирихле для сильно эллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в жордановых областях на плоскости. Показано, что решение задачи представляется в виде функционального ряда по степеням параметра, определяющего отклонение оператора системы от лапласиана. Этот ряд сходится равномерно в замыкании области в предположении, что граница области и заданная на ней граничная функция удовлетворяют достаточным условиям регулярности: композиция следа конформного отображения области на круг и граничной функции принадлежит классу Гельдера с показателем больше, чем 1/2.

Ключевые слова: сильно эллиптическая система, задача Дирихле, метод возмущений.

Mathematics Subject Classification: 30E25, 35J25

1. Введение

В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

относительно вещественнозначных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ вещественных переменных x и y с постоянными вещественными матрицами коэффициентов A, B, C размера 2×2. Изучаются системы такого вида, относящиеся к эллиптическому типу. Согласно определению Петровского [1], это означает, что

$$\det(A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2)\neq 0 \quad \text{при} \quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0).$$

Введем комплекснозначную функцию $f=u+iv$ комплексного переменного $z=x+iy$ и оператор системы (1.1)

$$Lf=\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.$$

Классическая постановка задачи Дирихле для такого оператора в жордановой области формулируется следующим образом.

Задача 1.1. *Пусть $\varOmega$ — жорданова область с границей $\varGamma$. Для заданной граничной функции $h\in C(\varGamma)$ найти такую функцию $f\in C(\overline{\varOmega})\cap C^2(\varOmega)$, что $Lf=0$ в $\varOmega$ и $f|_{\varGamma}=h$.*

A.O. Bagapsh, Perturbation method for strongly elliptic second order systems with constant coefficients.

© Багапш А.О. 2023.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 22-11-00071.

Поступила 22 мая 2023 г.

Изучение вопроса о разрешимости задачи Дирихле привело к выделению подкласса сильно эллиптических систем, которые были определены несколькими способами; мы будем пользоваться определением из [2], согласно которому требуется

$$\det(A\alpha + 2\beta B + \gamma C) \neq 0 \quad \text{при} \quad \beta^2 - \alpha\gamma < 0.$$

Оно эквивалентно хорошо известному определению Вишика [3].

Вид системы (1.1), ее принадлежность к классу эллиптических или сильно эллиптических систем сохраняются при трех классах невырожденных преобразований: 1) линейной замены переменных (x, y); 2) линейной замены искомых функций (u, v); 3) линейной комбинации уравнений системы. При этом специально подобранная серия таких преобразований с последующим сложением первого из полученных уравнений со вторым, умноженным на мнимую единицу i, позволяет привести любую эллиптическую систему (1.1) к комплексному уравнению

$$(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)g(z) + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{g(z)} = 0 \tag{1.2}$$

относительно комплекснозначной функции g комплексного переменного $z = x + iy$ со всего двумя параметрами $\tau \in [0, 1)$ и $\sigma \in [0, 1) \cup (1, \infty]$ (см. [4], [5]). Здесь

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

— операторы Коши–Римана в новой системе координат. При $\sigma = \infty$ считаем, что уравнение (1.2) приобретает вид

$$(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{g(z)} = 0.$$

В случае сильной эллиптичности будет $\sigma \in [0, 1)$.

Перечислим несколько хорошо известных частных случаев уравнения (1.2). При $\tau = \sigma = 0$ имеем комплексное уравнение Лапласа $\Delta g(z) = 4\partial\overline{\partial}g(z) = 0$, а при $\tau = 0$, $\sigma = \infty$ — уравнение Бицадзе [6] $\overline{\partial}^2 g(z) = 0$. Если $\tau = 0$, то возникает плоское изотропное уравнение Ламе теории упругости, записанное в комплексном виде $\partial\overline{\partial}g(z) + \sigma\partial^2\overline{f(z)} = 0$, причем параметр σ связан с коэффициентом Пуассона p соотношением $\sigma = 1/(3-4p)$ (см. [7], [8]). Поскольку, как известно [7], $p \in (0, 1/2)$, а значит, $\sigma \in (1/3, 1)$, то соответствующая система (1.2) сильно эллиптическая. Если же $\sigma = 0$, то получаем систему, называемую кососимметрической, которая может быть записана в виде уравнения $ag_{xx} + 2bg_{xy} + cg_{yy} = 0$ с комплексными коэффициентами a, b, c.

Уравнение (1.2) представляет собой возмущенное по двум параметрам τ и σ уравнение Лапласа, причем в случае сильной эллиптичности эти параметры относительно малы: $\tau, \sigma \in [0, 1)$. Чтобы подчеркнуть данное обстоятельство, сделаем еще одно, последнее преобразование над уравнением (1.2), отделив лапласиан от остальной его части:

$$\partial\overline{\partial}(\mathcal{T}_{1,\sigma\tau}g) + \partial^2(\mathcal{T}_{\tau,\sigma}g) = 0, \tag{1.3}$$

где используется оператор аффинного преобразования

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta} := \alpha\mathcal{I} + \beta\mathcal{C}, \tag{1.4}$$

с (вообще говоря) комплексными параметрами α и β, выражающийся через тождественный оператор $\mathcal{I}\colon w \to w$ и оператор комплексного сопряжения $\mathcal{C}\colon w \to \overline{w}$. Если $|\alpha| \neq |\beta|$, то существует обратный оператор

$$\mathcal{T}^{-1}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}\mathcal{T}_{\overline{\alpha},-\beta}.$$

Норма оператора (1.4) как отображения $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ равна $\|\mathcal{T}_{\alpha,\beta}\| = |\alpha| + |\beta|$.

Считая уравнение (1.3) сильно эллиптическим, заменим в нем искомую функцию g на $f = \mathcal{T}_{1,\sigma\tau} g$ (невырожденным в этом случае преобразованием) и перепишем (1.3) в виде

$$\mathcal{L}f := \partial\overline{\partial}f + \partial^2(Tf) = 0, \tag{1.5}$$

где

$$T = \mathcal{T}_{\tau,\sigma}\mathcal{T}_{1,\sigma\tau}^{-1} = \frac{\tau(1-\sigma^2)\mathcal{I} + \sigma(1-\tau^2)\mathcal{C}}{1-\sigma^2\tau^2}.$$

Полученное уравнение (1.5) представляет собой уравнение Лапласа, возмущенное по оператору T с нормой

$$\|T\| = \frac{\tau+\sigma}{1+\sigma\tau},$$

которая в рассматриваемом сильно эллиптическом случае, когда $\tau, \sigma \in [0,1)$, оказывается меньше единицы. Введем нормированный на единицу оператор

$$T_0 = \|T\|^{-1}T = \mathcal{T}_{\alpha_0,\beta_0},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\tau(1-\sigma^2)}{(\tau+\sigma)(1-\sigma\tau)}, \qquad \beta_0 = \frac{\sigma(1-\tau^2)}{(\tau+\sigma)(1-\sigma\tau)},$$

и перепишем с его помощью (1.5) в окончательном виде

$$\mathcal{L}f = \partial\overline{\partial}f + \|T\|\partial^2(T_0 f) = 0. \tag{1.6}$$

В уравнении (1.6) малым параметром является $\|T\| < 1$.

2. Метод возмущений

Для решения задачи Дирихле применим метод возмущения по величине $\|T\|$, который состоит в поиске решения f в виде ряда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \|T\|^n, \tag{2.1}$$

в котором функции f_n находятся с помощью подстановки разложения (2.1) в уравнение $\mathcal{L}f = 0$ и приравнивания к нулю множителей при одинаковых степенях величины $\|T\|$; при этом полагаем $f_0|_\Gamma = h$ и $f_n|_\Gamma = 0$ для $n \ge 1$.

Таким образом, получаем следующие краевые задачи для последовательного отыскания функций f_n:

$$\partial\overline{\partial}f_0 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad\qquad f_0|_\Gamma = h \tag{2.2}$$

и

$$\partial\overline{\partial}f_n = -\partial^2(T_0 f_{n-1}) \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad\qquad f_n|_\Gamma = 0 \tag{2.3}$$

для $n \geqslant 1$.

Пусть $\omega\colon \mathbb{D} \to \Omega$ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ на область Ω. В случае жордановой области Ω по теореме Каратеодори отображение ω продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей $\overline{\mathbb{D}}$ и $\overline{\Omega}$, так что $\omega \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Для дальнейшего удобно перенести задачи (2.2) и (2.3) в круг $\mathbb{D}$ с помощью введенного конформного отображения. Пусть

$$F = f\circ\omega, \qquad H = h\circ\omega, \qquad F_n = f_n\circ\omega.$$

Тогда

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{|\omega'|^2}\left[\partial\overline{\partial}F + \|T\|\partial\left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'}\partial(T_0F)\right)\right] =: \mathcal{M}F. \tag{2.4}$$

Из (2.1), (2.2) и (2.3) следует, что

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \|T\|^n, \tag{2.5}$$

где

$$\partial\overline{\partial} F_0 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{D}, \qquad\qquad F_0|_{\mathbb{T}} = H \tag{2.6}$$

и

$$\partial\overline{\partial} F_n = -\partial\left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'}\partial(T_0 F_{n-1})\right) \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad\qquad F_n|_{\mathbb{T}} = 0 \tag{2.7}$$

для $n \geqslant 1$. В случае достаточной регулярности функции F_{n-1} при фиксированном номере n можно с помощью функции Грина

$$G(\zeta, z) = \frac{2}{\pi} \log\left|\frac{\zeta - z}{1 - \zeta\overline{z}}\right| \tag{2.8}$$

для оператора $\partial\overline{\partial}$ в круге $\mathbb{D}$ записать решения задач (2.6) и (2.7):

$$F_0(z) = \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{T}} \partial_\zeta G(\zeta, z) h(\zeta) d\zeta, \qquad F_n(z) = -\int_{\mathbb{D}} G(\zeta, z)\partial\left(\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\partial(T_0 F_{n-1}(\zeta))\right) d\mu, \tag{2.9}$$

$n \geqslant 1$, где μ — мера Лебега.

Определим операторы

$$\mathcal{P}[\varphi(z)] := \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{T}} \partial_\zeta G(\zeta, z)\varphi(\zeta) d\zeta, \qquad \mathcal{K}[\varphi(z)] := \int_{\mathbb{D}} \partial_\zeta G(\zeta, z)\varphi(\zeta) d\mu$$

и

$$\mathcal{K}_\partial[\varphi(z)] := \text{p.v.}\int_{\mathbb{D}} \partial_z\partial_\zeta G(\zeta, z)\varphi(\zeta) d\mu, \qquad \mathcal{K}_{\overline{\partial}}[\varphi(z)] := \text{p.v.}\int_{\mathbb{D}} \partial_{\overline{z}}\partial_\zeta G(\zeta, z)\varphi(\zeta) d\mu,$$

из которых $\mathcal{P}$ задается на классе функций $C(\mathbb{T})$, а остальные на $L_p(\mathbb{D})$, причем последние два интеграла понимаются в смысле главного значения. В дальнейшем обозначение p.v. будем для краткости опускать. Из формулы (2.8) получаем

$$\begin{gathered}
\mathcal{P}[\varphi(z)] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{1 - \zeta\overline{z}}\right)\varphi(\zeta) d\zeta, \\
\mathcal{K}[\varphi(z)] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{1 - \zeta\overline{z}}\right)\varphi(\zeta) d\mu
\end{gathered} \tag{2.10}$$

и

$$\mathcal{K}_\partial[\varphi(z)] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(\zeta) d\mu}{(\zeta - z)^2}, \qquad \mathcal{K}_{\overline{\partial}}[\varphi(z)] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(\zeta) d\mu}{(1 - \zeta\overline{z})^2} - \varphi(z). \tag{2.11}$$

С помощью введенных операторов формулы (2.9) для построения функций F_n можно записать в виде

$$F_0 = \mathcal{P}[h], \qquad F_n = \mathcal{K}[(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0 F_{n-1})], \quad n \geqslant 1. \tag{2.12}$$

При этом

$$\partial F_n = \mathcal{K}_\partial[(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0 F_{n-1})], \qquad \overline{\partial} F_n = \mathcal{K}_{\overline{\partial}}[(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0 F_{n-1})], \quad n \geqslant 1.$$

Введем также обозначения для частичных сумм рядов (2.1) и (2.5) соответственно:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} f_n \|T\|^n, \qquad S_m = \sum_{n=0}^{m} F_n \|T\|^n. \tag{2.13}$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема сходимости.

Теорема 2.1. *Пусть жорданова область Ω и заданная на ее границе Γ функция h таковы, что $h\circ\omega \in C^{\alpha}(\mathbb{T})$ при $1/2<\alpha<1$, где ω — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на Ω. Тогда при любом значении $\|T\| \in [0,1)$ ряд (2.1) с функциями $f_n = F_n\circ\omega^{-1}$, где F_n заданы согласно (2.12), сходится в норме пространства $C(\overline{\Omega})$ к функции $f\in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей в Ω уравнению $\mathcal{L}f=0$ и совпадающей на Γ с h.*

Условие $h\circ\omega\in C^{\alpha}(\mathbb{T})$, $\alpha\in(1/2,1)$, выполняется, например, при $h\in C^{\beta}(\Gamma)$ и $\omega\in C^{\gamma}(\mathbb{T})$, где $\beta\gamma=\alpha\in(1/2,1)$. Действительно, в этом случае

$$|h\circ\omega(z_1)-h\circ\omega(z_2)| \leqslant [h]_{\alpha}|\omega(z_1)-\omega(z_2)|^{\beta} \leqslant [h]_{\beta}[\omega|_{\mathbb{T}}]_{\gamma}^{\beta}|z_1-z_2|^{\beta\gamma},$$

где $[\varphi]_{\alpha} := \sup_{\zeta_1\neq\zeta_2}|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_2)|/|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha}$.

Теорема 2.1 является распространением аналогичного результата, полученного в работе автора [9] для кососимметрической сильно эллиптической системы, являющейся частным случаем рассматриваемой здесь системы, отвечающим значению параметра $\sigma=0$.

Отметим, что не все рассматриваемые здесь сильно эллиптические системы (1.2) обладают функционалом энергии, с помощью которого возможна вариационная переформулировка задачи Дирихле, стоящая за доказательством теоремы Лебега об общей разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа в односвязной области (см. [10]). Система канонического вида (1.2) обладает функционалом энергии в виде интеграла по области от квадратичной формы первых производных только при соотношении параметров $\sigma>\tau$; такие системы называются симметризуемыми, см. [8]. Это обстоятельство является причиной того, что вопрос о разрешимости задачи Дирихле для общих сильно эллиптических систем вида (1.1) в односвязных или хотя бы жордановых областях с произвольными непрерывными граничными данными является открытым.

В настоящее время наибольшим продвижением в вопросе о разрешимости задачи 1.1 является результат Веркоты и Фогеля [11], устанавливающий общую разрешимость задачи Дирихле в областях с кусочно гладкими липшицевыми границами при произвольных непрерывных граничных данных. В доказываемой здесь теореме 2.1 граничные функции берутся из более узкого класса Гельдера, однако область может принадлежать более широкому классу по сравнению с [11].

3. Доказательство сходимости метода возмущений

Лемма 3.1. *Если $\varphi\in C^{\alpha}(\mathbb{T})$, где $1/2<\alpha<1$, то $\mathcal{P}[\varphi]\in W_p^1(\mathbb{D})$ с любым показателем $0<p<(2(1-\alpha))^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $\psi=\mathcal{P}\varphi$. Поскольку $\varphi\in C(\mathbb{T})$, то по свойству интеграла Пуассона, $\psi\in C(\overline{\mathbb{D}})$, так что заведомо $\psi\in L_p(\mathbb{D})$. Докажем L_p–интегрируемость первых производных. Представим функцию ψ в виде суммы $\psi(z)=\psi_1(z)+\psi_2(z)$ голоморфной и антиголоморфной компонент

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \qquad \psi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(\zeta)d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\varphi(\zeta)|d\zeta|.$$

В силу теоремы Привалова [12] для интеграла типа Коши, из принадлежности $\varphi\in C^{\alpha}(\mathbb{T})$ при $1/2<\alpha<1$ следует, что $\psi_1\in C^{2\alpha-1}(\overline{\mathbb{D}})$. Обозначим $T(z,r):=\{\zeta\in\mathbb{C}\colon |\zeta-z|=r\}\subset\mathbb{D}$. Из формулы Коши

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{T(z,r)}\frac{\psi_1(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

находим

$$\partial\psi(z)=\psi_1'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{T(z,r)}\frac{\psi_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{T(z,r)}\frac{\psi_1(\zeta)-\psi_1(z)}{(\zeta-z)^2}d\zeta,$$

откуда выводим оценку

$$|\partial\psi(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi i}\int_{T(z,r)} \frac{|\psi_1(\zeta)-\psi_1(z)|}{|\zeta-z|^2}|d\zeta| \leqslant \frac{1}{2\pi i}\int_{T(z,r)} \frac{c_\alpha|\zeta-z|^{2\alpha-1}}{|\zeta-z|^2}|d\zeta| = \frac{c_\alpha}{r^{2(1-\alpha)}},$$

где $c_\alpha = \sup_{\zeta\neq z}|\psi_1(\zeta)-\psi_1(z)|/|\zeta-z|^{2\alpha-1}$. Предельным переходом $r\to(1-|z|)$ получаем $|\partial\psi(z)| \leqslant c_\alpha(1-|z|)^{2(\alpha-1)}$, см. также [13, стр. 74] или [14, стр. 50]. Это означает, что $\partial\psi \in L_p(\mathbb{D})$, если $2(1-\alpha)p < 1$. Аналогичным образом устанавливается L_p–интегрируемость производной $\overline{\partial}\psi = \psi_2'$ при том же условии на p. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим оператор Берлинга

$$\mathcal{B}\varphi(z) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)d\mu}{(\zeta-z)^2}, \tag{3.1}$$

осуществляющий, по теореме Кальдерона–Зигмунда [15], ограниченное отображение пространства $L_p(\mathbb{C})$ в себя при любом $p\in(1,\infty)$. Обозначим через $\|\mathcal{B}\|_p$ его норму как отображения $L_p(\mathbb{C})\to L_p(\mathbb{C})$, аналогичным образом будем обозначать нормы операторов, действующих в $L_p(U)$ для произвольной области U. Для дальнейшего является существенным то обстоятельство, что $\|\mathcal{B}\|_p\to 1$ при $p\to 2$ (см. [16, стр. 89], [17, стр. 5–6]).

Предложение 3.1. *Операторы* (2.10), (2.11) *обладают следующими свойствами:*
(i) $\mathcal{K}\colon L_p(\mathbb{D})\to L_p(\mathbb{D})$ *ограничен при* $p>1$*;*
(ii) $\mathcal{K}_\partial\colon L_p(\mathbb{D})\to L_p(\mathbb{D})$ *ограничен при* $p>1$*, причем* $\|\mathcal{K}_\partial\|_p = \|\mathcal{B}\|_p\to 1$ *при* $p\to 2$*;*
(iii) $\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\colon L_p(\mathbb{D})\to L_p(\mathbb{D})$ *ограничен при* $p>1$*, причем* $\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\|_p\to 1$ *при* $p\to 2$.

Доказательство. (i) вытекает из того, что ядро интегрального оператора $\mathcal{K}$ состоит из суммы двух ядер со слабой особенностью.

(ii) Пусть $\varphi\in L_p(\mathbb{D})$, $p>1$. Тогда $\mathcal{K}_\partial\,\varphi = \mathcal{B}\varphi_1$, где функция φ_1 совпадает с φ в круге $\mathbb{D}$ и равна нулю вне $\mathbb{D}$, так что $\|\varphi_1\|_{L_p(\mathbb{C})} = \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{D})}$. Следовательно, $\|\mathcal{K}_\partial\|_p = \|\mathcal{B}\|_p$.

(iii) Устроим в интеграле для $\mathcal{K}_{\overline{\partial}}$ из формулы (2.11) замену переменной ζ на $\xi = 1/\overline{\zeta}$ и получим

$$\mathcal{K}_{\overline{\partial}}[\varphi(z)] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}} \frac{\varphi(1/\overline{\xi})}{\xi^2}\cdot\frac{d\mu}{(\overline{\xi}-\overline{z})^2} - \varphi(z) = \overline{\mathcal{B}[\varphi_2(z)]} - \varphi(z), \tag{3.2}$$

где $\varphi_2(z) = \overline{\varphi(1/\overline{z})}/\overline{z}^2$ при $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ и $\varphi_2(z)=0$ при $z\in\mathbb{D}$. Устраивая обратную замену $\zeta = 1/\overline{\xi}$, находим

$$\|\varphi_2\|_{L_p(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}} |\varphi_2(\xi)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{D}} |\xi|^{2p-4}\cdot|\varphi(\zeta)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{D})}$$

при $p\geqslant 2$ с равенством при $p=2$. Тогда из (3.2) следует, что

$$\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\,\varphi\|_{L_p(\mathbb{D})} \leqslant (\|\mathcal{B}\|_p + 1)\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{D})},$$

т.е. $\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\colon L_p(\mathbb{D})\to L_p(\mathbb{D})$ ограничен при $p>1$.

Найдем $\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\|_2$. Пусть сначала φ — произвольная пробная функция из класса $C_0^2(\mathbb{D})$ дважды непрерывно дифференцируемых в $\mathbb{C}$ функций с компактным носителем $\operatorname{supp}(\varphi)\subset D_r := \{|z|<r\}$, где $r\in(0,1)$. Тогда $\mathcal{K}[\varphi(z)]\in C(\overline{\mathbb{D}})$ (см. [16, стр. 85]). Из (2.10) имеем

$$\mathcal{K}[\varphi(z)] = \frac{1-|z|^2}{\pi}\int_{\operatorname{supp}(\varphi)} \frac{\varphi(\zeta)d\mu(\zeta)}{(\zeta-z)(1-\zeta\overline{z})},$$

откуда находим для $|z|>r$

$$|\mathcal{K}[\varphi(z)]| \leqslant \frac{1-|z|^2}{\pi(|z|-r)(1-r|z|)}\int_{D_r} |\varphi(\zeta)|d\mu(\zeta) \to 0 \tag{3.3}$$

при $|z| \to 1$. Поскольку $\varphi(z) = 0$ и $\mathcal{K}[\varphi(z)] = 0$ при $z \in \mathbb{T}$, то, применяя несколько раз интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\varphi\|^2_{L_2(\mathbb{D})} &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\mathcal{K}[\varphi(z)] \cdot \frac{\partial}{\partial z}\overline{\mathcal{K}[\varphi(z)]} d\mu(z) = -\int_{\mathbb{D}} \overline{\mathcal{K}[\varphi(z)]}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\mathcal{K}[\varphi(z)] d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \overline{\mathcal{K}[\varphi(z)]}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} d\mu(z) = -\int_{\mathbb{D}} \varphi(z)\frac{\partial}{\partial z}\overline{\mathcal{K}[\varphi(z)]} d\mu(z) \\
&= -\int_{\mathbb{D}} \varphi(z)\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\varphi(\zeta)}d\mu(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2} - \overline{\varphi(z)}\right) d\mu(z) \\
&= \|\varphi\|^2_{L_2(\mathbb{D})} - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}z)^2} d\mu(\zeta)d\mu(z).
\end{aligned}$$

Вычитаемая из $\|\varphi\|^2_{L_2(\mathbb{D})}$ величина равна

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}z)^2} d\mu(\zeta)d\mu(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}z^n\overline{\zeta}^n d\mu(\zeta)d\mu(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{\pi}\left|\int_{\mathbb{D}} \varphi(z)z^n d\mu(z)\right|^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

поэтому

$$\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\varphi\|_{L_2(\mathbb{D})} \leqslant \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{D})}$$

с равенством на функциях $\varphi \in C^2_0(\mathbb{D})$, для которых $\int_{\mathbb{D}} \varphi(z)z^n d\mu(z) = 0$ при $n = 0, 1, \ldots$. Приближая функции из $L_p(\mathbb{D})$ функциями класса $C^2_0(\mathbb{D})$, получим ту же самую оценку. Таким образом, $\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\|_2 = 1$. Поскольку норма $\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\|_p$ существует при всех $p > 1$, то из теоремы М. Рисса–Торина [16, стр. 113], согласно которой величина $\log\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\|_p$ является выпуклой функцией переменного $1/p$, вытекает непрерывность этой величины относительно p. Следовательно, $\|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\|_p \to 1$ при $p \to 2$. Предложение доказано. □

Доказательство теоремы 2.1. **Шаг 1.** Установим сначала сходимость ряда (2.5) вместе с первыми частными производными в норме пространства $L_p(\mathbb{D})$. Из леммы 3.1 следует, что функция $F_0 = \mathcal{P}[h]$ принадлежит пространству Соболева $W^1_p(\mathbb{D})$ при $p < (2(1-\alpha))^{-1}$. Предположим, что $F_{n-1} \in L_p(\mathbb{D})$, $p > 2$, при некотором номере n. Тогда

$$\partial F_n = \mathcal{K}_{\partial}[(\overline{\omega'}/\omega')(\alpha_0\partial F_{n-1} + \beta_0\partial\overline{F_{n-1}})], \qquad \overline{\partial}F_n = \mathcal{K}_{\overline{\partial}}[(\overline{\omega'}/\omega')(\alpha_0\partial F_{n-1} + \beta_0\partial\overline{F_{n-1}})]$$

в смысле распределений (см. [16, стр. 90]). Используя эти соотношения и применяя предложение 3.1, а также тот факт, что $|\alpha_0| + |\beta_0| = 1$, выводим из формулы (2.12) оценки

$$\begin{aligned}
\|\partial F_n\|_{L_p(\mathbb{D})} &\leqslant \|\mathcal{K}_{\partial}\|_p \max\{\|\partial F_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}, \|\overline{\partial}F_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}\}, \\
\|\overline{\partial}F_n\|_{L_p(\mathbb{D})} &\leqslant \|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\|_p \max\{\|\partial F_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}, \|\overline{\partial}F_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}\},
\end{aligned}$$

из которых следует

$$\|DF_n\|_{L_p(\mathbb{D})} \leqslant \|\mathcal{D}\mathcal{K}\|_p \cdot \|DF_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})}, \tag{3.4}$$

где

$$\|DF_n\|_{L_p(\mathbb{D})} := \max\{\|\partial F_n\|_{L_p(\mathbb{D})}, \|\overline{\partial}F_n\|_{L_p(\mathbb{D})}\}, \qquad \|\mathcal{D}\mathcal{K}\|_p := \max\{\|\mathcal{K}_{\partial}\|_p, \|\mathcal{K}_{\overline{\partial}}\|_p\}.$$

Тогда отсюда и из (2.12) получаем

$$\|F_n\|_{L_p(\mathbb{D})} \leqslant \|\mathcal{K}\|_p \cdot \|DF_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{D})} \leqslant \|\mathcal{K}\|_p \cdot \|\mathcal{D}\mathcal{K}\|^{n-1}_p \cdot \|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})}. \tag{3.5}$$

Оценка (3.5) доказывает сходимость при $\|\mathcal{DK}\|_p \cdot \|T\| < 1$ ряда (2.5) в норме $L_p(\mathbb{D})$ к своей сумме $F \in L_p(\mathbb{D})$, причем

$$\begin{aligned}\|F\|_{L_p(\mathbb{D})} &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty} F_n\|T\|^n\right\|_{L_p(\mathbb{D})} \leqslant \|F_0\|_{L_p(\mathbb{D})} + \sum_{n=1}^{\infty}\|F_n\|_{L_p(\mathbb{D})}\cdot\|T\|^n \\ &\leqslant \|F_0\|_{L_p(\mathbb{D})} + \sum_{n=1}^{\infty}\|\mathcal{K}\|_p\cdot\|\mathcal{DK}\|_p^{n-1}\cdot\|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})}\cdot\|T\|^n \\ &= \|F_0\|_{L_p(\mathbb{D})} + \frac{\|\mathcal{K}\|_p\cdot\|T\|}{1-\|\mathcal{DK}\|_p\cdot\|T\|}\|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Оценка (3.4) доказывает, что, кроме того, и первые частные производные ряда (2.5) сходятся в той же норме к соответствующим производным функции F:

$$\|DF\|_{L_p(\mathbb{D})} \leqslant \frac{\|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})}}{1-\|\mathcal{DK}\|_p\cdot\|T\|}, \tag{3.7}$$

где $\|DF\|_{L_p(\mathbb{D})} := \max\{\|\partial F\|_{L_p(\mathbb{D})}, \|\overline{\partial}F\|_{L_p(\mathbb{D})}\}$. Полученные оценки (3.6) и (3.7) означают сходимость ряда (2.5) в норме пространства Соболева $W_p^1(\mathbb{D})$:

$$\lim_{m\to\infty}\|F - S_m\|_{W_p^1(\mathbb{D})} = 0. \tag{3.8}$$

По теореме вложения Соболева [18], $W_p^1(\mathbb{D}) \subset C(\overline{\mathbb{D}})$ при $1 - 2/p > 0$, или $p > 2$, причем вложение компактно. Следовательно, поскольку $F \in W_p^1(\mathbb{D})$, то $F \in C(\overline{\mathbb{D}})$ и тогда $f = F\circ\omega^{-1} \in C(\overline{\Omega})$. В силу компактности вложения, ряд (2.5), а следовательно, и (2.1), сходятся равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$ и $\overline{\Omega}$ соответственно.

Шаг 2. Теперь докажем, что функция $f = F\circ\omega^{-1}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f = 0$ в области Ω, установив сначала выполнение этого равенства в обобщенном смысле.

Пусть ϕ — произвольная пробная функция из класса $C_0^2(\mathbb{D})$ и

$$\langle g|\phi\rangle := \int_{\mathbb{C}} g(z)\phi(z)d\mu$$

есть действие обобщенной функции g на функцию ϕ. Имеем

$$\begin{aligned}\langle F_n|\partial\overline{\partial}\phi\rangle &= \int_{\mathbb{D}}\partial\overline{\partial}\phi(z)d\mu(z)\int_{\mathbb{D}}\partial_\zeta G(\zeta,z)\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\partial(T_0F_{n-1}(\zeta))d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{D}}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\partial(T_0F_{n-1}(\zeta))d\mu(\zeta)\partial_\zeta\int_{\mathbb{D}}G(\zeta,z)\partial\overline{\partial}\phi(z)d\mu(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\partial(T_0F_{n-1}(\zeta))\partial\phi(\zeta)d\mu(\zeta) = \langle(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0F_{n-1})|\partial\phi\rangle.\end{aligned}$$

Это означает равенство $\partial\overline{\partial}F_n = -\partial[(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0F_{n-1})]$ обобщенных производных в $\mathbb{D}$. Из него и из (2.4), в свою очередь, вытекает следующая цепочка равенств для обобщенных функций:

$$\begin{aligned}|\omega'|^2\mathcal{L}s_m &= \sum_{n=0}^{m}\left(\partial\overline{\partial}F_n + \|T\|\partial\left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'}\partial(T_0F_n)\right)\right)\|T\|^n \\ &= \partial\overline{\partial}F_0 + \sum_{n=1}^{m}\left(\partial\overline{\partial}F_n + \partial\left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'}\partial(T_0F_{n-1})\right)\right)\|T\|^n + \partial\left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'}\partial(T_0F_m)\right)\|T\|^{m+1} \\ &= \partial\left(\frac{\overline{\omega'}}{\omega'}\partial(T_0F_m)\right)\|T\|^{m+1},\end{aligned}$$

т.е. для любой функции $\varphi \in C_0^2(\Omega)$, используя функцию $\phi := \varphi \circ \omega \in C_0^2(\mathbb{D})$, можно записать

$$\langle \mathcal{L}s_m \,|\, \varphi \rangle = \langle \partial \left[(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0 F_m) \right] \,|\, \phi \rangle \cdot \|T\|^{m+1} = -\langle \partial(T_0 F_m) \,|\, (\overline{\omega'}/\omega')\partial\phi \rangle \cdot \|T\|^{m+1}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}f \,|\, \varphi \rangle &:= \langle f | \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle f - s_m | \mathcal{L}\varphi \rangle + \langle s_m | \mathcal{L}\varphi \rangle \\ &= \langle F - S_m | \mathcal{M}\phi \rangle - \langle \partial(T_0 F_m) | (\overline{\omega'}/\omega')\partial\phi \rangle \cdot \|T\|^{m+1}.\end{aligned}$$

Положим $1/p + 1/q = 1$. Применяя неравенство Гельдера и принимая во внимание соотношения (3.4) и (3.8), получаем

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{L}f \,|\, \varphi \rangle| &\leqslant \|F - S_m\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|\mathcal{M}\phi\|_{L_q(\mathbb{D})} + \|DF_m\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|\partial\phi\|_{L_q(\mathbb{D})} \cdot \|T\|^{m+1} \\ &\leqslant \|F - S_m\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|\mathcal{M}\phi\|_{L_q(\mathbb{D})} + \|DF_0\|_{L_p(\mathbb{D})} \cdot \|\partial\phi\|_{L_q(\mathbb{D})} \cdot \|\mathcal{DK}\|_p^m \cdot \|T\|^{m+1} \to 0\end{aligned}$$

при $m \to \infty$ и $\|\mathcal{DK}\|_p \cdot \|T\| < 1$. Таким образом,$\langle \mathcal{L}f \,|\, \varphi \rangle = 0$, т.е. функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f = 0$ в Ω в обобщенном смысле. В силу эллиптичности этого уравнения, оно, согласно лемме Вейля, выполняется и в классическом смысле.

Шаг 3. Остается показать, что $f|_\Gamma = h$. Из оценок (3.4) и (3.5) следует, что $F_n \in W_p^1(\mathbb{D})$. По теореме вложения Соболева, при $p > 2$ отсюда вытекает, что $F_n \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Так как функция F_0 является гармоническим продолжением граничной функции $H \in C^\alpha(\mathbb{T})$, то $F_0|_\mathbb{T} = H$. Остальные функции F_n, вычисляемые по второй формуле из (2.12), обращаются в ноль на $\mathbb{T}$: это можно показать, приблизив функцию $(\overline{\omega'}/\omega')\partial(T_0 F_{n-1}) \in L_p(\mathbb{D})$, $p \in (1, \infty)$, при $n \geqslant 1$ финитными функциями из $C_0^2(\mathbb{D})$ и применив оценку (3.3).

Таким образом, $S_m|_\mathbb{T} = H$ при любых m. Из компактности вложения $W_p^1(\mathbb{D}) \subset C(\overline{\mathbb{D}})$ и из сходимости (3.8) вытекает равномерная сходимость $\|F - S_m\|_{C(\overline{\mathbb{D}})} \to 0$, так что $F|_\mathbb{T} = S_m|_\mathbb{T} = H$. Следовательно, $f|_\Gamma = h$.

Все приведенные рассуждения справедливы при выполнении неравенств $2 < p < (2(1-\alpha))^{-1}$, которые совместимы, в виду того, что принято $\alpha \in (1/2, 1)$. Поскольку $\|\mathcal{DK}\|_p \to 1$ при $p \to 2$, то для любого значения $\|T\| < 1$ можно подобрать такое достаточно близкое к 2 значение p, при котором $\|\mathcal{DK}\|_p \cdot \|T\| < 1$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.Г. Петровский. *Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными* // Матем. сб. **5**, 3–70 (1939).
2. L.K. Hua, W. Lin, C.Q. Wu. *On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem of the elliptic system of differential equations* // Acta Math. Sinica. **15**:2, (1965).
3. М.И. Вишик. *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений* // Матем. сб. **29**, 615–676 (1951).
4. L.K. Hua, W. Lin, C.Q. Wu. *Second-order systems of partial differential equations in the plane.* Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1985.
5. А.О. Багапш, К.Ю. Федоровский. *C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$* // Тр. МИАН. **298**, 42–57 (2017).
6. А.В. Бицадзе. *О единственности задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными* // Успехи матем. наук. **3**:6(28), 211–212 (1948).
7. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости.* М.: Наука. 1987.
8. А.О. Багапш, К.Ю. Федоровский. *О функционалах энергии для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами* // Уфимск. математ. журнал. **14**:4, 16–28 (2023).

9. A.O. Bagapsh. *The perturbation method for the skew-symmetric strongly elliptic systems of PDEs* // Complex Variables and Elliptic Equations. **68**:1, 57–66 (2023).
10. H. Lebesgue. *Sur le probleme de Dirichlet* // Rend. circ. mat. Palerm. **24**, 371–402 (1907).
11. G.C. Verchota, A.L. Vogel. *Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains* // Trans. Amer. Math. Soc. **349**:11, 4501–4535 (1997).
12. И.И. Привалов. *Об интегралах типа Коши* // Докл. Акад. наук. **23**:9, 859–862 (1939).
13. P. Duren. *Theory of H^p spaces.* New York: Academic Press. 1970.
14. Ch. Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Berlin, Heidelberg:Springer–Verlag. 1992.
15. A. Calderon, A. Zigmund. *On the existence of certain singular integrals* // Acta Math. **88**, 85–139 (1952).
16. L.V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings.* Princeton, New Jersey:Van Nostrand. 1966.
17. M. Christ. *Lectures on singular integral operators* // CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI. **77**, 133 pp. (1990).
18. С.Л. Соболев. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука. 1988.

Астамур Олегович Багапш,
ФИЦ ИУ РАН,
ул. Вавилова, д. 44, корп. 2,
11933 Москва, Россия,

Санкт-Петербургский государственный университет,
14 линия В.О., д. 29б, 199178, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.bagapsh@gmail.com