ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 2 (2023). С. 65-73.

УДК 517.53

О ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Е.Г. РОДИКОВА

Аннотация. Вопрос об описании линейных непрерывных функционалов на пространствах аналитических функций изучается с середины 20 вв. Исторически первой была найдена структура линейных непрерывных функционалов пространств Харди H^p при $p \geq 1$ в работе А. Тейлора в 1951 г. В пространствах $H^p\,(0 < p < 1)$ эта задача была решена П. Дюреном, Б. Ромбергом и А. Шилдсом в 1969 г. Отметим, что при доказательстве использовалась оценка коэффициентных мультипликаторов в этих пространствах. В статье, развивая метод, предложенный в работе П. Дюрена и др., получено описание линейных непрерывных функционалов плоских классов Привалова и классов типа Неванлинны-Джрбашяна. Рассматриваемые классы обобщают хорошо известные в научной литературе плоские классы Неванлинны. Идея доказательства основного результата заключается в следующем: вопрос о нахождении общего вида линейного непрерывного функционала сводится к отысканию вида произвольного коэффициентного мультипликатора, действующего из исследуемого пространства в пространство ограниченных аналитических функций. Последняя задача в упрощенном виде может быть сформулирована так: на какие множители нужно домножить тейлоровские коэффициенты функций из исследуемого класса, чтобы они стали тейлоровскими коэффициентами некоторой ограниченной аналитической функции.

Ключевые слова: пространства Привалова, классы Неванлинны-Джрбашяна, линейные непрерывные функционалы, коэффициентные мультипликаторы.

Mathematics Subject Classification: Primary 30H99, Secondary 32C15, 46E10.

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D, для произвольной функции $f \in H(D)$ обозначим $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $0 < r < 1$, через $T(r,f)$ обозначим характеристику Р. Неванлинны функции f (см. [2]):

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad 0 < r < 1.$$

При всех значениях параметра $0 < p < +\infty$ введем в рассмотрение классы Харди в круге:

$$H^p := \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi < +\infty \right\},$$

H^∞ — класс ограниченных аналитических в D функций.

E.G. Rodikova, On continuous linear functionals in some spaces of functions analytic in a disk.

Поступила 18 июля 2022 г.

При всех $0 < q < +\infty$ определим класс Привалова Π_q:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})| \right)^q d\theta < +\infty, \right\}$$

где $\ln^+ a = \max(\ln a, 0)$, $a > 0$.

Впервые классы Π_q были введены И.И. Приваловым в [3]. При $q = 1$ класс Привалова совпадает с хорошо известным в научной литературе классом функций ограниченного вида или классом Р. Неванлинны N [2]. Справедлива цепочка включений:

$$H^\infty \subset H^p \, (p > 0) \subset \Pi_q \, (q > 1) \subset N \subset \Pi_q \, (0 < q < 1).$$

При всех $0 < q < +\infty$ введем также в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})| \right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова или классом И.И. Привалова по площади. Класс $\tilde{\Pi}_q$ является обобщением хорошо известного плоского класса Р. Неванлинны и при $q = 1$ совпадает с ним. Отметим, что пространства $\tilde{\Pi}_q$ возникают естественным образом при исследовании вопросов дифференцирования в классах И.И. Привалова (см. [16]).

При всех $\alpha > -1$, $0 < q < +\infty$ рассмотрим также классы S^q_α:

$$S^q_\alpha = \left\{ \int_0^1 (1-r)^\alpha T^q(r, f) dr < +\infty \right\}.$$

Классы S^q_α были введены и исследованы в [11] Ф.А. Шамояном, они обобщают широко известные классы Неванлинны-Джрбашяна (см. [2]).

Используя неравенство Гёльдера, нетрудно доказать, что

$$\tilde{\Pi}_q \subset S^q_0 \text{ при } q > 1,$$

и

$$\tilde{\Pi}_q \supset S^q_0 \text{ при } 0 < q < 1.$$

В данной работе исследуются линейные непрерывные функционалы пространств $\tilde{\Pi}_q$ и S^q_α. Понятие линейного непрерывного функционала (сокр. ЛНФ) играет большую роль в функциональном анализе. Вопрос об описании ЛНФ на пространствах аналитических функций изучается с середины 20 вв. Исторически первой была найдена структура ЛНФ пространств Харди H^p при $p \geq 1$ в работе А. Тейлора в 1951 г. ([17]). В пространствах $H^p \, (0 < p < 1)$, которые, в отличие от случая $p \geq 1$, не являются банаховыми, они только F-пространства, ЛНФ были описаны П. Дюреном, Б. Ромбергом и А. Шилдсом в 1969 г. (см. [12]). Отметим, что при доказательстве использовалась оценка коэффициентных мультипликаторов в этих пространствах. В 1973 году, опираясь на работу [12], Н. Янагиара в [18] нашел общий вид ЛНФ в пространствах Смирнова. В 1999 г., развивая метод, предложенный Янагиара, Р. Мештрович и А.В. Субботин описали ЛНФ на пространствах Привалова при всех $q > 1$ (см. [1]).

Мы распространили последний из упомянутых результатов на плоские классы Привалова и классы S^q_α . Идея доказательства основного результата заключается в следующем: вопрос о нахождении общего вида ЛНФ на пространствах Привалова сводится к отысканию вида произвольного коэффициентного мультипликатора, действующего из исследуемого пространства в пространство ограниченных аналитических функций.

Для изложения результатов работы введем дополнительные определения и обозначения.

Пусть X и Y — некоторые классы аналитических в единичном круге D функций.

Определение 1.1. *Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ называется коэффициентным мультипликатором из класса X в класс Y, если для произвольной функции $f \in X$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, функция $\Lambda(f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in Y$. Обозначается $CM(X, Y)$.*

Статья организована следующим образом: в следующей части работы мы сформулируем и докажем вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основного результата, а в третьей части докажем основной результат.

2. Формулировка вспомогательных утверждений

При доказательстве результатов работы используется аналог теоремы Мергеляна в исследуемых пространствах.

Теорема 2.1 ([4]). *Если $f \in S_\alpha^q$, то*

$$\ln^+ M(r,f) = o\left(\frac{1}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{q}+1}}\right), \quad r \to 1-0, \tag{2.1}$$

причём оценка (2.1) *неулучшаема, т.е. для любой положительной функции $\omega(r)$, $0<r<1$, такой что $\omega(r)=o(1)$, $r\to 1-0$, существует функция $f \in S_\alpha^q$, такая что*

$$\ln^+ M(r,f) \neq O\left(\frac{\omega(r)}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{q}+1}}\right), \quad r \to 1-0.$$

Теорема 2.2 ([4]). *Если $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ — ряд Тейлора функции $f(z)$, $f \in S_\alpha^q$, то*

$$\ln^+ |a_k| = o\left(k^{\frac{\alpha+q+1}{\alpha+2q+1}}\right), \quad k \to +\infty. \tag{2.2}$$

Оценка (2.2) *неулучшаема, т.е. для любой положительной последовательности $\{\delta_k\}$, $\delta_k = o(1)$, $k \to +\infty$, существует функция $f \in S_\alpha^q$, такая что*

$$\ln^+ |a_k| \neq O\left(\delta_k k^{\frac{\alpha+q+1}{\alpha+2q+1}}\right), \quad k \to +\infty.$$

Теорема 2.3 ([9]). *Если $f \in \tilde{\Pi}_q$, то*

$$\ln^+ M(r,f) = o((1-r)^{-2/q}), \quad r \to 1-0. \tag{2.3}$$

Оценка (2.3) *неулучшаема, т.е. для любой положительной функции $\omega(r)$, $0<r<1$, такой что $\omega(r)=o(1)$, $r\to 1-0$, существует функция $f \in \tilde{\Pi}_q$, такая что*

$$\ln^+ M(r,f) \neq O(\omega(r)(1-r)^{-2/q}), \quad r \to 1-0.$$

Теорема 2.4 ([9]). *Если $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ — ряд Тейлора функции $f(z)$, $f \in \tilde{\Pi}_q$, то*

$$\ln^+ |a_k| = o\left(k^{\frac{2}{2+q}}\right), \quad k \to +\infty. \tag{2.4}$$

Оценка (2.4) *неулучшаема, т.е. для любой положительной последовательности $\{\delta_k\}$, $\delta_k = o(1)$, $k \to +\infty$, существует функция $f \in \tilde{\Pi}_q$, такая что*

$$\ln^+ |a_k| \neq O\left(\delta_k k^{\frac{2}{2+q}}\right), \quad k \to +\infty.$$

Введём в пространствах $\tilde{\Pi}_q$ и S_α^q при всех $q>0$ метрики:

$$\rho_{\tilde{\Pi}_q}(f,g) = \left(\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^q\left(1+|f(re^{i\theta})-g(re^{i\theta})|\right) d\theta dr\right)^{\alpha_q/q}, \quad f,g \in \tilde{\Pi}_q; \tag{2.5}$$

$$\rho_{S_\alpha^q}(f,g) = \left(\int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+|f(re^{i\theta})-g(re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^q dr\right)^{\alpha_q/q}, \quad f,g \in S_\alpha^q, \tag{2.6}$$

где $\alpha_q = \min(q,1)$.

Классы $\tilde{\Pi}_q$ и S_α^q являются линейными пространствами, покажем, что они образуют F-пространства относительно введенных метрик (см. [6], [9]).

Напомним, что метрическое пространство (X, ρ) является F-пространством, если [10]

а) $\rho(f,g) = \rho(f-g,0)$ (*инвариантность относительно сдвигов*);

б) (X,ρ) – полное метрическое пространство;

в) Если f, $f_n \in X$ и $\rho(f_n, f) \to 0$, $n \to +\infty$, то $\rho(\beta f_n, \beta f) \to 0$, $n \to +\infty$ для любого $\beta \in \mathbb{C}$ (*непрерывность умножения на скаляр по векторному аргументу*);

г) Если β_n, $\beta \in \mathbb{C}$ и $\beta_n \to \beta$, $n \to +\infty$, то $\rho(\beta_n f, \beta f) \to 0$, $n \to +\infty$ для любой функции $f \in X$ (*непрерывность умножения по скалярному аргументу*).

Для доказательства вспомогательных утверждений нам понадобится следующая легко устанавливаемая, но полезная оценка:

Лемма 2.1. *Для любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ справедливо неравенство $(a+b)^q \leqslant (a^q+b^q)$ при $0 < q \leqslant 1$ и $(a+b)^q \leqslant 2^q(a^q+b^q)$ при $q > 1$.*

Лемма 2.2. *Относительно введенной метрики S^q_α образует F-пространство, причем сходимость по метрике* (2.6) *этого пространства не слабее равномерной сходимости на компактных подмножествах D.*

Доказательство. Проведем для случая $0 < q \leqslant 1$. Случай $q > 1$ рассматривается аналогично.

а) $\rho(f,g) = \rho(f-g,0)$ — очевидно.

б) Докажем, что S^q_α — полное метрическое пространство.

Пусть $\{f_n(z)\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из класса S^q_α, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon) > 0$, такой что для всех n, $m > N$ выполняется $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$. Покажем, что она сходится к некоторой функции $f \in S^q_\alpha$. Сначала докажем, что из фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ в S^q_α следует ее равномерная сходимость внутри круга D. Ввиду субгармоничности функции $u(z) = \ln(1 + |f_n(z) - f_m(z)|)$ в D, имеем:

$$\ln(1+|f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|)$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rRcos(\theta-\varphi)+r^2} \ln\left(1+|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|\right) d\theta$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|\right) d\theta, \quad 0<r<R<1, \quad \varphi\in[-\pi,\pi].$$

Откуда получаем:

$$(R-r)^q \left(\ln(1+|f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|)\right)^q \leqslant \frac{1}{\pi^q}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^q.$$

Далее умножим обе части неравенства на $(1-R)^\alpha$ и, зафиксировав $r \in [0,1)$, проинтегрируем по $R \in \left[\frac{1+r}{2}, 1\right)$:

$$\int\limits_{\frac{1+r}{2}}^{1} (1-R)^\alpha (R-r)^q \left(\ln(1+|f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|)\right)^q dR$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\frac{1+r}{2}}^{1} (1-R)^\alpha \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|\right) d\theta\right)^q dR.$$

Учитывая, что подынтегральная функция — неотрицательная, получим, что правая часть неравенства мажорируется метрикой $\rho(f_n, f_m)$, поэтому:

$$\left(\ln(1+|f_n(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})|)\right)^q \int\limits_{\frac{1+r}{2}}^{1} (1-R)^\alpha (R-r)^q dR \leqslant \frac{1}{\pi^q}\rho(f_n, f_m),$$

откуда имеем:

$$\ln(1+|f_n(re^{i\varphi})-f_m(re^{i\varphi})|)\leqslant \frac{c_{\alpha,q}}{(1-r)^{(\alpha+1+q)/q}}(\rho(f_n,f_m))^{1/q},$$

при всех $0<r<1$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$. И окончательно:

$$|f_n(re^{i\varphi})-f_m(re^{i\varphi})|\to 0,\quad n,\, m\to+\infty,$$

при всех $0<r<1$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри круга D к некоторой функции $f\in H(D)$. Очевидно, что $\{f_n\}$ сходится к f и по метрике пространства S^q_α. То есть имеем: для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N>0$, такой что для всех $n>N\quad \rho(f_n,f)<\varepsilon$.

Докажем, что $f\in S^q_\alpha$.

$$\int\limits_0^1(1-r)^\alpha T^q(r,f)dr\leqslant\int\limits_0^1(1-r)^\alpha\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\Big(1+|f(re^{i\theta})|\Big)\,d\theta\right)^q dr=\rho(f,0).$$

Но при всех $n>N$ $\rho(f,0)\leqslant\rho(f,f_n)+\rho(f_n,0)<\varepsilon+c$, поэтому

$$\int\limits_0^1(1-r)^\alpha T^q(r,f)dr\leqslant const.$$

Таким образом, $f\in S^q_\alpha$, и пространство S^q_α является полным.

в) Пусть $f,\, f_n\in S^q_\alpha$ и $\rho(f_n,f)\to 0$, $n\to+\infty$. Покажем, что для любого $\beta\in\mathbb{C}$ $\rho(\beta f_n,\beta f)\to 0$, $n\to+\infty$;

Пусть $|\beta|<1$, тогда $\ln(1+|\beta|x)\leqslant\ln(1+x)$ при всех $x\geq 0$, и свойство сразу следует из неравенства $0\leqslant\rho(\beta f_n,\beta f)\leqslant\rho(f_n,f)$.

При всех $|\beta|\geq 1$ и $x\geq 0$ справедлива оценка $(1+|\beta|x)\leqslant(1+x)^{|\beta|}$, из которой сразу следует свойство в):

$$\begin{aligned}\rho(\beta f_n,\beta f)&=\int\limits_0^1(1-r)^\alpha\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln(1+|\beta|\cdot|f_n(re^{i\theta})-f(re^{i\theta})|)d\theta\right)^q dr\\&\leqslant\int\limits_0^1(1-r)^\alpha\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln(1+|f_n(re^{i\theta})-f(re^{i\theta})|)^{|\beta|}d\theta\right)^q dr\\&\leqslant|\beta|^q\int\limits_0^1(1-r)^\alpha\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln(1+|f_n(re^{i\theta})-f(re^{i\theta})|)d\theta\right)^q dr=|\beta|^q\rho(f_n,f).\end{aligned}$$

г) Пусть $f\in S^q_\alpha$ и $\beta_n\to\beta$, $n\to+\infty$. Покажем, что $\rho(\beta_n f,\beta f)\to 0$, $n\to+\infty$ для любой функции $f\in S^q_\alpha$;

Оценим

$$\rho(\beta_n f,\beta f)=\int\limits_0^1(1-r)^\alpha\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln(1+|f(re^{i\theta})||\beta_n-\beta|)d\theta\right)^q dr=J.$$

Разобьём интеграл J на две части:

$$J=\int\limits_0^{r_0}...+\int\limits_{r_0}^1...=J_1+J_2.$$

Выберем $0<r_0<1$ так, чтобы $J_2<\frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon>0$ — произвольное достаточно маленькое число. Оценим J_1, используя оценку (2.1) из теоремы 2.1:

$$J_1\leqslant(2\pi)^q\ln^q\left(1+|\beta_n-\beta|\exp\frac{\delta}{(1-r_0)^{\frac{\alpha+1}{q}+1}}\right)\cdot\frac{1-(1-r_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

где $\delta > 0$ — сколь угодно маленькое число.

Поскольку $|\beta_n - \beta| \to 0$, $n \to +\infty$, то $J_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N(\varepsilon)$. Таким образом, г) установлено.

Лемма 2.2 доказана.

□

Лемма 2.3. *Относительно введенной метрики $\tilde{\Pi}_q$ образует F-пространство, причем сходимость по метрике* (2.5) *этого пространства не слабее равномерной сходимости на компактных подмножествах D.*

Доказательство. Пусть $0 < q \leqslant 1$, случай $q > 1$ доказывается аналогично.

а) $\rho(f, g) = \rho(f - g, 0)$ — очевидно.

б) $\tilde{\Pi}_q$ — полное метрическое пространство.

Пусть $\{f_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из класса $\tilde{\Pi}_q$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon) > 0$, такой что для всех n, $m > N$ выполняется $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$. Покажем, что она сходится к некоторой функции $f \in \tilde{\Pi}_q$. Заметим, что функции $\ln(1 + |f_n|)$ — субгармонические в D, поэтому справедлива оценка (см. [13, с. 144]):

$$\ln^q(1 + |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|) \leqslant \frac{c(q)}{(1-R)^2} \cdot \rho(f_n, f_m),$$

откуда

$$|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| \to 0, \quad n, m \to +\infty,$$

при всех $0 < R < 1$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Таким образом, фундаментальная последовательность $\{f_n\} \in \tilde{\Pi}_q$ равномерно сходится внутри круга D к некоторой функции $f \in H(D)$. Очевидно, что $\{f_n\}$ сходится к f и по метрике пространства $\tilde{\Pi}_q$.

Докажем, что $f \in \tilde{\Pi}_q$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr &\leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln(1 + |f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr \\ &\leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^q \left(1 + |f(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})| + |f_n(re^{i\theta})|\right) d\theta dr.\end{aligned}$$

Ввиду леммы 2.1, из последней оценки имеем:

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta \leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln^q(1 + |f(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})|) + \ln^q(1 + |f_n(re^{i\theta})|)\right] d\theta dr \leqslant const.$$

Значит, $\tilde{\Pi}_q$ полно.

Доказательство свойств в), г) проводится аналогично лемме 2.2. Лемма доказана. □

Отметим также, что F-пространства можно рассматривать как полные квазинормированные пространства.

Лемма 2.4 ([19]). *Непрерывность линейного оператора квазинормированных пространств равносильна его ограниченности, то есть тому, что он ограниченные множества переводит в ограниченные.*

Обозначим $f_\zeta(z) = f(\zeta z)$, $\zeta \in D$.

Лемма 2.5. *Пусть $f \in X$, где $X = S^q_\alpha$ или $X = \tilde{\Pi}_q$. Тогда семейство функций $\{f_\zeta(z)\}$ ограничено в X.*

Доказательство. Рассмотрим η-окрестность 0, т.е. $V = \{g \in X : \rho(g, 0) < \eta\}$. Выберем α', такое что $\rho(\alpha' f, 0) < \frac{\eta}{2}$.

Обозначим $f_r(z) = f(rz)$, $0 < r < 1$. Очевидно, что $\rho(f, f_r) \to 0$, $r \to 1 - 0$. Выберем $r_0 \leqslant r < 1$ настолько близким к 1, что $\rho(f, f_r) < \frac{\eta}{2}$.

Обозначим $f_{(\theta)}(z) = f(e^{i\theta}z)$, $f_{r(\theta)}(z) = f_r(e^{i\theta}z) = f(re^{i\theta}z)$. Тогда

$$\rho(\alpha' f_{(\theta)}, 0) = \rho(\alpha' f, 0) < \frac{\eta}{2},$$

и

$$\rho(\alpha' f_{r(\theta)}, \alpha' f_{(\theta)}) = \rho(\alpha' f_r, \alpha' f) \leqslant \rho(f_r, f) < \frac{\eta}{2}.$$

Если $\zeta = re^{i\theta}$, то $f_\zeta = f_{r(\theta)}$. Для всех $r \geq r_0$ мы получим:

$$\rho(\alpha' f_\zeta, 0) = \rho(\alpha' f_{r(\theta)}, 0) \leqslant \rho(\alpha' f_{r(\theta)}, \alpha' f_{(\theta)}) + \rho(\alpha' f_{(\theta)}, 0) = \rho(\alpha' f_r, \alpha' f) + \rho(\alpha' f, 0) < \eta.$$

Для всех $0 \leqslant r \leqslant r_0$ мы можем выбрать α'' настолько маленьким, чтобы

$$\rho(\alpha'' f_\zeta, 0) \leqslant \rho(\alpha'' f_r, 0) < \eta.$$

Далее, полагая $\alpha = \min(\alpha', \alpha'')$, получим $\{\alpha f_\zeta\} \subset V$. □

При доказательстве основного результата используются описания коэффициентных мультипликаторов, действующих из исследуемых пространств в классы Харди.

Теорема 2.5 ([5]). *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$. *Для того чтобы* $\Lambda = CM(S^q_\alpha, X)$, *где* $X = H^p\,(0 < p \leqslant +\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{\alpha+q+1}{\alpha+2q+1}}\right)\right), \quad k \to +\infty.$$

для некоторого $c > 0$.

Теорема 2.6 ([9]). *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$. *Для того чтобы* $\Lambda = CM(\tilde{\Pi}_q, X)$, *где* $X = H^p\,(0 < p \leqslant +\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{2}{q+2}}\right)\right), \quad k \to +\infty.$$

для некоторого $c > 0$.

3. Доказательство основных результатов

Перейдем к формулировке основных результатов работы — дискретному описанию ЛНФ в пространствах S^q_α и в классах Привалова по площади. Итак, справедливы следующие утверждения:

Теорема 3.1. *Любой непрерывный линейный функционал* Φ *над плоским классом Привалова* $\tilde{\Pi}_q\,(q > 0)$ *определяется формулой*

$$\Phi(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \tag{3.1}$$

где $\{a_k\}$ *— коэффициенты Тейлора функции* $f \in \tilde{\Pi}_q$, *а числа* $\{b_k\}$ *с условием*

$$|b_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{2}{2+q}}\right)\right), \quad k \to +\infty, \quad c > 0. \tag{3.2}$$

являются коэффициентами Тейлора некоторой аналитической функции в D, *при этом ряд в правой части* (3.1) *абсолютно сходится.*

Обратно, каждая последовательность $\{b_k\}$ *с условием* (3.2) *определяет по формуле* (3.1) *линейный непрерывный функционал* Φ *над* $\tilde{\Pi}_q$.

Теорема 3.2. *Любой непрерывный линейный функционал* Φ *над пространством* S^q_α *определяется формулой*

$$\Phi(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \tag{3.3}$$

где числа $\{b_k\}$ *с условием*

$$|b_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{\alpha+q+1}{\alpha+2q+1}}\right)\right), \quad c > 0, \quad k \to +\infty. \tag{3.4}$$

являются коэффициентами Тейлора некоторой аналитической функции в D, $\{a_k\}$ *— коэффициенты Тейлора функции* $f \in S^q_\alpha$. *При этом ряд в правой части* (3.3) *абсолютно сходится.*

Обратно, каждая последовательность $\{b_k\}$ *с условием* (3.4) *определяет по формуле* (3.3) *линейный непрерывный функционал* Φ *над пространством* S^q_α.

Доказательство. Докажем теорему 3.1. Пусть Φ — произвольный линейный непрерывный функционал над пространством $\tilde{\Pi}_q$. Каждой функции $f \in \tilde{\Pi}_q$ соотнесем функцию $F_\zeta = \Phi(f_\zeta)$, $\zeta \in D$. Ряд Тейлора функции $f_\zeta(z) = f(\zeta z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \zeta^k$ сходится абсолютно и равномерно на замкнутом единичном круге $\bar{D}$, следовательно, он сходится по метрике пространства $\tilde{\Pi}_q$, и в силу непрерывности и линейности функционала Φ, имеем:

$$F(\zeta) = \Phi(f_\zeta) = \lim_{N \to +\infty} \Phi\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^k \zeta^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \zeta^k, \quad \zeta \in D, \tag{3.5}$$

где $b_k = \Phi(z^k)$, и ряд в правой части (3.5) — сходящийся. Таким образом, $F \in H(D)$. По лемме 2.5 семейство функций $\{f_\zeta\}$ ограничено в $\tilde{\Pi}_q$, поэтому и функция F будет ограничена в D по лемме 2.4, то есть $F \in H^\infty$. Значит, по определению последовательность $\{b_k\}$ является коэффициентным мультипликатором из $\tilde{\Pi}_q$ в H^∞, и по теореме 2.6 справедлива оценка (3.2). Далее, принимая во внимание оценку (2.4), получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \zeta^k$ сходится абсолютно и равномерно, в силу теоремы Вейерштрасса.

Используя теорему Абеля о степенных рядах, заключаем:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k = \lim_{r \to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k r^k.$$

С другой стороны, так как $\rho_{\tilde{\Pi}_q}(f, f_r) \to 0$, $r \to 1-0$, и в силу непрерывности функционала Φ, заключаем:

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k r^k = \lim_{r \to 1-0} \Phi(f_r) = \Phi(f).$$

Таким образом, (3.1) доказано, то есть необходимость установлена.

Докажем обратное утверждение. Пусть последовательность комплексных чисел $\{b_k\}$ удовлетворяет условию (3.2). Принимая во внимание оценку (2.4), получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ абсолютно сходится для каждой функции $f = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k \in \tilde{\Pi}_q$. Поэтому функционал Φ корректно определен формулой (3.1). Он линеен, в силу линейности каждого тейлоровского коэффициента как функционала над пространством голоморфных в круге D функций. Для доказательства непрерывности представим функционал Φ в виде:

$$\Phi_N = \sum_{k=1}^{N} a_k b_k.$$

Линейность и непрерывность этого функционала следует из линейности и непрерывности каждого тейлоровского коэффициента как функционала над пространством голоморфных в круге D функций с топологией равномерной сходимости на компактах, а также того факта, что топология сходимости по метрике пространства $\tilde{\Pi}_q$ не слабее последней. Предел $\lim\limits_{N \to +\infty} \Phi_N$ существует и конечен, поэтому последовательность $\{\Phi_N\}$ поточечно ограничена и, значит, равностепенно непрерывна по общему принципу равномерной ограниченности для F-пространств, а значит, непрерывен и их поточечный предел — функционал Φ. Достаточность установлена. Теорема доказана полностью. $\square$

Аналогичным образом устанавливается теорема 3.2.

Ясно, что от дискретной формы записи функционала можно перейти к привычной интегральной форме, используя общую теорию рядов Фурье.

Отметим, что результаты работы были анонсированы в [8], [7], [15].

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамояну за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Гаврилов, А.В. Субботин, Д.А. Ефимов. *Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад).* М.: Изд-во Московского унив-та. 2012.
2. Р. Неванлинна. *Однозначные аналитические функции.* М.-Л.: ГИТТЛ. 1941.
3. И.И. Привалов. *Граничные свойства однозначных аналитических функций.* М.: Изд. МГУ. 1941.
4. Е.Г. Родикова. *Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций* // Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения». Петрозаводск: ПетрГУ. 64–69 (2012).
5. Е.Г. Родикова. *О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций* // Вестник Брянского гос. унив-та. **4**:2, 61–69 (2012).
6. Е.Г. Родикова. *Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2014.
7. Е.Г. Родикова. *Линейные непрерывные функционалы пространств Привалова* // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы. Саратов. 249–251 (2022).
8. Е.Г. Родикова. *О линейных непрерывных функционалах плоских классов И.И. Привалова* // Теоретические и прикладные аспекты естественнонаучного образования в эпоху цифровизации. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Брянск. 102–103 (2022).
9. Е.Г. Родикова. *О коэффициентных мультипликаторах плоских классов Привалова* // Уфимск. матем. журн. **13**:4, 82–93 (2021).
10. У. Рудин. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1975.
11. Ф.А. Шамоян. *Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций* // Сиб. матем. журн. **40**:6, 1422–1440 (1999).
12. P. Duren, B. Romberg, A. Shields. *Linear functionals on H^p spaces with* $0 < p < 1$ // J. Reine Angew. Math. **238**, 32–60 (1969).
13. M. Pavlovic. *Introduction to function spaces in a disk.* Matematicki Institut SANU, Beograd. 2004.
14. E.G. Rodikova. *Coefficient multipliers for the Privalov class in a disk* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **11**:6, 723—732 (2018).
15. E.G. Rodikova. *Continuous linear functionals on the Nevanlinna-Djrbashian type spaces* // Proc. of the Math. Center named after N.I. Lobachevsky. Int. Conf. «Complex Analysis and Related Topics». Abstracts. – Kazan: KFU. **63**, 51–52 (2022).
16. E.G. Rodikova, F.A. Shamoyan. *On the differentiation in the Privalov classes* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **13**:5, 622–630 (2020).
17. A.E. Taylor. *Banach spaces of functions analytic in the unit circle* // II Studia Math. **12**, 25–50 (1951).
18. N. Yanagihara. *Multipliers and linear functionals for the class N^+* // Transactions of the Amer. Math. Soc. **180**, 449–461 (1973).
19. K. Yoshida. *Functional Analysis.* Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag. 1965.

Евгения Геннадьевна Родикова,
Брянский государственный университет,
ул. Бежицкая, 14,
241050, Брянск, Россия
E-mail: `evheny@yandex.ru`