

УДК 517.968

ВОЗМУЩЕНИЕ ПРОСТОЙ ДИССИПАТИВНОЙ ВОЛНЫ: ОТ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ К АСИМПТОТИКЕ

Л.А. КАЛЯКИН

Аннотация. Мы рассматриваем задачу о возмущении простой (бегущей) волны на примере нелинейного уравнения в частных производных, которое моделирует динамику доменной стенки в слабом ферромагнетике. Основное внимание уделяется случаю, когда при фиксированных постоянных коэффициентах существует много точных решений в виде простой волны. Эти решения определяются из обыкновенного дифференциального уравнения с краевыми условиями на бесконечности. Уравнение зависит от скорости волны, как от параметра. Подходящие решения соответствуют фазовой траектории, которая соединяет неподвижные точки. Главная проблема состоит в том, что скорость волны не определяется однозначно по коэффициентам исходного уравнения. Для уравнения с медленно меняющимися коэффициентами строится асимптотика решения по малому параметру. В рассматриваемом случае известная асимптотическая конструкции оказывается неоднозначной из-за неопределенности скорости возмущенной волны. Для однозначной идентификации скорости предлагается дополнительное ограничение на структуру асимптотического решения. Это ограничение в форме требования стабильности переднего фронта волны извлекается из результатов численных экспериментов с исходным уравнением.

Ключевые слова: простая волна, возмущение, малый параметр, асимптотика.

Mathematics Subject Classification: 35Q60, 35L20, 35A18

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Исходные данные. В настоящей работе под простой волной понимается функция со специфической зависимостью от переменных: $\phi(x, t) = \Phi(x - vt)$. При $v = \text{const}$ функция $\Phi(s)$ от аргумента $s = x - vt$ интерпретируется, как волна, бегущая по оси x со скоростью v . Отыскание решений в такой форме дает один из способов редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Редукции на основе других инвариантных решений здесь не обсуждаются. Для приложений интерес представляют простые волны, которые на фазовой плоскости $(\Phi, \dot{\Phi})$ соответствуют траекториям, соединяющим неподвижные точки. Они связываются с описанием динамического перехода от одного равновесия к другому [1], [2]. Получаемые таким способом точные решения можно использовать в качестве приближений для анализа более сложных задач, используя теорию возмущений и асимптотики по малому параметру, как это продемонстрировано в ряде публикаций [3]–[6]. К сожалению, реализация идей, использованных в [4], [5] для параболических уравнений, наталкивается на значительные трудности в случае гиперболических уравнений [6]. Проблемы, которые возникают при построении асимптотик и подходы к их решению мы обсудим на примере уравнения магнитодинамики, выведенного в [7]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega^2 \sin \phi \cos \phi + \omega^2 \sin \phi + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

L. A. KALYAKIN, PERTURBATION OF A SIMPLE WAVE: FROM SIMULATION TO ASYMPTOTICS.

© КАЛЯКИН Л.А. 2023.

Поступила 19 марта 2023 г.

Уравнение имеет тривиальные решения — равновесия $\phi \equiv 0$ и $\phi \equiv \pi$. Для магнитодинамики интерес представляют решения с краевыми условиями на бесконечности [7], [8]:

$$\phi(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad \phi(x, t) \rightarrow \pi \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (1.2)$$

В случае постоянных коэффициентов можно выделить такие решения в виде простой волны $\phi = \Phi_0(x - vt)$. Ее отыскание сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[v^2 - c^2] \frac{d^2 \Phi_0}{ds^2} + \Omega^2 \sin \Phi_0 \cos \Phi_0 + \omega^2 \sin \Phi_0 - \alpha v \frac{d\Phi_0}{ds} = 0, \quad s = x - vt. \quad (1.3)$$

В этом уравнении присутствует параметр v — скорость волны, и решения существуют при любой скорости. Однако краевые условия приводят к ограничениям на v . Ситуация схожа со спектральной задачей. Подходящие решения соответствуют фазовым траекториям — сепаратрисам, которые соединяют равновесия $\Phi_0 \equiv 0$ и $\Phi_0 \equiv \pi$.

Если $\omega^2 < \Omega^2$, то такая сепаратриса существует при единственном значении v , определяемом из соотношения

$$\alpha \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Omega = \omega^2. \quad (1.4)$$

На фазовой плоскости $(\Phi, \dot{\Phi})$ эта сепаратриса соединяет два седла с координатами $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$. Соответствующее решение интерпретируется как доменная стенка,двигающаяся со скоростью v . При других значениях v траектория из $(0, 0)$ входит в другие (устойчивые) равновесия, так что краевые условия (1.2) не выполняются.

Если $\omega^2 > \Omega^2$, то при любой скорости $0 < v < c$ траектория из седла $(0, 0)$ входит в неподвижную точку $(\pi, 0)$, которая оказывается либо узлом, либо фокусом. То есть в этом случае существуют волны с условиями (1.2), бегущие с разными скоростями.

Хотя уравнение (1.3) не интегрируемо, но оно обладает спецификой, которая была обнаружена Звездиным в [7]. Волна со скоростью, удовлетворяющей (1.4), независимо от соотношений между ω^2 и Ω^2 выписывается через сепаратрисное решение уравнения маятника

$$\Phi_0(s) = 2 \arctan \exp(s \Lambda_0), \quad \Lambda_0 = \Omega / \sqrt{c^2 - v^2}. \quad (1.5)$$

Следует отметить, что простая волна представляет собой изолированное решение уравнения в частных производных. Проблема стабилизации к ней других решений в постановке задачи Коши исследована для параболических уравнений типа КПП [9], [10]. Для неинтегрируемых гиперболических уравнений подобные общие результаты отсутствуют.

1.2. Постановка задачи. Если коэффициенты зависят от x, t , то в общей ситуации решения в виде простой волны не существует. Для приближенного анализа задачи применяются либо численные [11], либо асимптотические методы [3]. В случае медленно меняющихся коэффициентов можно строить асимптотическое решение, похожее на бегущую волну, [3]. Именно эта задача рассматривается ниже.

Чтобы выявить суть проблемы и не затемнять изложение несущественными деталями, исходная задача рассматривается в простейшей форме. Коэффициенты $c(\tau)$, $\Omega(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $\omega(\tau)$ в уравнении (1.1) предполагаются положительными функциями, гладко зависящими от медленной переменной $\tau = \varepsilon t$. Малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ присутствует только в τ . Если коэффициенты c, Ω — постоянные, то они приводятся к единичным значениям путем масштабных преобразований. В общем случае перенормировка x, t приводит к уравнению, возмущенному малыми добавками порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Такой подход не дает никаких преимуществ при исследовании задачи и здесь не используется. В магнитодинамике коэффициент ω^2 соответствует амплитуде внешней силы, от направления которой зависит знак перед соответствующим слагаемым в (1.1). Отличия в знаке перед ω^2 не существенны ввиду возможности сдвига зависимой переменной $\phi \Rightarrow \phi + \pi$, при котором знак меняется.

Для краевой задачи дополнительно требуется замена $x \Rightarrow -x$, которая приводит к волне, бегущей в противоположном направлении.

Дифференциальное уравнение (1.1) дополняется начальным условием:

$$\phi(x, t)|_{t=0} = \Phi_0(x), \quad \partial_t \phi(x, t)|_{t=0} = -v_0 \Phi_0'(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Начальная функция берется в виде следа простой волны; то есть $\Phi_0(s)$ при $s = x - v_0 t$ удовлетворяет уравнению (1.3) с постоянными (начальными) коэффициентами и с крайними условиями (1.2). Для идентификации функций $\Phi_0(s)$, как единственного решения автономного уравнения надо фиксировать сдвиг по s , например, условием $\Phi_0(0) = \pi/2$. Ограничение на исходные параметры в начальный момент

$$\alpha^2 v_0^2 - 4(\omega^2 - \Omega^2)(c^2 - v_0^2) > 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (1.7)$$

гарантируют, что для невозмущенного уравнения (1.3) равновесие $\Phi_0 = \pi$ в случае $\omega^2 > \Omega^2$ соответствует устойчивому узлу.

Начальная функция, как решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, имеет асимптотику вблизи равновесий

$$\Phi_0(s) = \begin{cases} \exp(\lambda_-^0 s)[c_-^0 + \mathcal{O}(\exp(\lambda_-^0 s))], & s \rightarrow -\infty, \\ \pi + \exp(-\lambda_+^0 s)[c_+^0 + \mathcal{O}(\exp(-\lambda_+^0 s))], & s \rightarrow +\infty \end{cases}$$

с константами $c_{\pm}^0 \neq 0$. Показатели $\lambda_{\pm}^0 > 0$ удовлетворяют соответствующим характеристическим уравнениям:

$$(v_0^2 - c^2)(\lambda_{\pm}^0)^2 \pm \alpha v_0 \lambda_{\pm}^0 + \Omega^2 \mp \omega^2 = 0 \quad \text{при } \tau = 0.$$

Целью данной работы является построение для задачи (1.1), (1.2), (1.6) асимптотического при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения, пригодного до далеких времен на каком-нибудь промежутке $0 < t \leq \tau_0 \varepsilon^{-1}$, ($\tau_0 = \text{const} > 0$), когда деформация уравнения становится существенной. Под асимптотическим решением понимается функция $\phi_{as}(x, t; \varepsilon)$, которая при подстановке в уравнение (1.1) дает невязку, малую при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по x, t в широкой области. Это понятие будет уточнено в разделе 6. Основной целью является приближенное описание траектории (движения центра) возмущенной волны, точное положение которой определяется искомым решением из соотношения $\phi(x, t; \varepsilon) = \pi/2$.

2. ИСХОДНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

При анализе задач, связанных с приложениями, численные и аналитические методы дополняют друг друга. В работах по построению асимптотик численные расчеты часто используются для иллюстраций. Иногда сравнение численных и аналитических результатов приводится в качестве аргумента в пользу формул, полученных формально, вместо их строгого обоснования. В данной работе подобное сравнение выполняется с целью выбора асимптотического анзаца. Дело в том, что в рассматриваемой задаче возможны разные конструкции для асимптотического решения. При отсутствии теорем обоснования это ведет к неопределенности асимптотического решения и к появлению фиктивных асимптотик, известных в разных ситуациях [12].

В этом разделе приводятся результаты численных экспериментов с уравнением (1.1) при коэффициентах $c^2 = \Omega^2 = \alpha = 1$. Возмущение заложено в медленном изменении коэффициента $\omega^2(\tau) = (1 + \tau)\omega_0^2$, $\tau = \varepsilon t$ при значении малого параметра $\varepsilon = 0.03$. Начальные данные соответствуют простой волне в форме (1.5). На рисунках 1 и 2 профили волны как функции пространственной координаты x приведены в далекие моменты времени $t = 1/2\varepsilon$ для разных значений константы ω_0^2 . Пунктирная линия соответствует профилю начальной волны, сдвинутой для сравнения на подходящее расстояние.

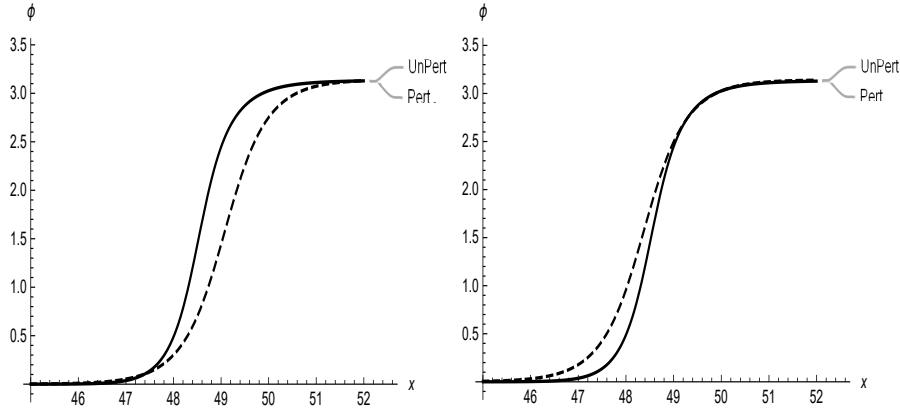


Рис. 1. Сравнение возмущенной волны (сплошная линия) с профилем начальной функции при $\Omega^2 < \omega^2 < 2\Omega^2$.

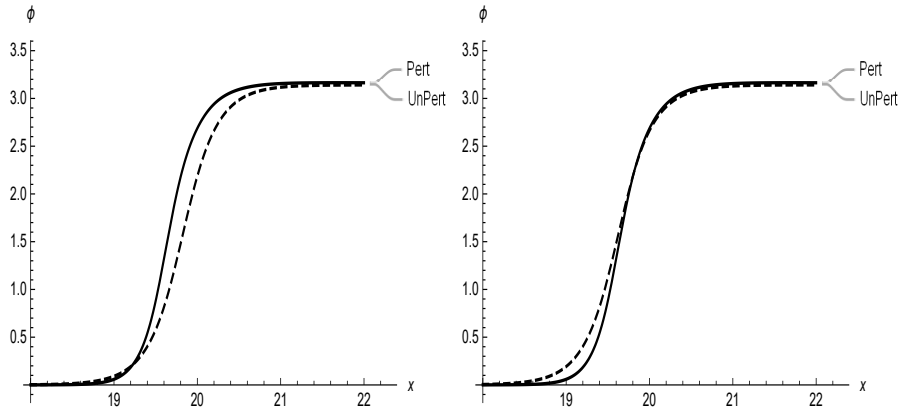


Рис. 2. Сравнение возмущенной волны (сплошная линия) с профилем начальной функции при $\omega^2 > 2\Omega^2$.

Основной результат численных экспериментов: Для возмущенной волны наблюдается нарушение со временем симметрии относительно центра. При этом структура переднего фронта сохраняется, а задний фронт деформируется. Этот эффект слабо выражен при $\omega^2 < \Omega^2$ и отчетливо наблюдается при $\omega^2 > 2\Omega^2$.

3. АНЗАТЦ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Анзатц для асимптотического решения берется в виде отрезка ряда по степеням малого параметра

$$\phi_{as}(x, t; \varepsilon) = \Phi(s; \tau) + \varepsilon \Phi_1(s; \tau) + \varepsilon^2 \Phi_2(s; \tau) + \dots \quad (3.1)$$

с одной быстрой переменной

$$s = x - \varepsilon^{-1} S(\tau) - S_1(\tau) - \varepsilon S_2(\tau) - \dots, \quad (\tau = \varepsilon t).$$

Фазовая функция $S(\tau)$, а также сдвиг фазы $S_1(\tau)$ и последующие поправки подлежат определению. Такой подход соответствует методу двух масштабов.

Подстановка анзатца (3.1) в исходное уравнение (1.1) и выделение членов порядка $\mathcal{O}(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к одному уравнению на две функции: $\Phi(s, \tau)$ и $V(\tau) = S'(\tau)$.

$$[V^2 - c^2] \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + \Omega^2 \sin \phi \cos \Phi + \omega^2 \sin \Phi - \alpha V \frac{d\Phi}{ds} = 0. \quad (3.2)$$

Дополнительно ставится краевое условие, соответствующее исходному

$$\Phi(s; \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s; \tau) \rightarrow \pi \quad \text{при } s \rightarrow +\infty, \quad (3.3)$$

и начальное условие на скорость: $V(0) = v_0$. Помимо того, для выделения единственного решения автономного уравнения (3.2) надо фиксировать сдвиг по независимой переменной s . Это можно сделать дополнительным условием:

$$\Phi(0; \tau) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

Если скорость $V = V(\tau)$ выбрать из соотношения

$$\alpha \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} \Omega = \omega^2, \quad (3.5)$$

то решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.2) с условиями (3.3), (3.4) выписывается в элементарных функциях [7]:

$$\Phi(s; \tau) = 2 \arctan \exp(s \Lambda), \quad \Lambda = \Omega / \sqrt{c^2 - V^2}. \quad (3.6)$$

Асимптотика этого решения на бесконечности описывается формулами

$$\Phi(s; \tau) = \begin{cases} \exp(\Lambda s)[2 + \mathcal{O}(\exp(\Lambda s))], & s \rightarrow -\infty, \\ \pi + \exp(-\Lambda s)[2 + \mathcal{O}(\exp(-\Lambda s))], & s \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Отметим, что при переменных коэффициентах скорость $V(\tau)$ и показатель $\Lambda = \Lambda(\tau)$ в общем случае зависят от медленного времени τ . Из анализа фазового портрета уравнения (3.2) следует, что найденная таким образом пара функций Φ, V будет единственным решением задачи (3.2), (3.3), (3.4), если $\omega^2 < \Omega^2$.

При коэффициентах $\omega^2 > \Omega^2$ единственности решения нет, и существуют другие пары Φ, V , для которых явные представления отсутствуют. Для $\Phi(s, \tau)$ можно выписать асимптотику вблизи равновесий:

$$\Phi(s; \tau) = \begin{cases} \exp(\lambda_- s)[c_- + \mathcal{O}(\exp(\lambda_- s))], & s \rightarrow -\infty, \\ \pi + \exp(-\lambda_+ s)[c_+ + \mathcal{O}(\exp(-\lambda_+ s))], & s \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad c_{\pm}(\tau) \neq 0. \quad (3.7)$$

Здесь функции медленного времени $\lambda_{\pm}(\tau) > 0$ и $c_{\pm}(\tau)$ зависят от выбора $V(\tau)$. Выражения для коэффициентов $c_{\pm}(\tau)$ в явной форме не известны, как это бывает в неинтегрируемом уравнении. Показатели $\lambda_{\pm}(\tau)$ удовлетворяют алгебраическим уравнениям

$$(V^2 - c^2)(\lambda_{\pm})^2 \pm \alpha V \lambda_{\pm} + \Omega^2 \mp \omega^2 = 0. \quad (3.8)$$

При условии (1.7) корни $\lambda_{\pm}(\tau)$ остаются действительными и свойство $c_{\pm}(\tau) \neq 0$ сохраняется в зависимости от $V(\tau)$ в некоторой окрестности начальной точки $0 < \tau < \tau_0$. Однако эволюция скорости $V(\tau)$ при $\tau > 0$ не определена и это остается главной проблемой в случае $\omega^2 > \Omega^2$.

Предлагаемый нами подход основан на наблюдении за результатами численных экспериментов: при $\omega^2 > \Omega^2$ передний фронт волны деформируется слабо. Поэтому предполагается, что показатель λ_+ в асимптотике на бесконечности остается постоянным и совпадает со значением $\lambda_+(\tau) \equiv \lambda_+^0 = \text{const}$, которое соответствует асимптотике начальной (невозмущенной) волны при скорости $V(0) = v_0$. В таком случае $V(\tau)$ при $\tau > 0$ однозначно определяется из (3.8):

$$V(\tau) = \frac{1}{2\lambda_+^0} \left[-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(c^2(\lambda_+^0)^2 + \omega^2 - \Omega^2)} \right]. \quad (3.9)$$

Справедливо и обратное утверждение: если $V(\tau)$ определено по формуле (3.9), то соответствующий корень уравнения (3.8) будет постоянным $\lambda_+(\tau) \equiv \text{const}$. Назовем это свойство *стабильностью переднего фронта волны*¹. Другие аргументы в пользу стабильности фронта обнаруживаются в формальной конструкции асимптотического решения и приведены в разделе 5.

Второе уравнение в (3.8) определяет корень $\lambda_-(\tau)$, зависимость которого от τ отражает деформацию со временем заднего фронта волны.

Заметим, что при выборе скорости $V(\tau)$ из соотношения (3.5) оба уравнения (3.8) выполняются, корни совпадают $\lambda_+ = \lambda_- = \Lambda(\tau)$ и не являются константами. В этом случае для главного члена асимптотики в форме (3.6) сохраняется симметрия с деформацией переднего и заднего фронта, что соответствует численным экспериментам при $\omega^2 < \Omega^2$. Альтернативный способ определения скорости по формуле (3.9) предназначен для случая $\omega^2 > \Omega^2$, когда симметрия не сохраняется, и начальная волна не обязана иметь симметричную форму (3.6).

После вычисления скорости фазовая функция восстанавливается через интеграл

$$S(\tau) = \int_0^\tau V(\eta) d\eta.$$

Поправка скорости $V_1(\tau) = S'_1(\tau)$ и сдвиг фазы $S_1\tau$ на этом этапе остаются неопределенными.

Поскольку функция $\Phi(s; \tau)$ как решение задачи (3.2), (3.3) быстро стабилизируется на бесконечности при $s \rightarrow \pm\infty$, то нуль фазы $x - \varepsilon^{-1}S(\varepsilon t) + S_1(\varepsilon t) = 0$ можно идентифицировать с приближенной траекторией центра возмущенной волны. Очевидно, для нахождения траектории на далеких временах, когда $\varepsilon t \approx 1$, помимо функции $S(\tau)$ требуется определение сдвига фазы $S_1\tau$, которая находится через поправку скорости $V_1(\tau) = S'_1(\tau)$. Так же, как в других подобных задачах теории возмущений, функция $V_1(\tau)$ определяется на следующем шаге из требования малости первой поправки по сравнению с главным членом в асимптотическом решении.

4. ПЕРВАЯ ПОПРАВКА

Для первой поправки асимптотического решения (3.1) получается линейное уравнение

$$[V^2 - c^2] \frac{d^2\Phi_1}{ds^2} + q(s; \tau)\Phi_1 - \alpha V \frac{d\Phi_1}{ds} = f(s; \tau) \quad (4.1)$$

с коэффициентом

$$q(s; \tau) = \frac{d}{d\phi} [\Omega^2 \sin \phi \cos \phi + \omega^2 \sin \phi]_{\phi=\Phi(s; \tau)}.$$

Правая часть f выписывается через предыдущее приближение. Эта функция выделяется из невязки, которая возникает при подстановке главного члена асимптотики $\Phi(s; \tau)$ в исходное уравнение (1.1):

$$f(s; \tau) = -2VV_1\Phi_{ss} + V'\Phi_s + 2V\Phi_{s\tau} + \alpha V_1\Phi_s - \alpha\Phi_\tau. \quad (4.2)$$

Комментарий. Постановка задачи и описанная конструкция асимптотического решения похожи на теорию возмущения солитонов, [13]–[16]. Основное отличие проистекает из неинтегрируемости исходного невозмущенного уравнения с постоянными коэффициентами (1.1). Отсутствие интегрируемости делает невозможным использование аналога разложения Фурье [17], [18] при решении задачи Коши для линеаризованного уравнения в частных

¹Для других уравнений, например, типа КПП стабильность какого-либо из фронтов не обсуждалась, хотя фактически была использована в [5], [6].

производных

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + q \phi_1 + \alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому для поправок начальная задача не рассматривается, и дело ограничивается частными решениями $\phi_1 = \Phi_1(s; \tau)$, определяемыми из обыкновенного дифференциального уравнения¹.

Явное представление для поправки Φ_1 выписывается в терминах функции $\Phi(s; \tau)$ на основе фундаментальной системы решений однородного линеаризованного уравнения, соответствующего (4.1). Одно из таких решений дается производной $\Psi_1(s; \tau) = \partial_s \Phi(s; \tau)$ и имеет экспоненциальную асимптотику на бесконечности

$$\Psi_1(s; \tau) = \exp(\mp \lambda_{\pm} s) [\mp c_{\pm} \lambda_{\pm} + \mathcal{O}(\exp(\mp \lambda_{\pm} s))], \quad s \rightarrow \pm \infty. \quad (4.3)$$

С использованием вронскиана $W(s; \tau) = \exp(-\beta(\tau) s)$, где

$$\beta(\tau) = \alpha V(\tau) / [c^2 - V(\tau)^2],$$

второе решение определяется по формуле Лиувилля

$$\Psi_2(s; \tau) = \Phi_s(s; \tau) \int_0^s \frac{\exp(-\beta \eta)}{(\Phi_\eta(\eta; \tau))^2} d\eta. \quad (4.4)$$

Экспоненциальная асимптотика легко извлекается из формулы (4.4):

$$\Psi_2(s, \tau) = \exp((\lambda_- - \beta)s) [C_- + \mathcal{O}(\exp((\lambda_- - \beta)s))], \quad s \rightarrow -\infty. \quad (4.5)$$

На другой бесконечности $s \rightarrow +\infty$ структура асимптотики зависит от разности $\lambda_+ - \beta$:

$$\Psi_2(s, \tau) = \begin{cases} \exp((\lambda_+ - \beta)s) [C_+ + \mathcal{O}(\exp((\lambda_+ - \beta)s))], & \text{если } \lambda_+ - \beta > -\lambda_+, \\ \exp(-\lambda_+ s) [C_+ + \mathcal{O}(\exp(-\lambda_+ s))], & \text{если } \lambda_+ - \beta < -\lambda_+. \end{cases} \quad (4.6)$$

Коэффициенты $C_{\pm}(\tau) \neq 0$ выражаются через β, c_{\pm} и λ_{\pm} .

Заметим, что общее решение уравнения (4.1) включает линейную комбинацию решений из базиса Ψ_1, Ψ_2 . Функция $\Psi_1(s; \tau) = \partial_s \Phi(s; \tau)$ экспоненциально стремится к нулю при $s \rightarrow \pm \infty$ с показателями λ_{\pm} . Добавка этой функции не меняет структуру первой поправки на бесконечности и может не учитываться с учетом того, что такой же эффект вносит поправка сдвига фазы $\varepsilon S_1(\tau)$, определение которой переносится на следующий шаг. Функция $\Psi_2(s, \tau)$ экспоненциально растет при $s \rightarrow -\infty$ и поэтому не включается в поправку $\Phi_1(s; \tau)$. При этом надо следить, чтобы используемое частное решение для Φ_1 не содержало подобных растущих слагаемых.

Частное решение неоднородного уравнения можно выписывать в разной форме с точностью до слагаемого с $\Psi_1(s; \tau) = \partial_s \Phi(s; \tau)$. Для дальнейших выкладок удобно представление:

$$\Phi_1(s; \tau) = \Phi_s(s; \tau) \int_0^s \frac{\exp(-\beta \eta)}{(\Phi_\eta(\eta; \tau))^2} \int_{-\infty}^{\eta} f(\zeta; \tau) \Phi_\zeta(\zeta; \tau) \exp(\beta \zeta) d\zeta d\eta. \quad (4.7)$$

Приводимый ниже анализ первой поправки $\Phi_1(s; \tau)$ направлен на идентификацию поправки скорости $V_1(\tau)$. Для этого строится асимптотика функции $\Phi_1(s; \tau)$ при $s \rightarrow \pm \infty$ с целью выделения слагаемых, убывающих медленнее $\Psi_1(s; \tau)$, из-за которых нарушается требование асимптотичности в последовательности приближений (3.1).

¹Для неинтегрируемых уравнений влияние малых невязок в начальных данных остается невыясненным во всех задачах о возмущении простых волн [3]; зачастую этот вопрос не обсуждается вовсе [16].

Лемма 4.1. *Правая часть в уравнении для первой поправки (4.1) имеет асимптотику на бесконечности*

$$f(s, \tau) = \begin{cases} c_- \exp(\lambda_- s) [s f^-(\tau) + f_0^-(\tau) + \mathcal{O}(\exp(\lambda_- s))], & s \rightarrow -\infty, \\ c_+ \exp(-\lambda_+ s) [s f^+(\tau) + f_0^+(\tau) + \mathcal{O}(\exp(-\lambda_+ s))], & s \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.8)$$

с коэффициентами при главной части

$$f^\pm(\tau) = \lambda'_\pm(\tau) [\pm\alpha + 2V(\tau)\lambda_\pm(\tau)], \quad (4.9)$$

$$f_0^\pm(\tau) = -2VV_1\lambda_\pm^2 - [V' + \alpha V_1](\pm\lambda_\pm) - [2V(\pm\lambda_\pm) + \alpha]c'_\pm/c_\pm.$$

Доказательство получается подстановкой асимптотики (3.7) в формулу (4.2). Растущие по s множители возникают при дифференцировании по τ экспонент.

Независимо от способа определения скорости $V(\tau)$ структура первой поправки в асимптотике при $s \rightarrow -\infty$ определяется функцией $\Psi_1(s; \tau) = \Phi_s(s; \tau)$ с точностью до степенного множителя s^2 :

Лемма 4.2. *Первая поправка, определяемая по формуле (4.7), имеет асимптотику на минус бесконечности*

$$\Phi_1(s, \tau) = \Psi_1(s; \tau) \frac{1}{2\lambda_-(\tau) + \beta(\tau)} \left[\frac{1}{2}s^2 f^-(\tau) + s \tilde{f}^-(\tau) + \mathcal{O}(1) \right], \quad s \rightarrow -\infty \quad (4.10)$$

с коэффициентом

$$\tilde{f}^-(\tau) = f_0^-(\tau) - \frac{f^-(\tau)}{2\lambda_-(\tau) + \beta(\tau)}.$$

Доказательство получается интегрированием соответствующих асимптотик в формуле (4.7) после подстановки (4.8).

Асимптотика на другой бесконечности $s \rightarrow +\infty$ имеет отличия от $\Psi_1(s; \tau)$ в экспоненциальных слагаемых.

Лемма 4.3. *Если $2\lambda_+(\tau) > \beta(\tau)$, то первая поправка, определяемая по формуле (4.7) имеет асимптотику на плюс бесконечности $s \rightarrow +\infty$ в виде:*

$$\Phi_1(s, \tau) = \Psi_2(s; \tau)J(\tau) + \Psi_1(s; \tau) \frac{1}{-2\lambda_+(\tau) + \beta(\tau)} \left[\frac{1}{2}s^2 f^+(\tau) + s \tilde{f}^+(\tau) + \mathcal{O}(1) \right]. \quad (4.11)$$

Коэффициент $J(\tau)$ определяется через сходящийся интеграл:

$$J(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta; \tau) \Phi_\zeta(\zeta; \tau) \exp(\beta\zeta) d\zeta; \quad \tilde{f}^+(\tau) = f_0^+(\tau) - \frac{f^+(\tau)}{-2\lambda_+(\tau) + \beta(\tau)}. \quad (4.12)$$

Доказательство. Для внутреннего интеграла в формуле (4.7) главный член асимптотики при $\eta \rightarrow +\infty$ определяется выражением $J(\tau)$ из (4.12). Заметим, что внешний интеграл в формуле (4.7) представляет собой функцию $\Psi_2(s; \tau)$. Поэтому после выделения главного члена из внутреннего интеграла получаем соотношение

$$\Phi_1(s; \tau) = \Psi_2(s; \tau)J(\tau) - \Psi_1(s; \tau) \int_0^s \frac{\exp(-\beta\eta)}{(\Phi_\eta(\eta; \tau))^2} \int_\eta^\infty f(\zeta; \tau) \Phi_\zeta(\zeta; \tau) \exp(\beta\zeta) d\zeta d\eta.$$

Асимптотика второго слагаемого при $s \rightarrow +\infty$ получается интегрированием аналогично лемме 2. \square

Замечание 4.1. *При использовании формулы (4.11) надо иметь в виду, что она не имеет отношения к асимптотике на минус бесконечности. Функция $\Psi_2(s; \tau)$, экспоненциально растущая при $s \rightarrow -\infty$, используется здесь только для краткости записи в асимптотике $s \rightarrow +\infty$.*

В случае $2\lambda_+(\tau) < \beta(\tau)$ интеграл в (4.12) расходится, поэтому асимптотику внутреннего интеграла в (4.7) надо вычислять другим способом.

Лемма 4.4. *Если $2\lambda_+(\tau) < \beta(\tau)$, то первая поправка, определяемая по формуле (4.7) имеет асимптотику бесконечности*

$$\Phi_1(s, \tau) = \Psi_1(s; \tau) \frac{1}{-2\lambda_+(\tau) + \beta(\tau)} \left[\frac{1}{2} s^2 f^+(\tau) + s \tilde{f}^+(\tau) + \mathcal{O}(1) \right], \quad s \rightarrow +\infty. \quad (4.13)$$

Доказательство состоит в выделении главных членов экспоненциально растущей асимптотики внутреннего интеграла при $\eta \rightarrow +\infty$. В силу условия $2\lambda_+(\tau) < \beta(\tau)$ функция во внешнем интеграле (4.7) экспоненциально стремится к нулю при $\eta \rightarrow +\infty$. В итоге получается требуемое соотношение (4.13).

5. СДВИГ ФАЗЫ

Приводимые ниже вычисление поправки скорости $V_1(\tau)$ и соответствующего сдвига фазы $S_1(\tau)$ не являются самоцелью. Эти вычисления больше направлены на уточнение первой поправки $\Phi_1(s; \tau)$ в асимптотическом решении и на обоснование формулы для главного члена в асимптотике скорости $V(\tau) + \varepsilon V_1(\tau)$.

Формулы для $V_1(\tau)$ получаются из требования исключения из поправки $\Phi_1(s; \tau)$ главных членов асимптотики при $s \rightarrow +\infty$.

Лемма 5.1. *Пусть $2\lambda_+(\tau) > \beta(\tau)$. Если поправка скорости $V_1(\tau)$ выбрана из соотношения*

$$a(\tau)V_1 + b(\tau) = 0, \quad (5.1)$$

где

$$a(\tau) = [V(\tau)\beta(\tau) + \alpha] \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_s^2(s; \tau) \exp(\beta(\tau)s) ds,$$

$$b(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_\tau(V(\tau)\Phi_s^2(s; \tau)) - \alpha\Phi_\tau(s; \tau)\Phi_s(s; \tau)] \exp(\beta(\tau)s) ds,$$

то первая поправка асимптотического решения, определяемая по формуле (4.7), имеет асимптотику на плюс бесконечности

$$\Phi_1(s; \tau) = \Psi_1(s; \tau) \frac{1}{-2\lambda_+(\tau) + \beta(\tau)} \left[\frac{1}{2} s^2 f^+(\tau) + s \tilde{f}^+(\tau) + \mathcal{O}(1) \right], \quad s \rightarrow +\infty \quad (5.2)$$

независимо от способа определения скорости $V(\tau)$.

Доказательство. Если выполнено условие $2\lambda_+(\tau) > \beta(\tau)$, то из сравнения формул (4.3) и (4.6) видно, что в выражении (4.11) главный член асимптотики при $s \rightarrow +\infty$ содержится в слагаемом $\Psi_2(s; \tau)J(\tau)$. Его исключение состоит в требовании обращения в нуль множителя $J(\tau) = 0$. Ввиду выражений (4.2), (4.12) такое требование эквивалентно соотношению (5.1). Поэтому при условии (5.1) соотношение (4.11) переходит в (5.2). Неопределенность в скорости $V(\tau)$ сохраняется для случая $\omega^2 > \Omega^2$. \square

Следствие 5.1. *Если функция $V(\tau)$ выбрана по формуле (3.9), а поправка скорости $V_1(\tau)$ выбрана из соотношения (5.1), то первая поправка асимптотического решения, определяемая по формуле (4.7), имеет асимптотику на плюс бесконечности*

$$\Phi_1(s; \tau) = \Psi_1(s; \tau) \frac{1}{-2\lambda_+(\tau) + \beta(\tau)} [s f_0^+(\tau) + \mathcal{O}(1)], \quad s \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Поскольку в этом случае $\lambda'_+ = 0$, то в силу (4.9) коэффициент в главном члене асимптотики (5.2) обращается в нуль: $f^+ = 0$, а коэффициент при s равен f_0^+ . Этот результат указывает на предпочтительность формулы (3.9) по сравнению с (3.5) при выборе скорости $V(\tau)$ в случае $\omega^2 > \Omega^2$. \square

Если $2\lambda_+(\tau) < \beta(\tau)$, то формула (5.1) для $V_1(\tau)$ теряет смысл, поскольку интегралы расходятся. В этом случае асимптотика $\Phi_1(s; \tau)$ при $s \rightarrow +\infty$ имеет другую структуру и исключение секулярностей приводит к другой формуле для поправки скорости.

Лемма 5.2. Пусть $2\lambda_+(\tau) < \beta(\tau)$ и функция $V(\tau)$ выбрана по формуле (3.9). Если поправка скорости $V_1(\tau)$ определена из соотношения

$$V_1 + \frac{V'}{2V\lambda_+ + \alpha} + \frac{c'_+}{c_+\lambda_+} = 0, \quad (5.3)$$

то первая поправка асимптотического решения, определяемая по формуле (4.7), имеет асимптотику на плюс бесконечности

$$\Phi_1(s, \tau) = \Psi_1(s; \tau) \cdot \mathcal{O}(1), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (5.4)$$

Доказательство. При условии $2\lambda_+(\tau) < \beta(\tau)$ асимптотика функции $\Phi_1(s, \tau)$ представлена в формуле (4.13). Главные члены определяются слагаемыми со степенными множителями s^2 и s . Исключение коэффициента $f_+(\tau)$ при s^2 с учетом выражения (4.9) приводит к требованию $\lambda'_+(\tau) = 0$, что соответствует выбору $V(\tau)$ по формуле (3.9). Исключение оставшегося при s коэффициента $f_+^0(\tau)$ с учетом выражения (4.9) приводит к уравнению на V_1 в форме (4.9). После этого соотношение (4.13) переходит в (5.4). \square

Комментарий. Соотношение (5.1) содержит как скорость V (в коэффициентах) так и поправку V_1 . Такая специфика возникает из-за наличия диссипации с коэффициентом $\alpha \neq 0$. При возмущении интегрируемых уравнений [16] подобное соотношение не содержит V_1 и используется для определения главного члена $V(\tau)$. В рассматриваемой задаче при $\omega^2 > \Omega^2$ требование (5.1) в форме одного уравнения на две функции V, V_1 отражает суть явления асимптотической некорректности, которое возникает при анализе диссипативных систем [4], [5]. Как обычно в математических задачах, для устранения неопределенности нужны дополнительные ограничения на искомое (асимптотическое) решение. Одним из возможных вариантов является требование стабильности переднего фронта волны в форме $\lambda'_+ = 0$. С одной стороны это ведет к однозначному определению V из формулы (3.9). С другой стороны соотношение $\lambda'_+ = 0$ приводит к расширению области пригодности асимптотического решения, что можно рассматривать, как другую форму дополнительного требования.

6. ОБЛАСТЬ ПРИГОДНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Конструкцию асимптотического решения в виде ряда (3.1) с коэффициентами, зависящими от одной быстрой переменной s , можно реализовать до любого порядка ε^n . Под областью пригодности асимптотического решения понимается множество точек $(s, \tau) \in D \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости, на котором ряд (3.1) является равномерно асимптотическим при $\varepsilon \rightarrow 0$, [19, стр. 26]. Из требования малости последующей поправки $\varepsilon^{n+1}\Phi_{n+1}(s; \tau)$ по сравнению с предыдущей $\varepsilon^n\Phi_n(s; \tau)$ равномерно по (s, τ) извлекаются ограничения на D . Эти ограничения зависят от конструкции коэффициентов асимптотики $\Phi_n(s; \tau), V_n(\tau)$. Ввиду гладкости функций $\Phi_n(s; \tau)$ ряд будет асимптотическим при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по s, τ в полосе $\{|s| \leq L, 0 < \tau \leq \tau_0\}$, любой ширины $L = \text{const} > 0$, не зависящей от ε . Этот простейший результат для области пригодности не зависит от способа вычисления поправок скорости, а при $\omega^2 > \Omega^2$ не зависит и от скорости $V(\tau)$.

Расширение области пригодности возможно при учете структуры коэффициентов $\Phi_n(s; \tau)$ на бесконечности. Специфика рассматриваемой задачи проявляется в том, что источником неравномерности являются степенные множители $s^k, k > 0$, которые обнаруживаются при убывающих экспонентах в асимптотике функций $\Phi_n(s; \tau)$ при $s \rightarrow \pm\infty$. Расширение области пригодности случается при исключении таких (секулярных) слагаемых и оказывается возможным при подходящем выборе $V_n(\tau)$. На этом пути уточняется

асимптотическое решение и ликвидируются неоднозначности скорости. Эти идеи похожи на те, что используются в теории нелинейных колебаний [20].

Простейшее уточнение области пригодности можно получить, если учесть асимптотику на минус бесконечности. Для первой поправки асимптотика дается формулой (4.10) и содержит слагаемые с множителями s , s^2 . В старших поправках степени s увеличиваются на 2 на каждом шаге. Требование асимптотичности последовательности поправок в форме: $\varepsilon s^2 \leq \varepsilon^{2\delta}$ (при каком-нибудь $\delta > 0$) приводит к описанию области пригодности на заднем фронте волны в виде:

$$-\varepsilon^{-1/2+\delta} < s < L, \quad \forall \delta, L > 0.$$

На переднем фронте подобное расширение получается, если в конструкции асимптотического решения подходящим образом выбирать поправки скоростей, как это сделано для первой поправки в Лемме 5.

Теорема 6.1. Пусть начальная волна имеет специальную структуру (1.5), и скорость $V(\tau)$ выбрана по формуле (3.5). Если первая поправка скорости выбрана из (5.1), а последующие поправки из похожих условий в старших членах асимптотики, то ряд (3.1) является асимптотическим решением уравнения (1.1) в полосе

$$-\varepsilon^{-1/2+\delta} < s < \varepsilon^{-1/2+\delta}, \quad \forall \delta > 0. \quad (6.1)$$

Доказательство. Если скорость $V(\tau)$ определена из формулы (3.5), то имеют место соотношения

$$\frac{\alpha V \Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \omega^2, \quad \lambda_+ = \Lambda = \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}, \quad \beta = \frac{\alpha V \Omega}{c^2 - V^2}.$$

Следовательно

$$\lambda_+ - \beta = \frac{1}{\Omega \sqrt{c^2 - V^2}} (\Omega^2 - \omega^2).$$

В случае $\Omega^2 - \omega^2 > 0$ получаем $\lambda_+ - \beta > 0 > -\lambda_+$, так что функция $\Psi_2(s; \tau)$ согласно (4.5) экспоненциально растет при $s \rightarrow +\infty$. Соответствующее слагаемое в асимптотике первой поправки (4.11) должно быть исключено. Это можно сделать требованием $J(\tau) = 0$, которое сводится к уравнению (5.1) для поправки скорости. После определения V_1 в асимптотике (4.11) остаются слагаемые с множителями s^2 , s . Они определяют границу области пригодности на переднем фронте (6.1) из требования $\varepsilon s^2 < \varepsilon^{2\delta}$.

В случае $\Omega^2 - \omega^2 < 0$ получается $\lambda_+ - \beta < 0$, и здесь возможны два варианта:

- 1) Если $-\lambda_+ < \lambda_+ - \beta$, то главный член асимптотики функции $\Psi_2(s; \tau)$ согласно (4.5) экспоненциально убывает при $s \rightarrow +\infty$. Однако он убывает медленнее функции $\Psi_1(s; \tau)(s; \tau) \approx \exp(-\lambda_+ s)$ и рассматривается, как секулярное слагаемое. Поэтому $\Psi_2(s; \tau)J(\tau)$ в формуле (4.11) следует исключить тем же требованием $J(\tau) = 0$, сводящимся к уравнению (5.1) для поправки скорости.
- 2) Если $-\lambda_+ > \lambda_+ - \beta$, то в асимптотике (4.11) присутствуют лишь слагаемые с множителями s^2 , s , которые определяют область пригодности на переднем фронте в виде (6.1). \square

Для случая $\omega^2 < \Omega^2$ скорость $V(\tau)$, $\tau > 0$ и поправки к ней определены однозначно, и в приведенной конструкции не видно других возможностей расширения области пригодности. Иная ситуация складывается при $\omega^2 > \Omega^2$, когда остается произвол в выборе $V(\tau)$, $\tau > 0$. Требование стабильности фронта волны позволяет расширить область пригодности.

Теорема 6.2. Пусть $\omega^2(\tau) > \Omega^2(\tau)$, $0 < \tau < \tau_0$, начальные параметры волны удовлетворяют условию (1.7) и скорость $V(\tau)$ выбрана по формуле (3.9). Если первая поправка скорости определена из (5.1), а последующие поправки из похожих условий в старших

членах асимптотики, то ряд (3.1) является асимптотическим решением уравнения (1.1) в полосе

$$-\varepsilon^{-1/2+\delta} < s < \varepsilon^{-1+\delta}, \quad \forall \delta > 0. \quad (6.2)$$

Если дополнительно выполнено соотношение на начальные параметры:

$$2\lambda_+^0 < \alpha V/(c^2 - V^2) \equiv \beta(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_0,$$

и первая поправка скорости определена из (5.3), а последующие поправки из похожих условий в старших членах асимптотики, то область пригодности на переднем фронте волны расширяется до бесконечности:

$$-\varepsilon^{-1/2+\delta} < s < \infty.$$

Доказательство. Выбор скорости из (3.9) приводит к постоянству показателя $\lambda_+ = \lambda_+^0 = \text{const}$. В таком случае асимптотика первой поправки (5.2) не содержит слагаемого с множителем s^2 , и она приобретает вид

$$\Phi_1(s, \tau) = \Psi_1(s; \tau) \cdot \mathcal{O}(s), \quad s \rightarrow +\infty.$$

Поэтому для выполнения условия малости первой поправки на полуоси $s > 0$ достаточно неравенства $\varepsilon s < \varepsilon^\delta$, $\delta > 0$.

При дополнительном условии, которое означает $2\lambda_+ < \beta$, асимптотика первой поправки в форме (4.13) не содержит слагаемого с множителем s^2 в силу $\lambda_+ = \lambda_+^0 = \text{const}$. Слагаемое с первой степенью s исключается выбором поправки скорости из (5.3), как показано в лемме 5.2. В итоге асимптотика первой поправки не содержит растущих множителей $\Phi_1(s, \tau) = \Psi_1(s; \tau) \cdot \mathcal{O}(1)$, $s \rightarrow +\infty$, и тем самым свойство асимптотичности выполняется независимо от $s > 0$. \square

Комментарий. Область, описываемая формулой (6.2), очевидно, не симметрична относительно центра волны $s = 0$. Специфика несимметрии обусловлена выбором скорости $V(\tau)$ из требования стабильности переднего фронта: $\lambda_+ = \text{const}$. Все формальные построения (другого) асимптотического решения в той же форме (3.1) можно выполнить, исходя из требования стабильности заднего фронта: $\lambda_- = \text{const}$. Для такого решения область пригодности описывается формулой, похожей на (6.2) со сменой границ:

$$-\varepsilon^{-1+\delta} < s < \varepsilon^{-1/2+\delta}. \quad (6.3)$$

Как видим, проблема единственности асимптотического не решается расширением области пригодности. Поскольку для обоснования асимптотики в настоящее время не видно никаких перспектив, то в данной работе выбор асимптотического решения предлагается делать из сравнения с численным экспериментом. Такой выбор приводит к требованию стабильности переднего (а не заднего) фронта волны: $\lambda_+ = \text{const}$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В данном разделе сравниваются три способа для приближенного вычисления траектории волны. В первом способе траектория (назовем ее численной) находится из соотношения $\phi(x, t) = \pi/2$ на основе численного решения исходного уравнения (1.1). Для численной реализации задача дополняется начальными условиями на отрезке большой длины $-l < x < L$, которые соответствуют специальному невозмущенному решению (1.5). Граничные условия $\phi(-l, t) = 0$, $\phi(-L, t) = \pi$, $t > 0$ на далеких краях $l, L \approx \varepsilon^{-1}$ имитируют условия на бесконечности (1.2). Получаемая таким способом траектория близка к точной. Погрешность зависит от способа аппроксимации уравнения и мало зависит от соотношений параметров ω и Ω .

Два других приближения для траектории определяются на основе асимптотических формул соотношением

$$x = \int_0^t V(\varepsilon \eta) d\eta$$

без использования сдвига фазы¹. Для скорости $V(\tau)$ используются формулы (3.5), либо (3.9). Графики соответствующих трех приближений изображены на рисунках: жирным пунктиром, жирной сплошной и слабой сплошной линиями. Слабый пунктир соответствует невозмущенной траектории.

Численные эксперименты проводились при коэффициентах $c^2 = \Omega^2 = \alpha = 1$. Возмущение заложено в медленном изменении коэффициента $\omega^2(\tau) = (1 \pm \tau/2)\omega_0^2$, $\tau = \varepsilon t$ при значении малого параметра $\varepsilon = 0.01 \div 0.03$. Направление деформации траектории при возмущении определяется знаком производной $(\omega^2)'(\tau) = \pm(\omega_0)^2/2$, рисунок 3.

Близость асимптотических траекторий к численной зависит от соотношения параметров ω и Ω . Если $\omega^2 \leq \Omega^2$, то вычисления по формуле (3.5) безальтернативны, поскольку скорость V единственна. На рисунке 4 соответствующая асимптотическая траектория практически совпадает с численной. Если $\omega^2 > \Omega^2$, то с увеличением разности $\omega^2 - \Omega^2$ более пригодной становится формула (3.9), рисунок 5; это особенно заметно при $\omega^2 > 2\Omega^2$ на рисунке 6.

Комментарий. На рассматриваемой волне со специальным начальным профилем (1.5), для которого $\lambda_+ = \Lambda(0)$, имеет место соотношение

$$2\Lambda(0) - \beta(0) = \frac{\lambda}{\Omega^2}(2\Omega^2 - \omega^2)|_{\tau=0}.$$

Поэтому при $\omega^2 > 2\Omega^2$ выполняется неравенство $2\lambda_0 < \beta(\tau)$ на некотором промежутке $0 < \tau < \tau_0$. Тогда в силу теоремы 6.2 формула (3.9), вытекающая из требования стабильности, обеспечивает максимальную область пригодности асимптотического решения на переднем фронте волны. Наличие широкой области пригодности служит указанием на близость соответствующей асимптотической траектории к точной. Тем не менее, *расширение области пригодности не может служить критерием для отбора формулы для скорости*. Например, требование стабильности заднего фронта $\lambda_- = \text{const}$ также приводит к расширению области пригодности (6.3). Это требование, примененное ко второму уравнению (3.8), дает формулу для скорости:

$$V(\tau) = \frac{1}{2\lambda_-^0} \left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(c^2(\lambda_-^0)^2 - \omega^2 - \Omega^2)} \right],$$

отличную от (3.9). Непригодность этого результата обнаруживается при сравнении с численным экспериментом. Получаемая таким способом асимптотическая траектория не близка к численной траектории ни при каких параметрах ω и Ω , как это видно на рисунке 7.

Похожая ситуация складывается и для формулы (3.5). В задаче со специальным начальным условием (1.5) оценка области пригодности (6.1) не зависит от соотношения параметров ω^2 , Ω^2 . Однако при $\omega^2 > \Omega^2$ использование формулы (3.5) приводит к большим ошибкам, что обнаруживается при сравнении с численным экспериментом. Впрочем, при начальных данных, отличных от (1.5), формула (3.5) заведомо не годится.

¹Эффективность уравнений (5.3) для вычисления поправки скорости и сдвига фазы не велика ввиду отсутствия явных выражений для решения обыкновенного дифференциального уравнения $\Phi(s; \tau)$ и для коэффициентов асимптотики $c_{\pm}(\tau)$.

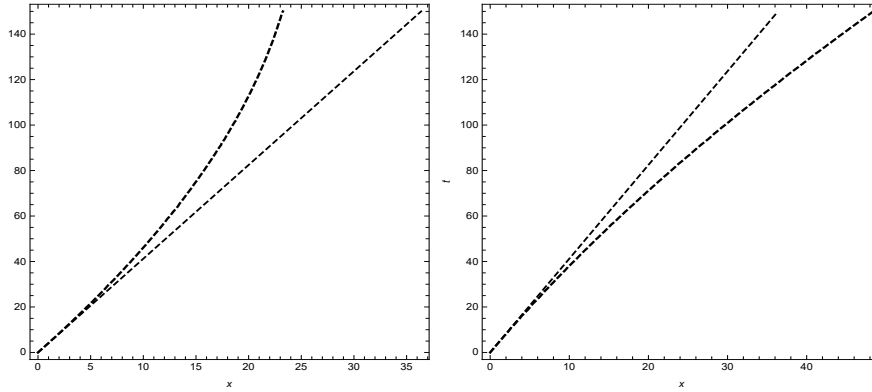


Рис. 3. Траектория возмущенной волны (жирная пунктирная линия) в сравнении с траекторией невозмущенной волны при разных направлениях деформации коэффициента $\omega^2(\tau)$.

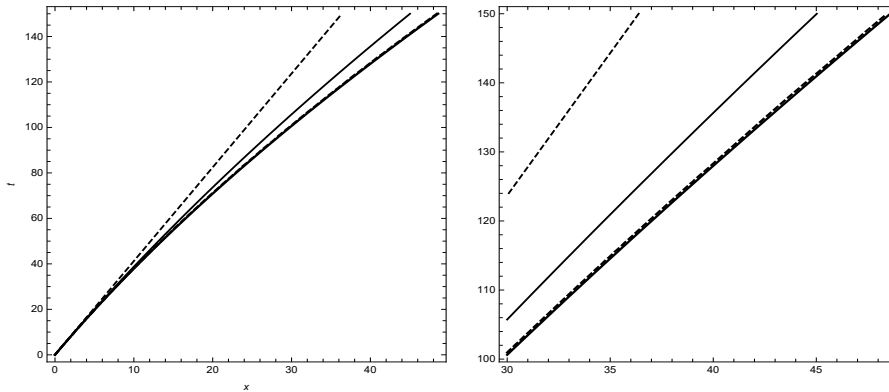


Рис. 4. Приближенные траектории возмущенной волны на разных масштабах при $\omega^2 < \Omega^2$.

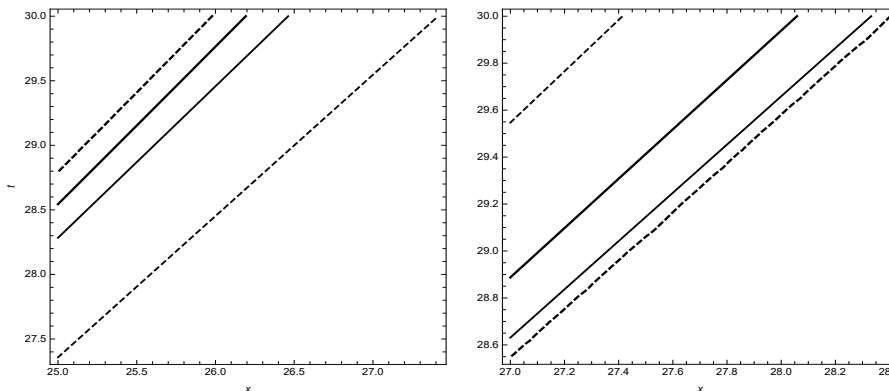


Рис. 5. Приближенные траектории возмущенной волны при разных направлениях деформации коэффициента $\omega^2(\tau)$ в случае $\Omega^2 < \omega^2 < 2\Omega^2$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При возмущении простой волны асимптотическое решение зависит от выбора главного члена в асимптотике медленно деформирующейся скорости $V(\varepsilon t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. В задаче для уравнения (1.1) предложена конструкция, которая основана на требовании стабильности переднего фронта волны. Она приводит к алгебраическому уравнению для скорости¹ и

¹В более общей задаче это будет уравнение Гамильтона-Якоби для фазовой функции [5], [6].

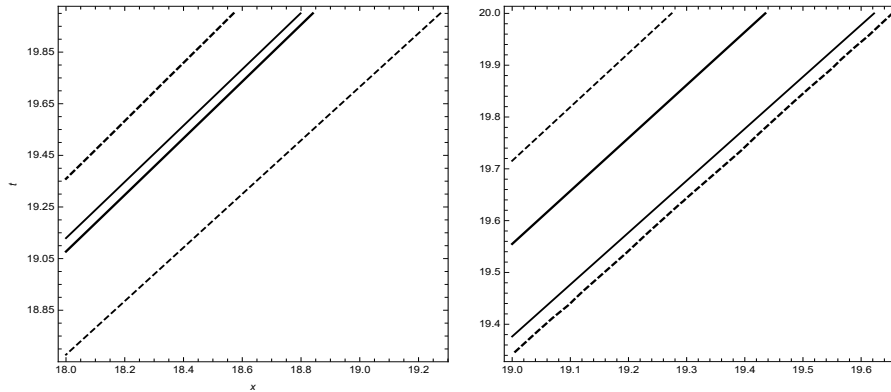


Рис. 6. Приближенные траектории возмущенной волны при разных направлениях деформации коэффициента $\omega^2(\tau)$ в случае $\omega^2 > 2\Omega^2$.

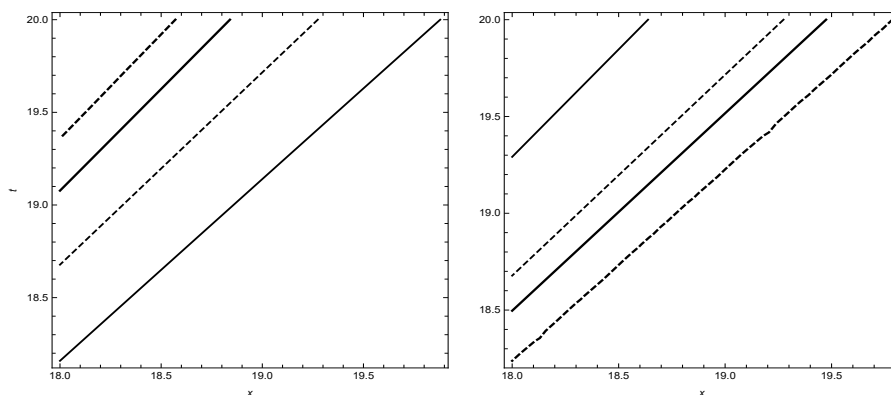


Рис. 7. Приближенные траектории возмущенной волны при разных направлениях деформации коэффициента $\omega^2(\tau)$, вычисленные из условия стабильности заднего фронта. Параметры ω^2, Ω^2 соответствуют рис.5.

к однозначному определению $V(\tau)$ по формуле (3.9). На выбор асимптотического решения со стабильным фронтом указывают численные эксперименты. Роль переднего фронта в определении скорости волны обсуждалась еще в первой работе Фишера [21], см. также [2, стр. 216, 219]. Строгое обоснование представленной здесь асимптотики с доказательством теоремы существования и с оценкой остатка отсутствует. Это относится ко всем известным результатам о возмущении простых волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов. *Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме* // Бюллетень МГУ. Матем., мех. **1**:6, 1–25 (1937).
2. Дж. Марри. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях*. М.: Мир. 1983.
3. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. *Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса*, М.: Наука. 1987.
4. В.Г. Данилов. *Глобальные формулы для решений квазилинейных параболических уравнений с малым параметром и некорректность* // Матем. заметки. **46**:1, 115–117 (1989).
5. В.Г. Данилов. *Асимптотические решения типа бегущих волн для полулинейных параболических уравнений с малым параметром* // Матем. заметки. **48**:2, 148–151 (1990).
6. Л.А. Калякин. *Возмущение простой волны в системе с диссипацией* // Матем. заметки. **112**:4, 553–566 (2022).

7. А.К. Zvezdin. *Dynamics of domain walls in weak ferromagnets* // Письма в ЖЭТФ. **29**:10, 605–610 (1979).
8. З.В. Гареева, С.М. Чен. *Сверхбыстрая динамика доменных границ в антиферромагнетиках и ферромагнетиках с температурами компенсации магнитного и углового моментов (Миниобзор)* // Письма в ЖЭТФ. **114**:4, 250–262 (2021).
9. Я.И. Канель. *О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения* // Матем. сб. **59**:101, 245–288 (1962).
10. К. Uchiyama. *The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time* // J. Math. Kyoto Univ. **18**:3, 453–508 (1978).
11. Т.Б. Шапаева, Р.Р. Муртазин, Е.Г. Екомасов. *Динамика доменной границы под действием импульсного и градиентного магнитных полей в редкоземельных ортоферритах* // Изв. РАН. Сер. физ. **78**:2, 155–158 (2014).
12. Л.А. Калякин. *Фиктивные асимптотические решения* // Уфимск. матем. журн. **6**:2, 45–66 (2014).
13. В.И. Карпман, Е.М. Маслов. *Теория возмущений для солитонов* // ЖЭТФ. **73**:8, 538–559 (1977).
14. Е.М. Маслов. *К теории возмущений для солитонов во втором приближении* // ТМФ. **42**:3, 362–370 (1980).
15. А. Ньюэлл. *Обратное преобразование рассеяния*. В кн. Солитоны / под ред. Р. Буллаф, Ф. Кордини. М.: Мир. 193–269, 1983.
16. В.П. Маслов, Г.А. Омелянов. *Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией* // УМН. **36**:3(219), 63–126 (1981).
17. Л.А. Калякин. *Возмущение солитона Кортевега – де Фриза* // ТМФ. **92**:1, 62–76 (1992).
18. Л.А. Калякин. *К задаче о первой поправке в теории возмущения солитонов* // Матем. сб. **186**:7, 51–76 (1995).
19. А.Х. Найфэ. *Методы возмущений*. М.: Мир. 1976.
20. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука. 1974.
21. R.A. Fisher. *The wave of advance of advantageous genes* // Ann. Eugenics. **7**, 355–369 (1937).

Леонид Анатольевич Калякин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: klenru@mail.ru