

УДК 517.956.32

# НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ НА СОПРЯЖЕНИЕ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ж.А. БАЛКИЗОВ

**Аннотация.** В работе исследованы две нелокальные задачи со смещением на сопряжение двух уравнений гиперболического типа второго порядка, состоящего из волнового уравнения в одной части области и вырождающегося гиперболического уравнения первого рода в другой части. В качестве нелокального граничного условия в исследуемых задачах задана линейная комбинация с переменными коэффициентами значений производной первого порядка и производных дробного (в смысле Римана-Лиувилля) порядков от искомой функции на одной из характеристик и на линии изменения типа. С использованием метода интегральных уравнений вопрос разрешимости первой задачи эквивалентным образом редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью, а вопрос разрешимости второй задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью. По первой задаче доказана равномерная сходимости резольвенты ядра получающегося интегрального уравнения Вольтерра второго рода и принадлежность его решения требуемому классу. По второй задаче найдены достаточные условия на заданные функции, обеспечивающие существование единственного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью из требуемого класса. В некоторых частных случаях решения задач выписаны в явном виде.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, вырождающееся гиперболическое уравнение первого рода, интегральное уравнение Вольтерра, интегральное уравнение Фредгольма, метод Трикоми, метод интегральных уравнений, методы теории дробного исчисления.

**Mathematics Subject Classification:** 35L53, 35L80

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На евклидовой плоскости точек  $(x, y)$  рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f, & y > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $m, \lambda$  — заданные числа, причем  $m > 0, |\lambda| \leq \frac{m}{2}$ ;  $f = f(x, y)$  — заданная функция;  $u = u(x, y)$  — искомая функция.

Уравнение (1.1) при  $y < 0$  совпадает с уравнением

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0, \quad (1.2)$$

а при  $y > 0$  уравнение (1.1) является неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} + f(x, y) = 0. \quad (1.3)$$

---

ZH.A. BALKIZOV, NONLOCAL PROBLEMS WITH SHIFT FOR MATCHING TWO SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS.

© Балкизов Ж.А. 2023.

Поступила 9 января 2023 г.

Уравнение (1.2) относится к классу вырождающихся гиперболических уравнений первого рода [1, с. 21]. Важным свойством уравнения (1.2) является тот факт, что при  $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$  для него корректна задача Коши в обычной постановке с данными на линии параболического вырождения  $y = 0$ , несмотря на то, что нарушено условие Проттера [2]. При  $m = 2$  уравнение (1.2) переходит в уравнение Бицадзе-Лыкова [3, с. 37], [4], [5, с. 234], а при  $\lambda = 0$  из уравнения (1.2) приходим к уравнению Геллерстедта, которое, как показано в монографии [6, с. 234], находит применение в задаче определения формы прорези плотины. Частным случаем уравнения (1.2) также является уравнение Трикоми, который находит свои применения в теории околосвуковой газовой динамики и аэродинамики [7, с. 38], [8, с. 280], [9, с. 373].

Уравнение (1.1) рассматривается в области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$ , где  $\Omega_1$  — это область, ограниченная характеристиками

$$\sigma_1 = AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 = CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$$

уравнения (1.2), выходящими из точки  $C = (r/2, y_C)$ ,  $y_C = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$ , проходящими через точки  $A = (0, 0)$  и  $B = (r, 0)$ , соответственно, и отрезком  $I = AB$  прямой  $y = 0$ ;  $\Omega_2$  — область, ограниченная характеристиками  $\sigma_3 = AD : x - y = 0$ ,  $\sigma_4 = BD : x + y = r$  уравнения (1.3), выходящими из точек  $A$  и  $B$ , пересекающимися в точке  $D = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$  и отрезком  $I = AB$ .

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{m-2\lambda}{2(m+2)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{m+2\lambda}{2(m+2)}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{m}{m+2}, \\ \gamma_1 &= \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon_2)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(1-\varepsilon_1)}; \\ a(x) &= \frac{\beta(x) + \gamma_1\alpha(x)}{\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x)}, \quad b(x) = \frac{1}{a(x)} = \frac{\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x)}{\beta(x) + \gamma_1\alpha(x)}, \end{aligned}$$

$$\theta_{00}(x) = \left(\frac{x}{2}, -(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}x^{1-\varepsilon}\right), \quad \theta_{01}(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right), \quad \theta_{r1}(x) = \left(\frac{r+x}{2}, \frac{r-x}{2}\right)$$

— аффиксы точек пересечения характеристик, выходящих из точки  $(x, 0)$  с характеристикой  $AC$  уравнения (1.2) и характеристиками  $AD$  и  $BD$  уравнения (1.3), соответственно;

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1} dt, \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

— есть интегралы Эйлера первого и второго родов и их связь;

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$$

— функция типа Миттаг-Леффлера [10, с. 117], а при  $\mu = 1$  совпадает с функцией Миттаг-Леффлера  $E_\rho(z, 1) = E_{1/\rho}(z)$ ;

$$D_{cx}^\alpha \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1+\alpha}}, & \alpha < 0, \\ \operatorname{sgn}^{[\alpha]+1}(x-c) \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} D_{cx}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(t), & \alpha > 0, \end{cases}$$

— оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка  $|\alpha|$ , где  $[\alpha]$  — есть целая часть числа  $\alpha$  [5, с. 28], [11].

Регулярным в области  $\Omega$  решением уравнения (1.1) назовем функцию  $u = u(x, y)$  из класса  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , при подстановке которой уравнение (1.1) обращается в тождество.

**Задача 1.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u[\theta_{01}(x)] = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (1.4)$$

$$\alpha(x)x^{\varepsilon_1}D_{0x}^{1-\varepsilon_2}u[\theta_{00}(t)] + \beta(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}u(t, 0) + \gamma(x)u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 < x < r, \quad (1.5)$$

где  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  — заданные на отрезке  $[0, r]$  функции, причем  $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]$ .

**Задача 2.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1.1) из класса  $u_x(x, 0)$ ,  $D_{0x}^{1-\varepsilon}u(t, 0) \in L_1(0, r)$ , удовлетворяющее нелокальному условию (1.5), а также граничному условию

$$u[\theta_{r1}(x)] = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (1.6)$$

где  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  — заданные на отрезке  $[0, r]$  функции, причем, как и в задаче 1,  $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]$ .

Задача Гурса для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения ранее исследована в работах [12], [13]. В работе [12] исследован критерий непрерывности решения задачи Гурса для уравнения вида (1.2), а в [13] решение задачи Гурса для вырождающегося внутри области модельного уравнения выписано в явном виде. В работе [14] рассмотрена первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. Краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений в характеристическом четырехугольнике с данными на противоположных характеристиках исследованы в работах [15]–[17]. Задачи со смещением для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений были изучены в работах [18]–[21]. Задачи со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода вида (1.2), как обобщения первой и второй задач Дарбу исследованы в работе [22]. В рамках данной работы для уравнения (1.1) изучены две нелокальные задачи 1 и 2, которые относятся к классу краевых задач со смещением Жегалова-Нахушева [23]–[26] и являются обобщениями задачи Гурса и задач с данными на противоположных характеристиках для уравнения вида (1.1). Найдены достаточные условия на заданные функции  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  и  $f(x, y)$ , при котором существует единственное регулярное в рассматриваемой области решение задач 1 и 2. В частном случае, когда отношение  $a(x) = \frac{\beta(x) + \gamma_1\alpha(x)}{\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x)} = a = const$  решения задач 1 и 2 выписаны в явном виде.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ 1

Справедлива следующая

**Теорема 2.1.** Пусть заданные функции  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $f(x, y)$  таковы, что

$$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in C^1[0, r] \cap C^2(0, r), \quad (2.1)$$

$$\psi_1(x), \psi_2(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r), \quad (2.2)$$

$$f(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}_2), \quad (2.3)$$

и выполнено одно из условий: либо

$$\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]; \quad (2.4)$$

либо же

$$\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x) \equiv 0, \quad \beta(x) + \gamma_1\alpha(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]. \quad (2.5)$$

Тогда существует единственное регулярное в области  $\Omega$  решение задачи 1.

*Доказательство.* Доказательство теоремы 2.1 проводится с использованием метода интегральных уравнений. Введем обозначения

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r \quad \text{и} \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \quad (2.6)$$

Найдем фундаментальные соотношения между искомыми функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенные из соответствующих частей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  области  $\Omega$  на линию  $y = 0$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $|\lambda| < \frac{m}{2}$ . Регулярное в области  $\Omega_1$  решение задачи (2.6) для уравнения (1.2) в этом случае выписывается по формуле [27, с. 14]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon_1) \Gamma(\varepsilon_2)} \int_0^1 \tau \left[ x + (1 - \varepsilon)(-y)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (2t - 1) \right] t^{\varepsilon_2 - 1} (1 - t)^{\varepsilon_1 - 1} dt \\ & + \frac{\Gamma(2 - \varepsilon) y}{\Gamma(1 - \varepsilon_1) \Gamma(1 - \varepsilon_2)} \int_0^1 \nu \left[ x + (1 - \varepsilon)(-y)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (2t - 1) \right] t^{-\varepsilon_1} (1 - t)^{-\varepsilon_2} dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r)$ ,  $\nu(x) \in C^1(0, r) \cap L_1(0, r)$ .

Из (2.7) находим

$$\begin{aligned} u[\theta_{00}(x)] = & u\left(\frac{x}{2}, -(2 - 2\varepsilon)^{\varepsilon - 1} x^{1 - \varepsilon}\right) = \frac{1}{B(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \int_0^1 \tau(xt) t^{\varepsilon_2 - 1} (1 - t)^{\varepsilon_1 - 1} dt \\ & - \frac{(2 - 2\varepsilon)^{\varepsilon - 1} x^{1 - \varepsilon}}{B(1 - \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2)} \int_0^1 \nu(xt) t^{-\varepsilon_1} (1 - t)^{-\varepsilon_2} dt. \end{aligned}$$

Вводя новую переменную интегрирования  $z = xt$ , последнее равенство перепишется в виде

$$\begin{aligned} u[\theta_{00}(x)] = & \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon_1) \Gamma(\varepsilon_2)} x^{1 - \varepsilon} \int_0^x \frac{\tau(z) z^{\varepsilon_2 - 1}}{(x - z)^{1 - \varepsilon_1}} dz \\ & - \frac{\Gamma(2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1) \Gamma(1 - \varepsilon_2)} (2 - 2\varepsilon)^{\varepsilon - 1} \int_0^x \frac{z^{-\varepsilon_1} \nu(z)}{(x - z)^{\varepsilon_2}} dz. \end{aligned}$$

В терминах оператора  $D_{cx}^\alpha \varphi(t)$  дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования последнее равенство перепишется в виде:

$$\begin{aligned} u[\theta_{00}(x)] = & \frac{\Gamma(\varepsilon) x^{1 - \varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon_2)} D_{0x}^{-\varepsilon_1} [t^{\varepsilon_2 - 1} \tau(t)] \\ & - \frac{(2 - 2\varepsilon)^{\varepsilon - 1} \Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon_1)} D_{0x}^{\varepsilon_2 - 1} [t^{-\varepsilon_1} \nu(t)]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Воспользовавшись следующим законом композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования [6, с. 18], [11]

$$D_{0x}^\alpha t^{\alpha + \beta} D_{0t}^\beta g(s) = x^\beta D_{0x}^{\alpha + \beta} t^\alpha g(t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \beta < 0,$$

из (2.8) находим

$$x^{\varepsilon_1} D_{0x}^{1 - \varepsilon_2} u[\theta_{00}(t)] = \gamma_1 D_{0x}^{1 - \varepsilon} \tau(t) - \gamma_2 \nu(x). \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) условие (1.5) перепишется в следующем виде

$$[\gamma(x) - \gamma_2 \alpha(x)] \nu(x) + [\beta(x) + \gamma_1 \alpha(x)] D_{0x}^{1 - \varepsilon} \tau(t) = \psi_2(x). \quad (2.10)$$

Полученное соотношение (2.10) и есть основное фундаментальное соотношение между искомыми функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенное из области  $\Omega_1$  на прямую  $y = 0$ .

Далее найдем фундаментальное соотношение между функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенное из области  $\Omega_1$  на прямую  $y = 0$ . Для этого воспользуемся представлением регулярного в области  $\Omega_1$  решения задачи (2.6) для уравнения (1.3), которое выписывается с помощью формулы Даламбера [28, с. 59]:

$$u(x, y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+t}^{x+y-t} f(s, t) ds dt, \quad (2.11)$$

где  $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r)$ ,  $\nu(x) \in C^1(0, r) \cap L_1(0, r)$ .

Удовлетворяя (2.11) условию (1.4), будем иметь

$$u[\theta_{01}(x)] = u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) = \frac{\tau(x) + \tau(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \nu(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x}{2}} \int_t^{x-t} f(s, t) ds dt = \psi_1(x).$$

Путем дифференцирования из последнего равенства приходим к соотношению

$$\nu(x) = 2\psi_1'(x) - \tau'(x) - \int_0^{\frac{x}{2}} f(x-t, t) dt. \quad (2.12)$$

Соотношение (2.12) есть фундаментальное соотношение между функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенное из области  $\Omega_2$  на прямую  $y = 0$ .

Исключая из (2.10) и (2.12) искомую функцию  $\nu(x)$ , с учетом условия согласования  $\tau(0) = \psi_1(0)$  и условия (2.4) теоремы 2.1, относительно функции  $\tau(x)$  приходим к следующей задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, содержащего производную дробного порядка в младших членах

$$\tau'(x) - a(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} \tau(t) = 2\psi_1'(x) - \frac{\psi_2(x)}{\gamma(x) - \gamma_2 \alpha(x)} - \int_0^{\frac{x}{2}} f(x-t, t) dt, \quad 0 < x < r, \quad (2.13)$$

$$\tau(0) = \psi_1(0). \quad (2.14)$$

Путем интегрирования уравнения (2.13) по  $x$  в пределах от 0 до  $x$ , приходим к соответствующему задаче (2.13)–(2.14) интегральному уравнению вида

$$\tau(x) - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x K(x, t) \tau(t) dt = F_1(x), \quad (2.15)$$

где

$$K(x, t) = \frac{a(x)}{(x-t)^{1-\varepsilon}} - \int_t^x \frac{a'(s)}{(s-t)^{1-\varepsilon}} ds,$$

$$F_1(x) = 2\psi_1(x) - \psi_1(0) - \int_0^x \frac{\psi_2(t)}{\gamma(t) - \gamma_2 \alpha(t)} dt - \int_0^x \int_0^{\frac{t}{2}} f(t-s, s) ds dt.$$

Из (2.1), (2.2), (2.3) следует, что уравнение (2.15) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром  $K(x, t) \in L_1([0, r] \times [0, r])$ , имеющим слабую особенность при  $x = t$  и правой частью  $F_1(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r)$ . Согласно общей теории интегральных

уравнений Вольтерра, решение уравнения (2.15) существует, единственно и выписывается по формуле

$$\tau(x) = F_1(x) + \int_0^x R(x, t)F_1(t)dt, \quad (2.16)$$

где  $R(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x, t)}{\Gamma_{n+1}(\varepsilon)}$  — резольвента ядра  $K(x, t)$ ;

$$K_0(x, t) = K(x, t), \quad K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, s)K_n(s, t)ds.$$

Покажем, что резольвента  $R(x, t)$  так же как и ядро  $K(x, t)$  уравнения (2.15) принадлежит классу  $R(x, t) \in L_1([0, r] \times [0, r])$  и имеет слабую особенность при  $x = t$ , а решение  $\tau(x)$  этого уравнения также как и его правая часть  $F_1(x)$  будет принадлежать классу  $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r)$ .

Действительно, с учетом того, что  $a(x) \in C^1[0, r] \cap C^2(0, r)$ , найдем оценку итерированных ядер  $\frac{K_n(x, t)}{\Gamma_{n+1}(\varepsilon)}$ . Пусть  $|a(x)| \leq M_1$ , а  $|a'(x)| \leq M_2 \forall x \in [0, r]$ . Тогда для первого итерированного ядра  $\frac{K_0(x, t)}{\Gamma(\varepsilon)}$  имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}|K_0(x, t)| &= \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}|K(x, t)| = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \left| \frac{a(x)}{(x-t)^{1-\varepsilon}} - \int_t^x \frac{a'(s)}{(s-t)^{1-\varepsilon}} ds \right| \\ &\leq \frac{M_1(x-t)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)} + \frac{M_2(x-t)^\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon+1)}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma^2(\varepsilon)}|K_1(x, t)| &= \frac{1}{\Gamma^2(\varepsilon)} \left| \int_t^x K(x, s)K_0(s, t)ds \right| \leq \int_t^x \left[ \frac{M_1}{\Gamma(\varepsilon)(x-s)^{1-\varepsilon}} + \frac{M_2(x-s)^\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon+1)} \right] \\ &\cdot \left[ \frac{M_1}{\Gamma(\varepsilon)(s-t)^{1-\varepsilon}} + \frac{M_2(s-t)^\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon+1)} \right] ds = \frac{M_1^2}{\Gamma^2(\varepsilon)}(x-t)^{2\varepsilon-1} \int_0^1 y^{\varepsilon-1}(1-y)^{\varepsilon-1} dy \\ &+ \frac{M_1M_2}{\varepsilon\Gamma^2(\varepsilon)}(x-t)^{2\varepsilon} \int_0^1 y^\varepsilon(1-y)^{\varepsilon-1} dy + \frac{M_1M_2}{\varepsilon\Gamma^2(\varepsilon)}(x-t)^{2\varepsilon} \int_0^1 y^{\varepsilon-1}(1-y)^\varepsilon dy \\ &+ \frac{M_2^2}{\Gamma^2(\varepsilon+1)}(x-t)^{2\varepsilon+1} \int_0^1 y^\varepsilon(1-y)^\varepsilon dy = \frac{M_1^2(x-t)^{2\varepsilon-1}}{\Gamma(2\varepsilon)} \\ &+ \frac{2M_1M_2(x-t)^{2\varepsilon}}{\Gamma(2\varepsilon+1)} + \frac{M_2^2(x-t)^{2\varepsilon+1}}{\Gamma(2\varepsilon+2)}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma^3(\varepsilon)}|K_2(x, t)| &= \frac{1}{\Gamma^3(\varepsilon)} \left| \int_t^x K(x, s)K_1(s, t)ds \right| \leq \frac{M_1^3(x-t)^{3\varepsilon-1}}{\Gamma(3\varepsilon)} + \frac{3M_1^2M_2(x-t)^{3\varepsilon}}{\Gamma(3\varepsilon+1)} \\ &+ \frac{3M_1M_2^2(x-t)^{3\varepsilon+1}}{\Gamma(3\varepsilon+2)} + \frac{M_2^3(x-t)^{3\varepsilon+2}}{\Gamma(3\varepsilon+3)}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\frac{1}{\Gamma^n(\varepsilon)} |K_{n-1}(x, t)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k M_1^{n-k} M_2^k (x-t)^{n\varepsilon+k-1}}{\Gamma(n\varepsilon+k)}, \quad (2.17)$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  — число сочетаний из  $n$  по  $k$ .

Замечая, что  $\Gamma(n\varepsilon+k) > \Gamma(n\varepsilon)$  из (2.17) приходим к оценке

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma^n(\varepsilon)} |K_{n-1}(x, t)| &< \frac{1}{\Gamma(n\varepsilon)} \sum_{k=0}^n C_n^k M_1^{n-k} M_2^k (x-t)^{n\varepsilon+k-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n\varepsilon)} (M_1 + M_2(x-t))^n (x-t)^{n\varepsilon-1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для достаточно больших  $n$  показатель  $n\varepsilon - 1$  при  $(x-t)$  в формуле (2.18) будет положительным. И при этом разность  $(x-t)$  можно будет заменить большей числовой величиной  $r$ . Таким образом, для резольвенты  $R(x, t)$  ядра  $K(x, t)$  имеем оценку:

$$|R(x, t)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{n-1}(x, t)}{\Gamma^n(\varepsilon)} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M_1 + M_2 r)^n r^{n\varepsilon-1}}{\Gamma(n\varepsilon)}. \quad (2.19)$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга для гамма-функции

$$\Gamma(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} n^n e^{-n+\frac{\eta}{12n}}, \quad 0 < \eta < 1,$$

и признаком Коши сходимости числовых рядов, легко убедиться в том что ряд, стоящий справа в неравенстве (2.19) сходится. Таким образом, ряд для резольвенты  $R(x, t)$  ядра  $K(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно, откуда можно заключить непрерывность резольвенты ядра при любом  $0 < \varepsilon < 1$  и любом  $x \neq t \in [0, r]$ , обладая слабой особенностью при  $x = t$ .

Из представления (2.18) и оценки (2.19) при непрерывной правой части  $F_1(x) \in C[0, r]$  следует следующая оценка решения

$$|\tau(x)| = \left| F_1(x) + \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x R(x, t) F_1(t) dt \right| < M_3 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M_1 + M_2 r)^n r^{n\varepsilon}}{\Gamma(n\varepsilon)} \right], \quad (2.20)$$

где  $M_3 = \max_{x \in [0, r]} |F_1(x)|$ .

Из сходимости мажорирующего числового ряда (правой части неравенства (2.20)) следует абсолютная и равномерная сходимость решения по признаку Вейерштрасса. Откуда заключаем непрерывность предельной функции  $\tau(x) \in C[0, r]$ .

Пусть теперь  $F_1(x) \in C^2(0, r)$ . В этом случае путем двойного интегрирования по частям интеграла в правой части представления (2.16) легко убеждаемся в том, что и  $\tau(x) \in C^2(0, r)$ , то есть решение  $\tau(x)$  интегрального уравнения (2.15) также как и его правая часть  $F_1(x)$  будет принадлежать классу  $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r)$ .

При  $a(x) = a = const$ , решение уравнения (2.15) выписывается в явном виде

$$\tau(x) = F_1(x) + a \int_0^x (x-t)^{\varepsilon-1} E_{1/\varepsilon}[a(x-t)^\varepsilon; \varepsilon] F_1(t) dt. \quad (2.21)$$

Если же выполнено условие (2.5), то из системы (2.10) и (2.12) сразу находим:

$$\begin{aligned}\tau(x) &= D_{0x}^{\varepsilon-1} \left[ \frac{\psi_2(t)}{[\beta(t) + \gamma_1\alpha(t)]} \right], \\ \nu(x) &= -D_{0x}^{\varepsilon} \left[ \frac{\psi_2(t)}{[\beta(t) + \gamma_1\alpha(t)]} \right] + 2\psi_1'(x) - \int_0^{\frac{x}{2}} f(x-t, t) dt.\end{aligned}$$

При  $\lambda = \pm \frac{m}{2}$  искомая функция  $\tau(x)$  вновь находится по одной из формул (2.16) или (2.21), но  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{m}{m+2}$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = \frac{(2-2\varepsilon)^\varepsilon}{2}$  при  $\lambda = -\frac{m}{2}$  и  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{m}{m+2}$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = (2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}\Gamma(2-\varepsilon)$  при  $\lambda = \frac{m}{2}$ .

После того, как функция  $\tau(x)$  найдена, вторая искомая функция  $\nu(x)$  находится по одной из формул (2.10) или (2.12). Тогда регулярное в области  $\Omega_1$  решение исследуемой задачи 1 выписывается по формуле (2.7), или же по одной из следующих формул [27, с. 15]:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{2y}{m+2} \int_0^1 \nu \left[ x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] (1-t)^{-\frac{m}{m+2}} dt \\ &\quad + \tau \left( x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \right), \quad \lambda = -\frac{m}{2};\end{aligned}\tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{2y}{m+2} \int_0^1 \nu \left[ x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] (1-t)^{-\frac{m}{m+2}} dt \\ &\quad + \tau \left( x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \right), \quad \lambda = \frac{m}{2},\end{aligned}\tag{2.23}$$

а в области  $\Omega_2$  решение задачи Коши для уравнения (1.3) находится по формуле (2.11). Теорема 2.1 доказана.  $\square$

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ 2

Перейдем к исследованию задачи 2. Удовлетворяя (2.11) условию (1.6) будем иметь

$$u[\theta_{r1}(x)] = u\left(\frac{r+x}{2}, \frac{r-x}{2}\right) = \frac{\tau(x) + \tau(r)}{2} + \frac{1}{2} \int_x^r \nu(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{r-x}{2}} \int_{x+t}^{r-t} f(s, t) ds dt = \psi_1(x).$$

Путем дифференцирования из последнего равенства приходим к соотношению

$$\nu(x) = \tau'(x) - 2\psi_1'(x) - \int_0^{\frac{r-x}{2}} f(x+t, t) dt.\tag{3.1}$$

Соотношение (3.1) есть фундаментальное соотношение между функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенное из области  $\Omega_2$  на прямую  $y = 0$  в случае задачи 2.

Таким образом, относительно искомых функций  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  приходим к системе уравнений, выраженных соотношениями (2.10) и (3.1). Исключая из (2.10) и (3.1) функцию  $\nu(x)$ , с учетом условия согласования  $\tau(r) = \psi_1(r)$ , относительно  $\tau(x)$ , как и при исследовании задачи 1, приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения



первого порядка, содержащего производную дробного порядка в младших членах

$$\tau'(x) + a(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} \tau(t) = 2\psi_1'(x) + \frac{\psi_2(x)}{\gamma(x) - \gamma_2 \alpha(x)} + \int_0^{\frac{r-x}{2}} f(x+t, t) dt, \quad 0 < x < r, \quad (3.2)$$

$$\tau(r) = \psi_1(r). \quad (3.3)$$

Интегрируя уравнение (3.2) по  $x$  от 0 до  $x$ , с учетом условия (3.3), приходим к соответствующему задаче (3.2), (3.3) интегральному уравнению вида

$$\tau(x) - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x L(x, t) \tau(t) dt = F_2(x), \quad (3.4)$$

где

$$L(x, t) = \begin{cases} K(r, t), & 0 \leq x < t, \\ K(r, t) - K(x, t), & t < x \leq r, \end{cases}$$

$$F_2(x) = 2\psi_1(x) - \psi_1(r) - \int_x^r \frac{\psi_2(t)}{\gamma(t) - \gamma_2 \alpha(t)} dt - \int_x^r \int_0^{\frac{r-t}{2}} f(t+s, s) ds dt.$$

Если заданные функции  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $f(x, y)$  обладают свойствами (2.1), (2.2), (2.3), перечисленными в *теореме 2.1*, то уравнение (3.4) будет являться интегральным уравнением Фредгольма второго рода с ядром  $L(x, t) \in L_1([0, r] \times [0, r])$  и правой частью  $F_2(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r)$ .

Найдем достаточные условия на заданные функции, обеспечивающие однозначную разрешимость уравнения (3.4). С этой целью рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче 2, положив  $\psi_1(x) = \psi_2(x) \equiv 0 \forall x \in [0, r]$ ,  $f(x, y) \equiv 0 \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_2$ . При этом задача (3.2), (3.3) переходит в соответствующую однородную задачу

$$b(x)\tau'(x) + D_{0x}^{1-\varepsilon} \tau(t) = 0, \quad 0 < x < r, \quad (3.5)$$

$$\tau(r) = 0. \quad (3.6)$$

Умножая уравнение (3.5) на функцию  $\tau(x)$ , и интегрируя полученное равенство по  $x$  от 0 до  $r$ , с учетом условия (3.6), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^r b(x)\tau(x)\tau'(x) dx + \int_0^r \tau(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} \tau(t) dx \\ &= -\frac{b(0)\tau^2(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^r b'(x)\tau^2(x) dx + \int_0^r \tau(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} \tau(t) dx = 0. \end{aligned}$$

Известно [5, с. 46], что  $\int_0^r \tau(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} \tau(t) dx \geq 0$ , причем  $\int_0^r \tau(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} \tau(t) dx = 0$  тогда и только тогда, когда  $\tau(x) \equiv 0 \forall x \in [0, r]$ . Значит, если функция  $b(x)$  является убывающей отрицательной функцией, то последнее равенство может иметь место в том и только в том случае, когда  $\tau(x) \equiv 0 \forall x \in [0, r]$ . Стало быть, при перечисленных условиях на заданные функции, уравнение (3.4) будет обладать единственным решением из класса  $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r)$ .

Таким образом доказана следующая теорема 3.1.

**Теорема 3.1.** Пусть заданные функции  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $f(x, y)$  обладают перечисленными в теореме 2.1 свойствами (2.1), (2.2), (2.3) и пусть

$$\begin{aligned} [\beta(x) + \gamma_1\alpha(x)] [\gamma(x) - \gamma_2\alpha(x)] &\neq 0 \quad \forall x \in [0, r], \\ b'(x) \leq 0, \quad b(0) < 0 &\quad \forall x \in [0, r]. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное регулярное в области  $\Omega$  решение задачи 2.

В случае, когда  $a(x) = a = \text{const}$  решение задачи (3.2), (3.3) выписывается в явном виде по формуле:

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{E_\varepsilon[-ax^\varepsilon]}{E_\varepsilon[-ar^\varepsilon]} [\psi_1(r) + F_2(x) - F_2(r)] \\ & + a \int_0^r (r-t)^{\varepsilon-1} E_{1/\varepsilon}[-a(r-t)^\varepsilon; \varepsilon] F_2(t) dt \\ & - a \int_0^x (x-t)^{\varepsilon-1} E_{1/\varepsilon}[-a(x-t)^\varepsilon; \varepsilon] F_2(t) dt \Big], \end{aligned}$$

причем

$$E_\varepsilon[-ar^\varepsilon] \neq 0. \quad (3.7)$$

Как следует из теоремы 3.1, неравенство (3.7) будет выполнено, например, для всех  $a < 0$ .

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Хотелось бы выразить благодарность директору ИПМА КБНЦ РАН Псху Арсену Владимировичу и заведующему отделом УСТ ИПМА КБНЦ РАН Атгаеву Анатолию Хусеевичу за ценные замечания и советы при подготовке данной статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.М. Смирнов. *Уравнения смешанного типа*. М.: Наука. 1970. 296 с.
2. М.Н. Protter. *The Cauchy problem for a hyperbolic second-order equation with data on the parabolic line* // *Canad. J. Math.* **6**:4, 542–553 (1954).
3. А.В. Бицадзе. *Уравнения смешанного типа*. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 164 с.
4. А.В. Лыков. *Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена* // *Инженерно-физический журнал*. **9**:3, 287–304 (1955).
5. А.М. Нахушев. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк. 1995. 301 с.
6. А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит. 2003. 272 с.
7. Л. Берс. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики*. М.: Иностран. лит-ра. 1961. 208 с.
8. Ф.И. Франкль. *Избранные труды по газовой динамике*. М.: Наука. 1973. 771 с.
9. Ф. Трикоми. *Лекции по уравнениям в частных производных*. М.: Иностранная литература. 1957. 444 с.
10. М.М. Джрбашян. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости*. М.: Наука. 1966. 672 с.
11. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
12. Т.Ш. Кальменов. *Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения* // *Дифференц. уравн.* **7**:1, 178–181 (1971).
13. Ж.А. Балкизов. *Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения* // *Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки*. 1(189), 5–10 (2016).

14. Ж.А. Балкизов. *Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения* // Владикавказский матем. журнал. **18**:2, 19–30 (2016).
15. С.К. Кумыкова, Ф.Б. Нахушева. *Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области* // Дифференц. уравн. **14**:1, 50–65 (1978).
16. Ж.А. Балкизов. *Краевые задачи с данными на противоположных характеристиках для смешанно-гиперболического уравнения второго порядка* // Доклады АМАН. **20**:3, 6–13 (2020).
17. Ж.А. Балкизов. *Краевые задачи для смешанно-гиперболического уравнения* // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. **36**:1, 7–14 (2021).
18. М.С. Салахитдинов, М. Мирсабуров. *О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области* // Дифференц. уравн. **17**:1, 129–136 (1981).
19. М.С. Салахитдинов, М. Мирсабуров. *О двух нелокальных краевых задачах для вырождающегося гиперболического уравнения* // Дифференц. уравн. **17**:1, 116–127 (1982).
20. С.В. Ефимова, О.А. Репин. *Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса* // Дифференц. уравн. **40**:1, 116–127 (2004).
21. О.А. Репин. *О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-матем. науки. **10**:43, 10–14 (2006).
22. Ж.А. Балкизов. *Задача со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-матем. науки. **25**:1, 21–34 (2021).
23. В.И. Жегалов. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках с разрывами на переходной линии* // Ученые записки Казанского гос. университета им. В.И. Ленина. **122**:3, 3–16 (1962).
24. А.М. Нахушев. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравн. **5**:1, 44–59 (1969).
25. А.М. Нахушев. *Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения* // Доклады АН СССР. **187**:4, 736–739 (1969).
26. А.М. Нахушев. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука. 2006. 287 с.
27. М.М. Смирнов. *Вырождающиеся гиперболические уравнения*. Минск: Вышэйшая школа. 1977. 160 с.
28. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики*. М.: Наука. 1977. 736 с.

Жираслан Анатольевич Балкизов,  
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,  
ул. Шортанова, 89-а,  
360005, г. Нальчик, Россия  
E-mail: Giraslan@yandex.ru