ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 3 (2023). С. 100-108.

УДК 517.956

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ: СЛУЧАЙ СУММИРУЕМЫХ КРАЕВЫХ ФУНКЦИЙ

А.Б. МУРАВНИК

Аннотация. Изучается задача Дирихле в полупространстве для эллиптических уравнений, содержащих, кроме дифференциальных операторов, операторы сдвига, действующие по тангенциальным (пространственноподобным) переменным, т.е., независимым переменным, изменяющимся на всей вещественной оси. Краевая функция задачи предполагается суммируемой, что в классическом случае дифференциальных эллиптических уравнений соответствует ситуации, в которой возможны только решения с конечной энергией.

Рассматриваются два (принципиально различных) случая: случай, в котором исследуемое уравнение содержит суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига, и случай, когда оно содержит их суммы (т.е. является уравнением с нелокальными потенциалами). Для обоих типов задач строится интегральное представление решения указанной задачи в смысле обобщенных функций, доказывается его бесконечная гладкость в открытом полупространстве (т.е. вне краевой гиперплоскости) и доказывается его равномерное стремление к нулю (а также равномерное стремление к нулю любой его производной) при стремлении к бесконечности времениподобной переменной (т.е. единственной независимой переменной, изменяющейся на положительной полуоси). Скорость этого стремления к нулю — степенная; порядок степени равен сумме размерности пространственноподобной независимой переменной и порядка производной решения.

Излагаются наиболее общие (на текущий момент) результаты: сдвиги независимых переменных допускаются в произвольных (тангенциальных) направлениях, а там, где сдвигов несколько, на их величины не накладывается никаких условий соизмеримости.

Таким образом, так же как и в классическом случае, задачи с суммируемыми краевыми функциями принципиальным образом отличаются от изученных ранее задач с существенно ограниченными краевыми функциями: последние, как установлено ранее, допускают решения, не имеющие предела при стремлении времениподобной переменной к бесконечности, а наличие или отсутствие такого предела определяется условием стабилизации Репникова-Эйдельмана.

Ключевые слова: эллиптические дифференциально-разностные уравнения, задачи в полупространстве, суммируемые краевые функции.

Mathematics Subject Classification: 35R10, 35J25

A.B. Muravnik, Elliptic differential-difference equations in half-spaces: case of summable functions.

© Муравник А.Б. 2023.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (соглашение № 175-03-2020-233/3, FSSF-2023-0016).

Поступила 27 марта 2023 г.

1. Введение

Традиционно, краевые задачи *в полупространстве* считаются естественными для *нестационарных* уравнений: единственная независимая переменная, меняющаяся на полуоси, естественным образом трактуется, как время, все остальные независимые переменные считаются пространственными, а данные, заданные на границе области (т.е. на гиперплоскости, ортогональной указанной полуоси), трактуются, соответственно, как начальные данные. Однако и для эллиптических уравнений хорошо известны корректные задачи в полупространстве. Более того, во многих таких случаях *пространственная* переменная, выбранная указанным выше способом (т.е. само уравнение не меняется, а всего лишь нарушается его изотропность в области), приобретает так называемые *времениподобные* свойства: в частности, разрешающий оператор обладает полугрупповым свойством и имеет место стабилизация решений при стремлении вышеуказанной времениподобной переменной к бесконечности.

Для классического случая *дифференциальных* эллиптических уравнений описанное явление известно не менее шести десятилетий (см., напр., [1], [2]). Относительно недавно выяснилось (см. [3]), что оно характерно и для *дифференциально-разностных* уравнений, т.е., для случая, когда на неизвестную функцию, кроме дифференциальных операторов, действуют еще и операторы сдвига.

Интерес к таким (и, более широко — *функционально-дифференциальным*) уравнениям в частных производных проявляется в настоящее время во всем мире (начиная с пионерской работы [4]). Это обусловлено как их многочисленными приложениями, не покрываемыми классическими моделями математической физики, так и чисто теоретическими причинами: *нелокальная* природа таких уравнений порождает принципиально новые эффекты, не возникающие в классическом случае дифференциальных уравнений, а различные методы исследований, доказавшие свою эффективность в теории дифференциальных уравнений, оказываются неприменимы (напр., это относится ко всем методам, основанным на принципе максимума, поскольку, в отличие от дифференциальных уравнений, исследуемое уравнение связывает значения искомой функции *в разных точках*); соответственно, нужно развивать качественно новые методы (см. [5]–[8] и имеющуюся там библиографию).

Как в дифференциальном, так и в дифференциально-разностном случае, задачи в полупространстве (это относится и к эллиптическому, и к параболическому типам), разделяются на следующие два класса: задачи с *ограниченными* краевыми функциями и задачи с *суммируемыми* краевыми функциями. Эта (естественная) разница в постановке задач принципиальна — она порождает решения с принципиально различными наборами свойств. В частности, постоянные решения возможны только у задач первого из этих классов. С другой стороны, только решения с конечной энергией возможны у задач второго класса. Иными словами, необходимое и достаточное условие стабилизации Репникова-Эйдельмана, согласно которому решение может иметь предел (вообще говоря, отличный от нуля), а может и не иметь его, имеет место только для задач первого класса. У задач второго класса решение всегда имеет нулевой предел, а исследование в основном сосредотачивается на скорости убывания решения.

На текущий момент изучение задач второго из указанных классов несколько отстает. Цель настоящей работы — упорядоченно изложить результаты, полученные для указанных задач (т.е., для задач с суммируемыми краевыми данными) к настоящему времени. Статья организована следующим образом. Задачи для уравнений, содержащих *суммы* дифференциальных операторов и операторов сдвига, и для уравнений, содержащих их *суперпозиции*, изучаются отдельно — обоснованность такого подхода, порожденного нелокальной природой указанных операторов, установлена при предыдущих исследованиях дифференциально-разностных уравнений всех типов. В каждом из двух указанных разделов вначале подробно решается модельная задача, а затем излагаются результаты для максимального (на текущий момент) ее обобщения.

2. Уравнения с суперпозициями операторов

В полупространстве $\left\{(x,y)\Big|x\in\mathbb{R}^n, y>0\right\}$ рассмотрим задачу Дирихле для следующего модельного уравнения

$$u_{x_1x_1}(x,y)+au_{x_1x_1}(x_1+h,x_2,\dots,x_n,y)+\sum_{j=2}^{n}u_{x_jx_j}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0, \tag{2.1}$$

где $|a|<1$, а h — произвольный вещественный параметр.

При указанном ограничении в $\mathbb{R}^n$ корректно определены следующие функции:

$$\varphi(\xi):=\varphi(\xi_1,\dots,\xi_n):=\sqrt{|\xi|^4+2a|\xi|^2\xi_1^2\cos h\xi_1+a^2\xi_1^4}\,, \tag{2.2}$$

$$G_1(\xi):=\sqrt{\frac{\varphi(\xi)+|\xi|^2+a\xi_1^2\cos h\xi_1}{2}}\,, \tag{2.3}$$

$$G_2(\xi):=\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-|\xi|^2-a\xi_1^2\cos h\xi_1}{2}}\,. \tag{2.4}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Если $|a|<1$, то функция*

$$\mathcal{E}(x,y):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi \tag{2.5}$$

корректно определена в полупространстве $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ и удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (2.1).

Доказательство. Для доказательства первого утверждения леммы подкоренное выражение в (2.3) оценивается снизу через $(1-|a|)|\xi|^2$, а для доказательства второго его утверждения функции (2.3) и (2.4) представляются в виде $\rho(\xi)\cos\theta(\xi)$ и $\rho(\xi)\sin\theta(\xi)$ соответственно, где

$$\rho(\xi)=\left[\left(|\xi|^2+a\xi_1^2\cos h\xi_1\right)^2+a^2\xi_1^4\sin^2 h\xi_1\right]^{\frac14},\quad \theta(\xi)=\frac12\operatorname{arctg}\frac{a\xi_1^2\sin h\xi_1}{|\xi|^2+a\xi_1^2\cos h\xi_1}. \tag{2.6}$$

Учитывая множество значений арктангенса, мы заключаем, что $|\theta(\xi)|\le\dfrac{\pi}{4}$, а значит, $\cos\theta(\xi)>0$, а $\cos 2\theta(\xi)\ge0$, откуда следует, что

$$\cos\theta(\xi)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{a\xi_1^2\sin h\xi_1}{|\xi|^2+a\xi_1^2\cos h\xi_1}\right)}{2}}\,.$$

Тогда, применяя формулу $\operatorname{arctg}x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, получаем, что

$$\cos\theta(\xi)=\frac{1}{\sqrt2}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2\xi_1^4\sin^2 h\xi_1}{\left(|\xi|^2+a\xi_1^2\cos h\xi_1\right)^2}}}\right]^{\frac12},$$

а $\sin\theta(\xi)$ вычисляем аналогично.

Теперь мы можем подставить функцию (2.5) в уравнение (2.1):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{x_jx_j}(x,y) &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_j^2 e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi,\ j=\overline{1,n},\\
\mathcal{E}_{yy}(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right] e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi \\
&\quad - 2\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Учитывая неотрицательность $\cos 2\theta(\xi)$, из равенства

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi)\sin 2\theta(\xi)$$

выводим, что

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \frac{\rho^2(\xi)\operatorname{tg} 2\theta(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}} = \frac{a\rho^2(\xi)\xi_1^2 \sin h\xi_1}{\sqrt{\left(|\xi|^2 + a\xi_1^2\cos h\xi_1\right)^2 + \xi_1^4\left(a\sin h\xi_1\right)^2}} = a\xi_1^2\sin h\xi_1,$$

а

$$
\begin{aligned}
G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) =& \rho^2(\xi)\cos 2\theta(\xi) = \rho^2(\xi)\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}{1+\operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}}\\
=& \rho^2(\xi)\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta(\xi)}} = |\xi|^2 + a\xi_1^2\cos h\xi_1,
\end{aligned}
$$

откуда следует, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{x_jx_j}(x,y) + \mathcal{E}_{yy}(x,y) + a\mathcal{E}_{x_1x_1}(x_1+h_k, x_2, \dots, x_n, y)\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[-\sum_{j=1}^n \xi_j^2 + |\xi|^2 + a\xi_1^2\cos h\xi_1\right] e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi\\
&- a\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi - a\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi) + h\xi_1\right] d\xi\\
&= a\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \cos h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi - a\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi\\
&- a\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \cos h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi + a\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi = 0.
\end{aligned}
$$

□

Пусть теперь $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $|a| < 1$, то функция*

$$u(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x-\xi, y)u_0(\xi)d\xi \tag{2.8}$$

бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ и удовлетворяет уравнению (2.1) в этом полупространстве.

Доказательство. Учтем Лемму 2.1 и промажорируем саму функцию $\mathcal{E}(x,y)$ и ее производные произвольного порядка:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^m e^{-y|\xi|\sqrt{1-|a|}} d\xi = \frac{1}{(1-|a|)^{\frac{m+n}{2}} y^{m+n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\eta|^m e^{-|\eta|} d\eta = \frac{const}{y^{m+n}} \int\limits_0^\infty \rho^{m+n-1} e^{-\rho} d\rho = \frac{const}{y^{m+n}}.$$

□

Найденная мажоранта дает и асимптотическую оценку решения и всех его производных:

Теорема 2.2. *Если $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то решение (2.8) и любая его производная бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ и каждая из этих функций стремится к нулю при $y \to +\infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$.*

Максимальное обобщение уравнения (2.1), достигнутое на сегодняшний день (насколько известно автору) — следующее (см. [9]):

$$\sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x,y) + u_{yy}(x,y) + \sum_{j=1}^n a_j u_{x_j x_j}(x+h_j,y) = 0, \tag{2.9}$$

где $h_j := (h_{j1}, \dots, h_{jn})$, $j = \overline{1,n}$, — произвольные векторы из $\mathbb{R}^n$.
В этом случае на коэффициенты уравнения накладывается условие

$$a_0 := \max_{j=\overline{1,n}} |a_j| < 1, \tag{2.10}$$

а функции G_1 и G_2 определяются следующим образом:

$$G_1(\xi) = \rho(\xi)\cos\theta(\xi), \quad G_2(\xi) = \rho(\xi)\sin\theta(\xi), \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \left[\left(|\xi|^2 + \sum_{j=1}^n a_j \xi_j^2 \cos h_j\cdot\xi\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n a_j\xi_j^2 \sin h_j\cdot\xi\right)^2\right]^{\frac14}, \\ \theta(\xi) &= \frac12 \operatorname{arctg} \frac{\sum\limits_{j=1}^n a_j\xi_j^2 \sin h_j\cdot\xi}{|\xi|^2 + \sum\limits_{j=1}^n a_j\xi_j^2\cos h_j\cdot\xi}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

В этом случае утверждения теорем 2.1-2.2 выполняются и для уравнения (2.9).

3. Уравнения с суммами операторов

В полупространстве $\left\{(x,y)\middle| x \in \mathbb{R}^n, y > 0\right\}$ рассмотрим модельное уравнение

$$u_{x_1x_1}(x,y) - au(x_1+h, x_2, \dots, x_n, y) + \sum_{j=2}^n u_{x_jx_j}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \tag{3.1}$$

при условии, что

$$0 < a \le \frac{2}{h^2}, \tag{3.2}$$

а h — произвольный вещественный параметр.

В этом случае введем

$$\rho(\xi) = \left(|\xi|^4 + 2a|\xi|^2\cos h\xi_1 + a^2\right)^{\frac14}, \quad \theta(\xi) = \frac12 \arctan\frac{a\sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1}, \tag{3.3}$$

а функции $G_{\left\{ {1 \atop 2} \right\}}(\xi)$ и, соответственно, $\mathcal{E}(x,y)$ по-прежнему определяются формулами (2.11) и (2.5) соответственно.

Теперь, чтобы оценить функцию $G_1(\xi)$ снизу, учтем, что значения арктангенса лежат в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $|\theta(\xi)|<\frac{\pi}{4}$, т.е. $\cos\theta(\xi)>0$ и $\cos 2\theta(\xi)>0$. Следовательно, $\cos\theta(\xi)$ можно представить в виде $\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta(\xi)}{2}}$, а $\cos 2\theta(\xi)$ — в виде $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta(\xi)}}$. Поскольку

$$2\theta(\xi)=\arctan\frac{a\sin h\xi_1}{|\xi|^2+a\cos h\xi_1},$$

имеем равенство

$$\tan 2\theta(\xi)=\frac{a\sin h\xi_1}{|\xi|^2+a\cos h\xi_1}. \tag{3.4}$$

Положительность последнего знаменателя обеспечивается условием (3.2). Действительно, он ограничен снизу функцией одной переменной $f(\xi_1):=\xi_1^2+a\cos h\xi_1$. Ее производная $f'(\xi_1)$ равна $2\xi_1-ah\sin h\xi_1=\xi_1\left(2-ah^2\frac{\sin h\xi_1}{h\xi_1}\right)$, а значит, неотрицательна на $[0,+\infty)$. Следовательно, $f(\xi_1)$ — неубывающая на положительной полуоси функция. Поэтому на указанной полуоси она ограничена снизу величиной $f(0)=a>0$. Наконец, поскольку $f(\xi_1)$ — четная функция, последняя оценка остается справедливой на всей оси.
Из этой положительности мы делаем вывод, что

$$\begin{aligned}\cos 2\theta(\xi)&=\left(1+\frac{a^2\sin^2 h\xi_1}{[|\xi|^2+a\cos h\xi_1]^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{[|\xi|^2+a\cos h\xi_1]^2}{[|\xi|^2+a\cos h\xi_1]^2+a^2\sin^2 h\xi_1}}\\&=\frac{|\xi|^2+a\cos h\xi_1}{\sqrt{|\xi|^4+2a|\xi|^2\cos h\xi_1+a^2}}=\frac{|\xi|^2+a\cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда $\cos\theta(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{|\xi|^2+a\cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)}\right]^{\frac{1}{2}}$ и, следовательно,

$$G_1(\xi)=\rho(\xi)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{|\xi|^2+a\cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\rho^2(\xi)+|\xi|^2+a\cos h\xi_1}{2}}. \tag{3.6}$$

Поскольку

$$\rho^4(\xi)=|\xi|^4+2a|\xi|^2\cos h\xi_1+a^2\geq|\xi|^4-2a|\xi|^2+a^2=(|\xi|^2-a)^2,$$

неравенство $\rho^2(\xi)\geq|\xi|^2-a$ выполнено при условии, что $|\xi|\geq\sqrt{a}$. Значит, при $|\xi|\geq\sqrt{a}$ подкоренное выражение в (3.6) ограничено снизу функцией $\frac{|\xi|^2-a+|\xi|^2-a}{2}=|\xi|^2-a$.

Используя найденную оценку подкоренного выражения в (3.6), заключаем, что для любого положительного y модуль подынтегральной функции в (2.5) мажорируется интегрируемой функцией $e^{-y\sqrt{|\xi|^2-a}}$ во внешности шара радиуса $\sqrt{a}$ с центром в начале координат; внутри этого шара она мажорируется тождественной единицей. Таким образом, функция $\mathcal{E}(x,y)$ корректно определена в $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$. Формально дифференцируя функцию $\mathcal{E}(x,y)$ под знаком интеграла (по любой переменной и сколько угодно раз), мы получаем только дополнительные подынтегральные сомножители не более, чем полиномиального роста по ξ, которые не имеют особенностей. Абсолютная сходимость полученных интегралов обосновывается точно так же, как и в случае самой функции $\mathcal{E}(x,y)$, только мажоранты заменяются на $a^{\frac{m}{2}}$ и $|\xi|^{\frac{m}{2}}e^{-y\sqrt{|\xi|^2-a}}$ соответственно (здесь m — порядок производной). Следовательно, указанное выше формальное дифференцирование под знаком интеграла законно и все производные функции $\mathcal{E}(x,y)$ тоже корректно определены в полупространстве $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$.

Теперь, учитывая равенства (3.4)-(3.5), получаем соотношения

$$G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)=\rho^2(\xi)\left[\cos^2\theta(\xi)-\sin^2\theta(\xi)\right]=\rho^2(\xi)\cos 2\theta(\xi)=|\xi|^2+a\cos h\xi_1$$

и

$$2G_1(\xi)G_2(\xi)=2\rho^2(\xi)\cos^2\theta(\xi)\sin^2\theta(\xi)=\rho^2(\xi)\sin 2\theta(\xi)\rho^2(\xi)\tan 2\theta(\xi)\cos 2\theta(\xi)=a\sin h\xi_1.$$

Тогда, применяя равенства (2.7), вычисляем лапласиан функции (2.5):

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\mathcal{E}_{x_jx_j}(x,y)+\mathcal{E}_{yy}(x,y)=&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(-\sum_{j=1}^n\xi_j^2+|\xi|^2+a\cos h\xi_1\right)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi\\&-a\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sin h\xi_1e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi\\=&a\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-yG_1(\xi)}\Big(\cos\left[x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right]\cos h\xi_1-\sin\left[x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right]\sin h\xi_1\Big)d\xi\\=&a\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[(x\cdot\xi+h\xi_1)-yG_2(\xi)\right]d\xi\\=&a\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[(x_1+h,x_2,\dots,x_n)\cdot\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi=a\mathcal{E}(x_1+h,x',y),\end{aligned}$$

где $x'=(x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, а значит, при условии (3.2) функция (2.5) удовлетворяет уравнению (3.1).

Теперь используем найденные выше мажоранты подынтегральной функции в (2.5) и ее производных для того, чтобы оценить сверху саму функцию (2.5) и ее производные:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^me^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\cdot\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi\right|&=\left|\int\limits_{B(2\sqrt{a})}|\xi|^me^{-yG_1(\xi)}d\xi+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(2\sqrt{a})}|\xi|^me^{-yG_1(\xi)}d\xi\right|\\&\le\left|\int\limits_{B(2\sqrt{a})}|\xi|^md\xi\right|+\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(2\sqrt{a})}|\xi|^me^{-y\sqrt{|\xi|^2-a}}d\xi\right|=:C(a)+C(a,y),\end{aligned}$$

где $B(r)$ — шар радиуса r с центром в начале координат. Таким образом, при выполнении условия (3.2), утверждения теорем (2.1)-(2.2), в которых $\rho(\xi)$ и $\theta(\xi)$ заданы формулами (3.3), справедливы и для уравнения (3.1).

Максимальное обобщение уравнения (3.1), достигнутое на сегодняшний день (насколько известно автору) — следующее (см. [10]):

$$\sum_{j=1}^n u_{x_jx_j}(x,y)-au(x+h,y)+u_{yy}(x,y)=0,\tag{3.7}$$

где h — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий неравенству

$$0<a|h|^2\le\frac{\pi^2}{4}.\tag{3.8}$$

Для такого уравнения функции G_1 и G_2 и, соответственно, ядро $\mathcal{E}$ по-прежнему определяются соотношениями (2.11), однако сами функции $\rho(\xi)$ и $\theta(\xi)$ вводятся следующим образом:

$$\rho(\xi) = \left(|\xi|^4 + 2a|\xi|^2 \cos h \cdot \xi + a^2\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \theta(\xi) = \frac{1}{2} \arctan \frac{a \sin h \cdot \xi}{|\xi|^2 + a \cos h \cdot \xi}. \tag{3.9}$$

Если условие (3.8) выполняется, то утверждения теорем 2.1-2.2 справедливы и для уравнения (3.7).

4. Построение ядра Пуассона

Покажем, как найти вид ядра Пуассона $\mathcal{E}$, свертками с которым являются построенные в настоящей работе решения, на примере модельного уравнения (2.1). Для этого, наряду с указанным уравнением, рассмотрим краевое условие

$$u\Big|_{y=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

и к задаче (2.1), (4.1) применим (формально) преобразование Фурье по (n-мерной) переменной x. Получим следующую начальную задачу для *обыкновенного* дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dy^2} = \left(|\xi|^2 + a\xi_1^2 e^{-ih\xi_1}\right)\widehat{u}, \quad y \in (0, +\infty), \tag{4.2}$$

$$\widehat{u}(0;\xi) = \widehat{u}_0(\xi). \tag{4.3}$$

Это — не задача Коши: порядок уравнения — два, а начальное условие только одно. Характеристическое уравнение полученного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (зависящего от n-мерного параметра ξ) имеет два корня

$$\pm\sqrt{|\xi|^2 + a\xi_1^2 e^{-ih\xi_1}} = \pm\sqrt{|\xi|^2 + a\xi_1^2 \cos h\xi_1 - ai\xi_1^2 \sin h\xi_1} = \pm\rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

где $\rho(\xi)$ и $\theta(\xi)$ определяются соотношениями (2.6).

Решаем задачу (4.2)-(4.3), подходящим образом выбираем «свободную» произвольную постоянную (она появляется за счет того, что количество начальных условий меньше порядка уравнения) и применяем (формально) к полученному решению обратное преобразование Фурье. Получаем свертку граничной функции с функцией

$$e^{-y\rho(\xi)\cos\theta(\xi)} \cos[x \cdot \xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi)],$$

т.е. в точности с подынтегральной функцией интеграла (2.5).

5. Выполнение граничного условия

Чтобы доказать, что функция (2.8) принимает граничное значение $u_0(x)$ на гиперплоскости $\{y = 0\}$ в смысле обобщенных функций, используем ту же схему, что и в [11, Замечание 2]. А именно, краевая задача понимается в смысле Гельфанда—Шилова (см. [12, §10]), решение ищется в классе обобщенных функций (n-мерной) переменной x, зависящих от вещественного параметра y, дважды дифференцируемых по этому параметру на положительной полуоси и непрерывных по нему в начале координат (см., напр., [13, §9, п. 5]). Таким образом, вне граничной гиперплоскости построенное решение является гладким (классическим), при этом краевое условие (4.1) понимается как предельное соотношение $u(\cdot, y) \to u_0$ в топологии обобщенных функций переменной x при стремящемся к нулю справа вещественном параметре y.

Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 5.1. *Если* $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и выполняется условие* (2.10), *то функция* (2.8), *где функции* $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *заданы равенствами* (2.11), *а функции* $\rho(\xi)$ *и* $\theta(\xi)$ *заданы равенствами* (2.12), *удовлетворяет задаче* (2.9),(4.1) *в смысле обобщенных функций* (*по Гельфанду-Шилову*), *бесконечно дифференцируема в полупространстве в* $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ *и вместе с каждой своей производной стремится к нулю при* $y \to +\infty$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 5.2. *Если* $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и выполняется условие* (3.8), *то функция* (2.8), *где функции* $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *заданы равенствами* (2.11), *а функции* $\rho(\xi)$ *и* $\theta(\xi)$ *заданы равенствами* (3.9), *удовлетворяет задаче* (3.7),(4.1) *в смысле обобщенных функций* (*по Гельфанду-Шилову*), *бесконечно дифференцируема в полупространстве в* $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ *и вместе с каждой своей производной стремится к нулю при* $y \to +\infty$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$.

Благодарности

Автор выражает благодарность участникам Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа — 2022» за полезные обсуждения его доклада, способствовавшие лучшему пониманию полученных результатов, их дальнейшему развитию и улучшению их изложения.

Автор глубоко признателен А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E.M. Stein, G. Weiss. *On the theory of harmonic functions of several variables. I:The theory of* H^p *spaces* // Acta Math. **103**:1-2, 25–62 (1960).
2. E.M. Stein. *On the theory of harmonic functions of several variables. II: Behavior near the boundary* // Acta Math. **106**:3-4, 137–174 (1961).
3. A.B. Muravnik. *Nonlocal problems and functional-differential equations: theoretical aspects and applications to mathematical modelling* // Math. Model. Nat. Phenom. **14**:6, 601 (2019).
4. P. Hartman, G. Stampacchia. *On some non-linear elliptic differential-functional equations* // Acta Math. **115**:1, 271–310 (1966).
5. A.L. Skubachevskii. *Elliptic functional differential equations and applications.* Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser (1997).
6. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. I* // СМФН. **26**, 3–132 (2007).
7. А.Л. Скубачевский. *Неклассические краевые задачи. II* // СМФН. **33**, 3–179 (2009).
8. А.Л. Скубачевский. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // УМН. **71**:5, 3–112 (2016).
9. V.V. Liiko, A.B. Muravnik. *Elliptic equations with arbitrarily directed translations in half-spaces* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics **43**, 64–77 (2023).
10. A.B. Muravnik. *Elliptic equations with general-kind nonlocal potentials in half-spaces* // Lobachevskii J. Math. **43**:10, 2725–2730 (2022).
11. А.Б. Муравник. *Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве* // Математ. заметки. **108**:5, 764–770 (2020).
12. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши* // УМН. **8**:6, 3–54 (1953).
13. Г.Е. Шилов. *Математический анализ. Второй специальный курс.* М.: Наука. 1965.

Андрей Борисович Муравник,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
E-mail: amuravnik@mail.ru