ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 4 (2023). С. 110-123.

УДК 517.95

О ЛИНЕЙНО-АВТОНОМНЫХ СИММЕТРИЯХ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ГЕАНА–ПУ

Х.В. ЯДРИХИНСКИЙ, В.Е. ФЕДОРОВ

Аннотация. Исследуются групповые свойства модели Геана–Пу дробного порядка по времени, описывающей динамику ценообразования опционов. Найдены группы линейно-автономных преобразований эквивалентности соответствующего уравнения. С их помощью получена групповая классификация дробной модели Геана–Пу с нелинейным свободным элементом. В случае ненулевой безрисковой процентной ставки r основная алгебра Ли такой модели одномерна. Для нулевого r основная алгебра Ли трехмерна в случае правой части специального вида и двумерна в противном случае.

Ключевые слова: дробная производная Римана–Лиувилля, дробная модель Геана–Пу, симметрийный анализ, линейно-автономное преобразование, группа преобразований эквивалентности, групповая классификация.

Mathematics Subject Classification: 35R11, 26A33, 58J70

1. Введение

Все новые нелинейные модификации описывающего динамику ценообразования опционов уравнения Блэка–Шоулза [1], [2], учитывающие различные свойства реального рынка, которые были идеализированы при выводе линейного уравнения, такие как неликвидность рынка, расходы на хеджирование, влияние транзакций на формирование цен и др., предлагаются исследователями в последние полвека [1]–[10]. Одной из нелинейных моделей Блэка–Шоулза является уравнение Геана–Пу

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q), \tag{1.1}$$

моделирующее ценообразование опционов с учетом транзакционных издержек и влияния операций на рынок при ряде допущений [11], [12]. Здесь r — постоянная безрисковая ставка; γ — параметр абсолютного неприятия риска; σ — волатильность; q — количество акций в хеджируемом портфеле; S — цена акции; μ — прогноз тренда, ожидаемая доходность базового актива; функция $\theta(t, S, q)$ моделирует цену безразличия колл-опциона.

В [13]–[16] уравнение (1.1) исследовано методами группового анализа [17], [18] при различных условиях на функцию F двух переменных. Настоящая работа посвящена исследованию симметрий дробного варианта модели (1.1)

$$D_t^\alpha\theta = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q), \tag{1.2}$$

где D_t^α — оператор дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1]$. Как известно, дробные производные моделируют процессы с памятью [19], [20]. Дробные деривативы, как их часто называют, были введены в теорию ценообразования опционов для того, чтобы

Kh.V. Yadrikhinskiy, V.E. Fedorov, On linear-autonomous symmetries of the fractional model of Guéant–Pu.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 16.02.2023 № 075-02-2023-947.
Поступила 2 апреля 2023 г.

воспользоваться их свойствами памяти, позволяющими фиксировать как крупные скачки за небольшие промежутки времени, так и долгосрочные зависимости на рынках [21]–[24].

В данной работе методами, предложенными в работах Р.К. Газизова, А.А. Касаткина и С.Ю. Лукащука [25]–[28], получены генераторы групп линейно-автономных преобразований, допускаемых уравнением (1.2). При этом в силу теоремы 2.7 из работы [29] уравнения, разрешенные относительно дробной производной Римана–Лиувилля по выделенной переменной и содержащие только производные целого порядка по другим переменным, другими допускаемыми группами не обладают. Получена групповая классификация с точностью до линейно-автономных преобразований эквивалентности для уравнения (1.2) с нелинейным по θ_q свободным элементом F.

2. Предварительные сведения

Дробные интеграл Римана–Лиувилля порядка $\beta > 0$ и производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (n-1, n]$ имеют вид [20]

$$J_t^\beta \theta(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \theta(s) ds, \quad D_t^\alpha \theta := D_t^n J_t^{n-\alpha} \theta(t),$$

при этом также предполагается, что $J_t^0 \theta(t) := \theta(t)$. Здесь D_t^n — оператор дифференцирования целого порядка $n \in \mathbb{N}$. Напомним также определение функции Миттаг–Леффлера [20]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Известны [20] соотношения

$$\begin{aligned} &D_t^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad D_t^\alpha t^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu-\alpha}, \\ &D_t^\alpha t^{\alpha-k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k < \alpha + 1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

и формула общего решения

$$y = \sum_{j=1}^{n} b_j t^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(\lambda t^\alpha) + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t-s)^\alpha) f(s) ds, \tag{2.2}$$

дробного дифференциального уравнения $D_t^\alpha y(t) - \lambda y(t) = f(t)$.

3. Группы преобразований эквивалентности уравнения Геана–Пу

Рассматриваем уравнение (1.2), где $0 < \alpha < 1$, $\theta = \theta(t, S, q)$, $\gamma\sigma \neq 0$. Для нахождения групп преобразований эквивалентности рассматриваем функцию F и все ее производные как переменные. Генераторы групп преобразований эквивалентности будем искать в виде $Y = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F$, где τ, ξ, β, η зависят от t, S, q, θ, а ζ от t, S, q, θ, F, θ_t, θ_S, θ_q, $D_t^\alpha\theta$. Здесь $\partial_u := \frac{\partial}{\partial u}$ — оператор частной производной по переменной u.

Следуя [27], [28], ищем оператор Y в линейно-автономном виде:

$$\xi_\theta = 0, \quad \tau_\theta = 0, \quad \beta_\theta = 0, \quad \eta = p(t, S, q)\theta + g(t, S, q)$$

с условием $\tau(0) = 0$. Для учета зависимости F только от t и θ_q добавляем уравнения

$$F_S = 0, \quad F_q = 0, \quad F_\theta = 0, \quad F_{D_t^\alpha\theta} = 0, \quad F_{\theta_t} = 0, \quad F_{\theta_S} = 0. \tag{3.1}$$

Будем рассматривать систему (1.2), (3.1) как многообразие $\mathfrak{M}$ в расширенном пространстве соответствующих переменных. Продолженный оператор $\widetilde{Y}$ имеет вид

$$\widetilde{Y} = Y + \eta^\alpha \partial_{D_t^\alpha\theta} + \eta^t \partial_{\theta_t} + \eta^S \partial_{\theta_S} + \eta^q \partial_{\theta_q} + \eta^{SS} \partial_{\theta_{SS}} + \zeta^t \partial_{F_t} + \zeta^S \partial_{F_S}$$

$$+\zeta^q\partial_{F_q}+\zeta^\theta\partial_{F_\theta}+\zeta^{D_t^\alpha\theta}\partial_{F_{D_t^\alpha\theta}}+\zeta^{\theta_S}\partial_{F_{\theta_S}}+\zeta^{\theta_q}\partial_{F_{\theta_q}}.$$

Действием оператора $\widetilde{Y}$ на обе части равенства (1.2) получаем

$$\begin{aligned}\eta^\alpha-r\eta-(\mu-rS)\beta+rq\xi+\mu\eta^S+\frac{\sigma^2}{2}\eta^{SS}-\frac{r}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2\tau\\+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)(\eta^S-\beta)-\zeta|_{\mathfrak{M}}=0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Для вычисления коэффициентов продолженного оператора $\widetilde{Y}$ используются операторы полного дифференцирования

$$D_t=\frac{\partial}{\partial t}+\theta_t\frac{\partial}{\partial\theta}+\dots,\qquad D_S=\frac{\partial}{\partial S}+\theta_S\frac{\partial}{\partial\theta}+\dots,\qquad D_q=\frac{\partial}{\partial q}+\theta_q\frac{\partial}{\partial\theta}+\dots,$$

$$\tilde{D}_t=\frac{\partial}{\partial t}+F_t\frac{\partial}{\partial F}+\dots,\qquad \tilde{D}_S=\frac{\partial}{\partial S}+F_S\frac{\partial}{\partial F}+\dots,\qquad \tilde{D}_q=\frac{\partial}{\partial q}+F_q\frac{\partial}{\partial F}+\dots,$$

$$\tilde{D}_\theta=\frac{\partial}{\partial\theta}+F_\theta\frac{\partial}{\partial F}+\dots,\qquad \tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}=\frac{\partial}{\partial D_t^\alpha\theta}+F_{D_t^\alpha\theta}\frac{\partial}{\partial F}+\dots,$$

$$\tilde{D}_{\theta_S}=\frac{\partial}{\partial\theta_S}+F_{\theta_S}\frac{\partial}{\partial F}+\dots,\quad \tilde{D}_{\theta_q}=\frac{\partial}{\partial\theta_q}+F_{\theta_q}\frac{\partial}{\partial F}+\dots.$$

С их помощью задаются продолжения по переменным S и q

$$\eta^S=D_S\eta-\theta_tD_S\tau-\theta_SD_S\xi-\theta_qD_S\beta,\qquad \eta^q=D_q\eta-\theta_tD_q\tau-\theta_SD_q\xi-\theta_qD_q\beta,$$
$$\eta^{SS}=D_S\eta^S-\theta_{St}D_S\tau-\theta_{SS}D_S\xi-\theta_{Sq}D_S\beta.$$

По теореме 2.8 из [27] и согласно ее обобщению на случай многих переменных, теореме 3 из [28], получаем продолжение по дробной производной

$$\eta^\alpha=D_t^\alpha(\eta-\tau\theta_t-\xi\theta_S-\beta\theta_q)+\tau D_t^{\alpha+1}\theta+\xi D_t^\alpha\theta_S+\beta D_t^\alpha\theta_q.$$

Для исключения производных вида θ_t под знаком дробного дифференцирования воспользуемся равенством $D_t^\alpha(\tau\theta_t)=D_t^\alpha((\tau\theta)_t-\tau_t\theta)$. Используя (1.8) из [27] или дифференцируя (2.43) из теоремы 2.2 в [20], получаем равенство

$$D_t^\alpha(\tau\theta)_t=D_t^{\alpha+1}(\tau\theta)-(\tau\theta)(0)\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Отсюда с учетом условия $\tau(0)=0$ следует равенство

$$D_t^\alpha(\tau\theta_t)=D_t^{\alpha+1}(\tau\theta)-D_t^\alpha(\tau_t\theta).$$

Тогда продолжение по дробной производной примет вид

$$\eta^\alpha=D_t^\alpha(\eta-\xi\theta_S-\beta\theta_q)+\xi D_t^\alpha\theta_S+\beta D_t^\alpha\theta_q+D_t^\alpha(\tau_t\theta)-D_t^{\alpha+1}(\tau\theta)+\tau D_t^{\alpha+1}\theta.$$

С помощью обобщенного правила Лейбница для дробных производных получаем

$$\begin{aligned}\eta^\alpha=&D_t^\alpha\eta-\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta_SD_t^n\xi-\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta_qD_t^n\beta+\xi D_t^\alpha\theta_S\\&+\beta D_t^\alpha\theta_q+\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta D_t^{n+1}\tau-\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha+1}{n}D_t^{\alpha+1-n}\theta D_t^n\tau+\tau D_t^{\alpha+1}\theta\\=&D_t^\alpha\eta-\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta_SD_t^n\xi-\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta_qD_t^n\beta+\xi D_t^\alpha\theta_S\\&+\beta D_t^\alpha\theta_q+\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta D_t^{n+1}\tau-\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha+1}{n+1}D_t^{\alpha-n}\theta D_t^{n+1}\tau,\end{aligned}$$

где $\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)}$. Так как $\binom{\alpha+1}{n+1} = \frac{\alpha+1}{n+1}\binom{\alpha}{n}$, то

$$\begin{aligned}\eta^\alpha =&D_t^\alpha\eta - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n\xi - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n\beta\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{\alpha-n}\theta D_t^{n+1}\tau.\end{aligned}$$

Дальнейшее вычисление для линейно-автономных преобразований дает

$$\begin{aligned}\eta^\alpha =&D_t^\alpha g + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right)\\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n\xi - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n\beta.\end{aligned}$$

Коэффициенты при производных F продолженного оператора $\widetilde{Y}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\zeta^S =&\tilde{D}_S\zeta - F_t\tilde{D}_S\tau - F_S\tilde{D}_S\xi - F_q\tilde{D}_S\beta - F_\theta\tilde{D}_S\eta\\ &- F_{D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_S\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_S\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_S\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_S\eta^q,\\
\zeta^q =&\tilde{D}_q\zeta - F_t\tilde{D}_q\tau - F_S\tilde{D}_q\xi - F_q\tilde{D}_q\beta - F_\theta\tilde{D}_q\eta\\ &- F_{D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_q\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_q\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_q\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_q\eta^q,\\
\zeta^\theta =&\tilde{D}_\theta\zeta - F_t\tilde{D}_\theta\tau - F_S\tilde{D}_\theta\xi - F_q\tilde{D}_\theta\beta - F_\theta\tilde{D}_\theta\eta\\ &- F_{D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_\theta\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_\theta\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_\theta\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_\theta\eta^q,\\
\zeta^{D_t^\alpha\theta} =&\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\zeta - F_t\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\tau - F_S\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\xi - F_q\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\beta - F_\theta\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\eta\\ &- F_{D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{D_t^\alpha\theta}\eta^q,\\
\zeta^{\theta_t} =&\tilde{D}_{\theta_t}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_t}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_t}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_t}\beta - F_\theta\tilde{D}_{\theta_t}\eta\\ &- F_{D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^q,\\
\zeta^{\theta_S} =&\tilde{D}_{\theta_S}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_S}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_S}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_S}\beta - F_\theta\tilde{D}_{\theta_S}\eta\\ &- F_{D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^q.\end{aligned}$$

Действуем оператором $\widetilde{Y}$ на уравнения (3.1) и получаем

$$\zeta^S|_{\mathfrak{M}} = 0,\quad \zeta^q|_{\mathfrak{M}} = 0,\quad \zeta^\theta|_{\mathfrak{M}} = 0,\quad \zeta^{D_t^\alpha\theta}|_{\mathfrak{M}} = 0,\quad \zeta^{\theta_t}|_{\mathfrak{M}} = 0,\quad \zeta^{\theta_S}|_{\mathfrak{M}} = 0.$$

Расписывая их и подставляя (3.1), имеем

$$\begin{aligned}&\zeta^S|_{\mathfrak{M}} = \zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}\eta^q_S|_{\mathfrak{M}} = 0, && \zeta^q|_{\mathfrak{M}} = \zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}\eta^q_q|_{\mathfrak{M}} = 0,\\
&\zeta^\theta|_{\mathfrak{M}} = \zeta_\theta - F_t\tau_\theta - F_{\theta_q}\eta^q_\theta|_{\mathfrak{M}} = 0, && \zeta^{D_t^\alpha\theta}|_{\mathfrak{M}} = \zeta_{D_t^\alpha\theta}|_{\mathfrak{M}} = 0,\\
&\zeta^{\theta_t}|_{\mathfrak{M}} = \zeta_{\theta_t} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_t}|_{\mathfrak{M}} = 0, && \zeta^{\theta_S}|_{\mathfrak{M}} = \zeta_{\theta_S} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_S}|_{\mathfrak{M}} = 0.\end{aligned}$$

Распишем η^q и, переходя на многообразие $\mathfrak{M}$, получим

$$\begin{aligned}&\zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}(p_{Sq}\theta + p_S\theta_q + g_{Sq} - \theta_t\tau_{Sq} - \theta_S\xi_{Sq} - \theta_q\beta_{Sq}) = 0,\\
&\zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}(p_{qq}\theta + p_q\theta_q + g_{qq} - \theta_t\tau_{qq} - \theta_S\xi_{qq} - \theta_q\beta_{qq}) = 0,\\
&\zeta_\theta - F_{\theta_q}p_q = 0,\quad \zeta_{D_t^\alpha\theta} = 0,\quad \zeta_{\theta_t} + F_{\theta_q}\tau_q = 0,\quad \zeta_{\theta_S} + F_{\theta_q}\xi_q = 0.\end{aligned}$$

Разделение переменных дает

$$\begin{aligned}&\tau_S=0,\quad \tau_q=0,\quad \xi_q=0,\quad p_q=0,\quad \zeta_S=0,\quad \zeta_q=0,\quad \zeta_\theta=0,\quad \zeta_{D_t^\alpha\theta}=0,\\ &\zeta_{\theta_t}=0,\quad \zeta_{\theta_S}=0,\quad p_S-\beta_{Sq}=0,\quad \beta_{qq}=0,\quad g_{Sq}=0,\quad g_{qq}=0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Теперь подставляем в (3.2) формулы коэффициентов продолженного оператора $\widetilde{Y}$ и уравнение $\tau_S=0$ из (3.3) и получаем

$$\begin{aligned}&D_t^\alpha g+\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta\left(D_t^np+\frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right)\\
&\quad-\sum_{n=1}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta_SD_t^n\xi-\sum_{n=1}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta_qD_t^n\beta-rp\theta-rg-(\mu-rS)\beta\\
&\quad+rq\xi+\mu(p_S\theta+p\theta_S+g_S-\theta_S\xi_S-\theta_q\beta_S)-\frac{r}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2\tau\\
&\quad+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta+g_{SS}+2p_S\theta_S-\theta_S\xi_{SS}-\theta_q\beta_{SS}-2\theta_{Sq}\beta_S+\theta_{SS}(p-2\xi_S))\\
&\quad+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)(p_S\theta+p\theta_S+g_S-\theta_S\xi_S-\theta_q\beta_S-\beta)-\zeta|_{\mathfrak{M}}=0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Переходя на многообразие $\mathfrak{M}$ в уравнении (3.4) при помощи выражения для $D_t^\alpha\theta$ из (1.2), получаем

$$\begin{aligned}&(p-\alpha\tau_t)\left(r\theta+(\mu-rS)q-\mu\theta_S-\frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS}-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2+F\right)\\
&\quad+D_t^\alpha g+\sum_{n=1}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta\left(D_t^np+\frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right)\\
&\quad-\sum_{n=1}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta_SD_t^n\xi-\sum_{n=1}^\infty\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\theta_qD_t^n\beta\\
&\quad-rp\theta-rg-(\mu-rS)\beta+rq\xi\\
&\quad+\mu(p_S\theta+g_S+p\theta_S-\theta_S\xi_S-\theta_q\beta_S)-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2\\
&\quad+\frac{\sigma^2}{2}\left(p_{SS}\theta+g_{SS}+2p_S\theta_S-\theta_S\xi_{SS}-\theta_q\beta_{SS}-2\theta_{Sq}\beta_S+\theta_{SS}(p-2\xi_S)\right)\\
&\quad+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)(p_S\theta+g_S+p\theta_S-\theta_S\xi_S-\theta_q\beta_S-\beta)-\zeta=0.\end{aligned}$$

Разделение переменных дает

$$D_t^{\alpha-n}\theta:\qquad D_t^np+\frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau=0,\quad n=1,2,\ldots,\tag{3.5}$$

$$D_t^{\alpha-n}\theta_S:\qquad D_t^n\xi=0,\qquad D_t^{\alpha-n}\theta_q:D_t^n\beta=0,\quad n=1,2,\ldots,\tag{3.6}$$

$$\theta_{SS}:\qquad \frac{\sigma^2}{2}(-(p-\alpha\tau_t)+p-2\xi_S)=0,\tag{3.7}$$

$$\theta_{Sq}:\qquad \beta_S=0,\quad p_S=0,\tag{3.8}$$

$$\theta_S^2:\qquad -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(p-\alpha\tau_t)-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(p-\xi_S)=0,\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\theta_S:\qquad &(p-\alpha\tau_t)(-\mu+q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)})+\mu(p-\xi_S)-\frac{\sigma^2}{2}\xi_{SS}\\ &+r\tau q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(g_S-\beta-q(p-\xi_S))=0,\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$1:\qquad (p-\alpha\tau_t)\left(r\theta+(\mu-rS)q-\frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+F\right)$$

$$+ D_t^\alpha g - rp\theta - rg - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2} g_{SS}$$
$$- \frac{rq^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) - \zeta = 0. \tag{3.11}$$

Из (3.6) получаем, что $\xi_t = 0$, $\beta_t = 0$. Из (3.7) получаем равенство $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$, поэтому $\tau_{tt} = 0$, $\xi_{SS} = 0$. Тогда из (3.5) при $n = 1$ получаем $p_t = 0$. Учитывая, что $p_q = 0$ в силу (3.3) и $p_S = 0$ в силу (3.8), имеем постоянное $p = p_0$.

Для функций τ, ξ, β имеем $\tau_{tt} = 0$, $\tau_q = 0$ и $\tau_S = 0$ из (3.3), $\xi_t = 0$ и $\xi_{SS} = 0$, $\xi_q = 0$ из (3.3), $\beta_t = 0$, $\beta_S = 0$ из (3.8) и $\beta_{qq} = 0$ из (3.3). С учетом равенства $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$ из (3.7) и условия $\tau(0) = 0$ интегрирование дает

$$p = p_0, \quad \tau = Mt, \quad \xi = \frac{\alpha M}{2}S + A, \quad \beta = Bq + K, \tag{3.12}$$

где M, A, B, K — различные произвольные константы. Подстановка (3.12) в (3.9), (3.10) с сокращением дает равенства

$$\theta_S^2: \qquad -rMt + p_0 = 0, \tag{3.13}$$
$$\theta_S: \qquad \mu\frac{\alpha M}{2} + r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}Mtq + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(g_S - Bq - K - q\frac{\alpha M}{2}\right) = 0. \tag{3.14}$$

Из (3.13) получаем, что $rM = 0$, $p_0 = 0$. Так как $g_{Sq} = 0$ в (3.3), то дифференцированием (3.14) по q получаем $B = rMt - \alpha M/2 = -\alpha M/2$. Следовательно, из (3.13), (3.14) получается

$$rM = 0, \quad p_0 = 0, \quad B = -\frac{\alpha M}{2}, \quad g_S = K - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}. \tag{3.15}$$

Так как в силу (3.3) $g_{qq} = 0$, то интегрирование g_S дает

$$g = S\left(K - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) + N(t)q + V(t), \tag{3.16}$$

где $N(t), V(t)$ — произвольные функции. Подставим равенства (3.12), (3.15), (3.16) в (3.11), тогда

$$\begin{aligned}
&-\alpha M\left((\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + SD_t^\alpha\left(K - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)\\
&\quad + qD_t^\alpha N(t) + D_t^\alpha V(t) - rS\left(K - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)\\
&\quad - rN(t)q - rV(t) - (\mu - rS)\left(-\frac{\alpha M}{2}q + K\right) + rqA\\
&\quad + \mu K - \mu^2\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} + q\mu\frac{\alpha M}{2} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{\alpha M}{2}q^2 - \zeta = 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Рассматриваем (3.17) с учетом равенств $\zeta_S = 0$, $\zeta_q = 0$, $\zeta_\theta = 0$ из (3.3) как многочлен от S, q, θ и получаем с помощью равенства $rM = 0$ следующие уравнения:

$$D_t^\alpha N(t) - rN(t) + rA = 0, \qquad D_t^\alpha\left(K - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) = 0, \tag{3.18}$$

$$-\alpha MF + D_t^\alpha V(t) - rV(t) - \mu^2\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \zeta = 0.$$

В предположении, что $r \neq 0$, из равенства $rM = 0$ получаем, что $M = 0$. Тогда второе уравнение в (3.18) дает в силу (2.1)

$$D_t^\alpha K = \frac{Kt^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = 0.$$

Следовательно, $K = 0$. Первое уравнение в (3.18) согласно (2.2) при $0 < \alpha < 1$ имеет решение в виде

$$N(t) = Ht^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha) - rA\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(r(t-s)^\alpha)ds,$$

где H — произвольная константа. Тогда операторы принимают вид

$$\tau = 0, \qquad \xi = A, \qquad \beta = 0, \qquad \zeta = D_t^\alpha V(t) - rV(t),$$
$$\eta = \left(Ht^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha) - rA(t-s)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(rt^\alpha)\right)q + V(t).$$

Если $r = 0$, то решением (3.18) в силу (2.1) является

$$N(t) = Ht^{\alpha-1}, \qquad K = \mu\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2}.$$

Учитывая также результаты (3.12), (3.15), (3.16), получаем утверждение.

Теорема 3.1. *1. Базис алгебры Ли генераторов групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения* (1.2) *при* $r \neq 0$ *образуют операторы*

$$Y_1 = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha)q\partial_\theta,$$
$$Y_2 = \partial_S - rt^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(rt^\alpha)q\partial_\theta,$$
$$Y_V = V(t)\partial_\theta + (D_t^\alpha V(t) - rV(t))\partial_F,$$

где $V(t)$ *— произвольная функция.*

2. Базис алгебры Ли генераторов групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения (1.2) *при* $r = 0$ *образуют операторы*

$$Y_1 = t^{\alpha-1}q\partial_\theta, \qquad Y_2 = \partial_S, \qquad Y_V = V(t)\partial_\theta + D_t^\alpha V(t)\partial_F,$$
$$Y_3 = 2\gamma\sigma^2 t\partial_t + \alpha\gamma\sigma^2 S\partial_S + \alpha\left(\mu - \gamma\sigma^2 q\right)\partial_q - \alpha\left(2\gamma\sigma^2 F + \mu^2\right)\partial_F,$$

где $V(t)$ *— произвольная функция.*

При $\alpha = 1$ уравнение (1.1) при $r \neq 0$ обладает, среди прочих, группами преобразований эквивалентности, порождаемыми операторами

$$Y_1|_{\alpha=1} = e^{rt}q\partial_\theta \quad \text{и} \quad Y_V|_{\alpha=1} = V(t)\partial_\theta + (D_t^1 V(t) - rV(t))\partial_F$$

(см. [14, Теорема 1]).

Из первой части теоремы 3.1 следует, что группы линейно-автономных преобразований, допускаемых уравнением (1.2) при $r \neq 0$ и при всех F, порождаются только операторами Y_V при таких V, что $D_t^\alpha V(t) - rV(t) \equiv 0$, т.е. функция V имеет вид

$$V(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha), \qquad Y_{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha)} = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha)\partial_\theta.$$

В силу второй части теоремы 3.1 группа линейно-автономных преобразований, допускаемых уравнением (1.2) при $r = 0$ и при всех F, порождается операторами Y_2 и Y_V при $V(t) = t^{\alpha-1}$.

Некоторые из полученных в теореме 3.1 групп преобразований эквивалентности будут использованы при получении групповой классификации уравнения (1.2), остальные формально могут быть использованы для упрощения вида уравнения.

4. Групповая классификация при $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$

Теперь осуществим поиск допускаемых групп линейно-автономных преобразований уравнения (1.2) при $0 < \alpha < 1$, поскольку в силу теоремы 2.7 [29] системы уравнений, разрешенные относительно дробной производной Римана–Лиувилля по времени и содержащие только производные целого порядка по остальным переменным, другими симметриями, кроме линейно-автономных, не обладают. Будем рассматривать свободный элемент $F = F(t, \theta_q)$ нелинейным по θ_q, т.е. при условии $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$. Линейный случай имеет свою специфику (см., например, [15]), его изучение планируется провести в дальнейшем.

Оператор симметрии ищется в виде $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta$. Действие продолженного оператора

$$\widetilde{X} = X + \eta^\alpha \partial_{D_t^\alpha\theta} + \eta^S \partial_{\theta_S} + \eta^q \partial_{\theta_q} + \eta^{SS}\partial_{\theta_{SS}}$$

на (1.2) после сужения на многообразие $\mathfrak{N}$, задаваемое в расширенном пространстве переменных уравнением (1.2), дает

$$\begin{gathered}\eta^\alpha - r\eta - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\eta^S + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{SS} - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\eta_S - \beta) - F_t\tau - F_{\theta_q}\eta^q|_{\mathfrak{N}} = 0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Подставляем формулы продолжения, которые были получены выше при вычислении преобразований эквивалентности в предположении $\eta(t, S, q, \theta) = p(t, S, q)\theta + g(t, S, q)$, в (4.1) и получаем

$$\begin{aligned}&D_t^\alpha g + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n\xi \\ &- \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n\beta - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi \\ &+ \mu\left(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S\right) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ &+ \frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_t\tau_{SS} - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{St}\tau_S - 2\theta_{Sq}\beta_S \\ &+ \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) \\ &- F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q)|_{\mathfrak{N}} = 0.\end{aligned}$$

Переход на многообразие $\mathfrak{N}$ дает уравнение

$$\begin{aligned}&(p - \alpha\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F\right) \\ &\quad + D_t^\alpha g + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n\xi \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n\beta - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi \\ &\quad + \mu\left(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S\right) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_t\tau_{SS} - \theta_S\xi_{SS} \\ &\quad - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{St}\tau_S - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) \\ &\quad + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta)\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$- F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0.$$

В силу теоремы 2.7 [29]

$$\tau(t,S,q) = At + Bt^2, \qquad \xi_t = \xi_\theta = \beta_t = \beta_\theta = 0, \qquad p(t,S,q) = h(S,q) + \kappa(A + 2Bt),$$

где A, B — некоторые константы, $\kappa = 0$ при $B = 0$ и $\kappa = (\alpha-1)/2$ при $B \neq 0$. Поэтому уравнение (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned}(p-\alpha\tau_t)&\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F\right)\\ &+ D_t^\alpha g - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi\\ &+ \mu\left(h_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S\right) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau\\ &+ \frac{\sigma^2}{2}(h_{SS}\theta + g_{SS} + 2h_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S))\\ &+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(h_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta)\\ &- F_t\tau - F_{\theta_q}(h_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Осуществляем разделение переменных в (4.3) относительно θ_S, θ_{SS}, θ_{Sq} и получаем

$$\theta_{Sq}: \qquad \beta_S = 0, \tag{4.4}$$

$$\theta_{SS}: \qquad \alpha\tau_t - 2\xi_S = 0, \tag{4.5}$$

$$\theta_S^2: \qquad p - r\tau = 0, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\theta_S: \qquad &(p-\alpha\tau_t)(-\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q) + \mu(p - \xi_S) + \frac{\sigma^2}{2}(2h_S - \xi_{SS})\\ &+ r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q\tau + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(h_S\theta + g_S - \beta - q(p - \xi_S)) + F_{\theta_q}\xi_q = 0,\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}1: \qquad &(p-\alpha\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2 + F\right)\\ &+ D_t^\alpha g - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\left(h_S\theta + g_S\right) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2\tau\\ &+ \frac{\sigma^2}{2}(h_{SS}\theta + g_{SS}) - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q(h_S\theta + g_S - \beta)\\ &- F_t\tau - F_{\theta_q}(h_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_q\beta_q) = 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Из (4.5) следует, что $\tau_{tt} = 0$, $\xi_{SS} = 0$, поэтому $B = \kappa = 0$, $\tau = At$, $p = h(S,q)$. Ввиду предположения $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ дифференцирование (4.7) по θ_q дает $\xi_q = 0$. Итак, с учетом (4.4), (4.6)

$$\alpha A - 2\xi_S = 0, \quad r\tau_t = p_t = 0, \quad h_S = h_q = 0, \quad \xi_{SS} = 0, \quad \xi = \xi(S), \quad \beta = \beta(q).$$

Интегрирование дает равенства

$$\tau = At, \quad rA = 0, \quad \xi = \frac{\alpha A}{2}S + E, \quad \beta = \beta(q), \quad p = 0, \quad \eta = g = g(t,S,q), \tag{4.9}$$

где A, E — константы. Уравнения (4.7), (4.8) теперь принимают вид

$$\mu\frac{\alpha A}{2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(g_S - \beta - q\frac{\alpha A}{2}\right) = 0, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}-\alpha A&\left(\mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2 + F\right) + D_t^\alpha g - rg - (\mu - rS)\beta + rqE + \mu g_S\\ &+\frac{\sigma^2}{2}g_{SS} - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) - F_tAt - F_{\theta_q}(g_q - \theta_q\beta_q) = 0.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Выразим $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S-\beta)$ из уравнения (4.10) и подставим в (4.11), получим

$$\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S-\beta)=\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{\alpha A}{2}q-\mu\frac{\alpha A}{2}, \tag{4.12}$$

$$\begin{gathered}-\alpha A\left(\frac{\mu q}{2}+F\right)+D_t^\alpha g-rg-(\mu-rS)\beta+rqE+\mu g_S\\ +\frac{\sigma^2}{2}g_{SS}-F_tAt-F_{\theta_q}(g_q-\theta_q\beta_q)=0.\end{gathered} \tag{4.13}$$

Из уравнения (4.12) получаем

$$g=\beta(q)S+\frac{\alpha A}{2}Sq-\mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}e^{r(t-T)}S+G(t,q), \tag{4.14}$$

$G(t,q)$ — некоторая функция

Дифференцированием (4.13) по θ_q получаем

$$(\beta_q-\alpha A)F_{\theta_q}-F_{t\theta_q}At-F_{\theta_q\theta_q}(g_q-\theta_q\beta_q)=0. \tag{4.15}$$

Дифференцируем уравнение (4.15) по S и получаем $g_{Sq}=0$. В силу (4.14) это влечет равенство $\beta_q=-\alpha A/2$, $\beta=-\alpha Aq/2+L$, где L — константа. Следовательно, $\beta_{qq}=0$ и дифференцирование (4.15) по q дает $g_{qq}=G_{qq}=0$. Таким образом,

$$\beta=-\frac{\alpha A}{2}q+L,\qquad g=LS-\mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}e^{r(t-T)}S+N(t)q+M(t), \tag{4.16}$$

где $N(t),M(t)$ — некоторые функции.

Подстановка (4.16) в (4.13) дает

$$\begin{aligned}-\alpha A\left(\frac{\mu q}{2}+F\right)&+D_t^\alpha\left(L-\mu\frac{\alpha Ae^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)S\\ &+D_t^\alpha N(t)q+D_t^\alpha M(t)-r\left(L-\mu\frac{\alpha Ae^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)S-rN(t)q-rM(t)\\ &-(\mu-rS)\left(-\frac{\alpha A}{2}q+L\right)+rqE+\mu\left(L-\mu\frac{\alpha Ae^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)\\ &-F_tAt-F_{\theta_q}\left(N(t)+\theta_q\frac{\alpha A}{2}\right)=0.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Приравняем коэффициенты многочлена (4.17) от S и q к нулю:

$$S:\quad D_t^\alpha\left(L-\mu\frac{\alpha Ae^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)=0,\qquad q:\quad D_t^\alpha N(t)-rN(t)+rE=0, \tag{4.18}$$

$$1:\quad D_t^\alpha M(t)-rM(t)-\mu^2\frac{\alpha Ae^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-\alpha AF-F_tAt-F_{\theta_q}\left(N(t)+\theta_q\frac{\alpha A}{2}\right)=0. \tag{4.19}$$

Так как от r зависит решение уравнений (4.18), (4.19), то необходимо рассмотреть случаи $r=0$ и $r\neq 0$.

4.1. Случай $\mathbf{r\neq 0}$. В этом случае $A=0$, поэтому равенства (4.9), (4.16), (4.18), (4.19) принимают вид

$$\tau=0,\qquad \xi=E,\qquad \beta=L,\qquad \eta=g=LS+N(t)q+M(t),$$

$$D_t^\alpha L=0,\qquad D_t^\alpha N(t)-rN(t)+rE=0,\qquad D_t^\alpha M(t)-rM(t)-F_{\theta_q}N(t)=0. \tag{4.20}$$

Дифференцируем третье уравнение в (4.20) по θ_q и получаем $N=0$. Подставляем полученное $N=0$ во второе уравнение в (4.20) и получаем $E=0$. Первое уравнение в (4.20) дает ввиду (2.1) выражение $Lt^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ и, следовательно, $L=0$. Таким образом, функция F в данном случае произвольна, если не считать условие нелинейности $F_{\theta_q\theta_q}\neq 0$. Решая уравнение $D_t^\alpha M - rM = 0$ с помощью (2.2), получаем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Основная алгебра Ли уравнения* (1.2), *где* $F_{\theta_q\theta_q}\neq 0$ *и* $r\neq 0$, *порождается оператором* $X_1 = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(rt^\alpha)\partial_\theta$.

Здесь и далее термин «основная алгебра Ли» используется в смысле монографии Л.В. Овсянникова (см. [17, с. 98]).

Сравнивая с симметриями уравнения (1.1) [14], можно заметить, что условие $\tau(0)=0$ приводит к потере симметрии со сдвигом по времени, а несколько симметрий уравнения первого порядка по времени отсутствуют в случае производной дробного порядка по времени из-за имеющихся в определяющей системе уравнений $\xi_t = 0$, $\beta_t = 0$. Симметрия $\partial_q + S\partial_\theta$ уравнения (1.1) в данном случае отсутствует из-за того, что дробная производная Римана–Лиувилля от константы — не ноль. Оператор X_1 в случае уравнения (1.1) принимает вид $X_1|_{\alpha=1} = e^{rt}\partial_\theta$.

4.2. Случай $\mathbf{r=0}$. Подставляем $r=0$ в (4.18), (4.19) и получаем

$$D_t^\alpha\left(L-\mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}\right) = \left(L-\mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}\right)D_t^\alpha 1 = 0, \qquad D_t^\alpha N(t) = 0, \tag{4.21}$$

$$D_t^\alpha M(t) - \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} - \alpha AF - F_tAt - F_{\theta_q}\left(N(t)+\theta_q\frac{\alpha A}{2}\right) = 0. \tag{4.22}$$

Решение (4.21) с помощью (2.1) дает

$$N(t) = Pt^{\alpha-1}, \qquad L = \mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}.$$

Подстановкой полученного в (4.9), (4.16) получим

$$\tau = At, \qquad \xi = \frac{\alpha A}{2}S + E, \qquad \beta = -\frac{\alpha A}{2}q + \mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}, \qquad \eta = Pt^{\alpha-1}q + M(t),$$

где A, E, P — некоторые константы. Представим (4.22) в виде

$$\alpha AF + F_tAt + F_{\theta_q}\left(Pt^{\alpha-1}+\theta_q\frac{\alpha A}{2}\right) - R(t) = 0, \tag{4.23}$$

где $R(t) = D_t^\alpha M(t) - \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}$.

4.2.1. Случай $A\neq 0$. Интегрируя уравнение (4.23), получим

$$F = t^{-\alpha}\Phi\left(t^{-\alpha/2}\theta_q - \frac{Pt^{\alpha/2-1}}{A(\frac{\alpha}{2}-1)}\right) + \frac{t^{-\alpha}}{A}\int_0^t R(t)t^{\alpha-1}dt,$$

где Φ — произвольная функция. Подействуем на полученное выражение преобразованием эквивалентности $\bar\theta = \theta + a_1t^{\alpha-1}q$ из группы, порожденной оператором Y_1 из второй части теоремы 3.1, при групповом параметре $a_1 = \frac{P}{A(\frac{\alpha}{2}-1)}$, а затем преобразованием эквивалентности

$$\bar\theta = \theta + a_VV(t), \qquad \bar F = F + a_VD_t^\alpha V(t)$$

порожденной оператором Y_V группы (см. теорему 2) при $a_V = 1$ и функции $V(t)$, такой, что

$$D_t^\alpha V(t) = -\frac{t^{-\alpha}}{A}\int_0^t R(t)t^{\alpha-1}dt.$$

Функция $V(t)$ определяется с помощью формулы (2.2) при $\lambda = 0$. В итоге получаем функцию $F = t^{-\alpha}\Phi\left(t^{-\alpha/2}\theta_q\right)$. Ее подстановка в определяющее уравнение (4.22) дает

$$D_t^\alpha M(t) - \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} - N(t)t^{-3\alpha/2}\Phi' = 0.$$

Ввиду того, что $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ по предположению, получаем $\Phi'' \neq 0$, поэтому

$$N(t) = 0, \qquad D_t^\alpha M(t) - \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} = 0.$$

Следовательно, интегрирование $M(t)$ с помощью (2.1) дает

$$M(t) = M_0 t^{\alpha-1} + \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

В итоге

$$\tau = At, \qquad \xi = \frac{\alpha A}{2}S + E, \qquad \beta = -\frac{\alpha A}{2}q + \mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2},$$
$$\eta = \frac{M_0 t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

4.2.2. Случай $A = 0$. Получаем равенства (4.20) при $r = 0$, т.е.

$$\tau = 0, \qquad \xi = E, \qquad \beta = L, \qquad \eta = g = LS + N(t)q + M(t),$$
$$D_t^\alpha L = 0, \qquad D_t^\alpha N(t) = 0, \qquad D_t^\alpha M(t) - F_{\theta_q}N(t) = 0.$$

Тогда $L = 0$, дифференцированием третьего уравнения по θ_q получаем $N(t) \equiv 0$, $M(t) = M_0 t^{\alpha-1}$, F — произвольная функция. Доказано следующее утверждение для уравнения (1.2) при $r = 0$.

Теорема 4.2. *Основная алгебра Ли уравнения*

$$D_t^\alpha\theta = \mu q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(\theta_S - q)^2 + t^{-\alpha}\Phi\left(t^{-\alpha/2}\theta_q\right),$$

где $\Phi'' \neq 0$, порождается операторами

$$X_1 = \partial_S, \qquad X_2 = t^{\alpha-1}\partial_\theta,$$
$$X_3 = 2t\partial_t + \alpha S\partial_S + \left(-\alpha q + \frac{\mu\alpha}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_q + \frac{\mu^2\alpha t^\alpha}{\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta.$$

Для уравнения

$$D_t^\alpha\theta = \mu q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q),$$

где $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ и $F(t, \theta_q)$ не эквивалентна функции $t^{-\alpha}\Phi\left(t^{-\alpha/2}\theta_q\right)$ в смысле преобразований эквивалентности, порождаемых операторами Y_1, Y_2, Y_3, Y_V из второй части теоремы 3.1, основная алгебра Ли порождается операторами $X_1 = \partial_S$, $X_2 = t^{\alpha-1}\partial_\theta$.

Заметим, что вид полученных симметрий согласуется с результатами теоремы 2.7 [29], в которой найден общий вид симметрий систем уравнений подобного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Black. *The pricing of Commodity Contracts* // J. Financ. Econ. **3**, 167–179 (1976).
2. F. Black, M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities* // J. Political Econ. **81**, 637–659 (1973).
3. P. Bank, D. Baum. *Hedging and portfolio optimization in financial markets with a large trader* // Math. Finance. **14**, 1–18 (2004).
4. G. Barles, H.M. Soner. *Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black–Scholes equation* // Financ. Stochastics. **2**, 369–397 (1998).
5. J. Cvitanić, I. Karatzas. *Hedging and portfolio optimization under transaction costs: A martingale approach* // Math. Finance. **6**, 133–165 (1996).
6. A.S. Kyle. *Continuous auctions and insider trading* // Econometrica. **53**, 1315–1335 (1985).
7. H.E. Leland. *Option pricing and replication with transactions costs* // J. Finance. **40**, 1283–1301 (1985).
8. M.J.P. Magill, G.M. Constantinides. *Portfolio selection with transactions costs* // J. Econ. Theory. **13**, 245–263 (1976).
9. E. Platen, M. Schweizer. *On feedback effects from hedging derivatives* // Math. Finance. **8**, 67–84 (1998).
10. L.C. Rogers, L.S. Singh. *The cost of illiquidity and its effects on hedging* // Math. Finance. **20**, 597–615 (2010).
11. O. Guéant. *The Financial Mathematics of Market Liquidity: From Optimal Execution to Market Making.* Boca Raton-London-New York: CRC Press. 2016.
12. O. Guéant, J. Pu. *Option pricing and hedging with execution costs and market impact* // Preprint: arXiv:1311.4342 (2015).
13. Х.В. Ядрихинский, В.Е. Федоров. *Инвариантные решения модели Геана–Пу ценообразования опционов и хеджирования* // Челяб. физ.-матем. журн. **6**:1, 42–51 (2021).
14. S.M. Sitnik, K.V. Yadrikhinskiy, V.E. Fedorov. *Symmetry analysis of a model of option pricing and hedging* // Symmetry. **14**, 1841 (2022).
15. K.V. Yadrikhinskiy, V.E. Fedorov. *Symmetry analysis of the Guéant–Pu model* // AIP Conf. Proc. **2528**, 020035 (2022).
16. Kh.V. Yadrikhinskiy, V.E. Fedorov, M.M. Dyshaev. *Group analysis of the Guéant and Pu Model of Option Pricing and Hedging.* In book: Symmetries and Applications of Differential Equations. Eds. A.C.J. Luo, R.K. Gazizov. Singapore: Springer. 173–203 (2021).
17. Л.В. Овсянников. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978.
18. П. Олвер. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* М.: Мир. 1989.
19. А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его приложения.* М.: Физматлит. 2003.
20. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника. 1987.
21. A.N. Fall, S.N. Ndiaye, N. Sene. *Black–Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative* // Chaos, Solitons & Fractals. **125**, 108–118 (2019).
22. S. Kumar, A. Yildirin, Y. Khan, H. Jafari, K. Sayevand, L. Wei. *Analytical solution of fractional Black–Scholes European option pricing equations using Laplace transform* // J. Frac. Cal. Appl. **2**, 1–9 (2012).
23. P. Sawangtong, K. Trachoo, W. Sawangtong, B. Wiwattanapataphee. *The analytical solution for the Black–Scholes equation with two assets in the Liouville–Caputo fractional derivative sense* // Mathematics. **8**, 129 (2018).
24. M. Yavuz, N. Özdemir. *European vanilla option pricing model of fractional order without singular kernel* // Fractal Fract. **2**, 3 (2018)
25. Р.К. Газизов, А.А. Касаткин, С.Ю. Лукащук. *Групповая классификация и симметрийные редукции нелинейного трехмерного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии* // Уфимск. матем. журн. **11**:4, 14–28 (2019).
26. Р.К. Газизов, А.А. Касаткин, С.Ю. Лукащук. *Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии* // Уфимск. матем. журн. **4**:4, 54–68 (2012).

27. А.А. Касаткин. *Симметрии и точные решения с производными дробного порядка типа Римана–Лиувилля*: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Уфа: УГАТУ. 2013.
28. R. Gazizov, A. Kasatkin, S. Lukashchuk. *Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs*. Vol. 2. *Fractional Differential Equations*, ed. by A. Kochubei and Y. Luchko. Berlin-Boston: De Gruyter, pp. 353-382. 2019.
29. Zhi-Yong Zhang, Jia Zheng. *Symmetry structure of multi-dimensional time-fractional partial differential equations* // Preprint: arXiv:1912.08602 (2021).
30. P. Schönbucher, P. Wilmott. *The feedback-effect of hedging in illiquid markets* // SIAM J. Appl. Math. **61**, 232–272 (2000).
31. R. Sircar, G. Papanicolaou. *Generalized Black–Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies* // Appl. Math. Financ. **5**, 45–82 (1998).

Христофор Васильевич Ядрихинский,
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,
Якутское отделение Дальневосточного центра математических исследований,
ул. Белинского, 58,
677000, г. Якутск, Россия
E-mail: ghdsfdf@yandex.ru

Владимир Евгеньевич Федоров,
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,
Якутское отделение Дальневосточного центра математических исследований,
ул. Белинского, 58,
677000, г. Якутск, Россия,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
450001, г. Челябинск, Россия
E-mail: kar@csu.ru