ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 2 (2023). С. 55-64.

УДК 517.983

УСРЕДНЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АРГУМЕНТА ФУНКЦИЙ

Р.Ш. КАЛЬМЕТЬЕВ, Ю.Н. ОРЛОВ, В.Ж. САКБАЕВ

Аннотация. Изучаются усреднения итераций Фейнмана-Чернова случайных операторнозначных сильно непрерывных функций, значениями которых являются ограниченные линейные операторы на сепарабельном гильбертовом пространстве. В данной работе мы рассматриваем усреднения для определенного семейства таких случайных операторнозначных функций. Линейные операторы, являющиеся значениями рассматриваемых функций, действуют в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций на конечномерном евклидовом пространстве и задаются случайными аффинными преобразованиями аргумента. При этом композиции независимых одинаково распределенных случайных аффинных преобразований представляют собой некоммутативный аналог случайных блужданий.

Для операторнозначной функции, являющейся усреднением итераций Фейнмана-Чернова, мы доказываем оценку сверху на норму и что замыкание производной этой операторнозначной функции в нуле является генератором сильно непрерывной полугруппы. В работе получены достаточные условия для сходимости математического ожидания последовательности итераций Фейнмана-Чернова к полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка.

Ключевые слова: итерации Фейнмана-Чернова, теорема Чернова, операторнозначный случайный процесс, уравнение Фоккера-Планка.

Mathematical Subject Classification: 47D06, 47D07, 60B15, 60J60.

1. Введение

Теория статистических свойств произведений независимых случайных матриц и композиций независимых случайных преобразований интенсивно развивалась во второй половине XX века, ее основные положения можно найти, например, в работах [1]–[5].

В данной работе изучаются усреднения итераций Фейнмана-Чернова для определенного класса случайных операторнозначных процессов со значениями в алгебре ограниченных линейных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве. Линейные операторы, являющиеся значениями рассматриваемых случайных процессов, действуют в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций на конечномерном евклидовом пространстве и задаются случайными аффинными преобразованиями аргумента. При этом композиции независимых одинаково распределенных случайных аффинных преобразований представляют собой некоммутативный аналог случайных блужданий.

Математические модели, в которых возникают композиции случайных операторнозначных функций, возникают в задачах классической и квантовой механики для систем, находящихся в случайных нестационарных полях [6]–[13]. Усредненная динамика таких систем имеет как теоретический, так и практический интерес с точки зрения анализа средних значений наблюдаемых. В частности, важно представлять, в какой мере усреднение решений

R.Sh. Kalmetev, Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev, Averaging of random affine transformations of variables in functions.

Поступила 21 декабря 2022 г.

некоторого эволюционного уравнения с нестационарными параметрами связано с решением уравнения, усредненного по этим параметрам. Использование для этой цели процедуры усреднения с помощью построения эквивалентных по Чернову полугрупп является весьма эффективным методом, который был развит в [14]–[16].

В данной работе для определенного класса операторнозначных функций, порождаемых преобразованиями аргумента, получены достаточные условия для сходимости математического ожидания последовательности итераций Фейнмана-Чернова случайных аффинных преобразований аргумента функции к полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка. По сравнению с результатами работы [17] рассмотрен более широкий класс случайных преобразований и убрано требование независимости случайных линейной части аффинного преобразования и преобразования сдвига.

Структура данной работы выстроена следующим образом. За введением следует вторая глава, содержащая необходимые предварительные сведения, включающие теорему Чернова и используемые определения случайного оператора и математического ожидания от случайного оператора. В третьей главе определяется рассматриваемый класс случайных операторнозначных функций и доказываются вспомогательные леммы. В четвертой главе формулируется и доказывается являющаяся основным результатом данной работы теорема 4.1 о сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова к соответствующей усредняющей по Чернову полугруппе.

2. Предварительные сведения

Пусть X – банахово пространство, $B(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов в X. Также введем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Операторнозначная функция $F(t) : \mathbb{R}_+ \to B(X)$ называется сильно непрерывной, если для любого $u_0 \in X$ и любого $t_0 \geqslant 0$ выполняется равенство

$$\lim_{t \to t_0} \|F(t)u_0 - F(t_0)u_0\|_X = 0. \tag{2.1}$$

Введем обозначение $C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$ для топологического векторного пространства сильно непрерывных операторнозначных функций $U(t) : [0, +\infty) \to B(X)$.

Топология τ_s в $C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$ порождается семейством полунорм

$$\Phi_{T,v}(U) = \sup_{t \in [0,T]} \|U(t)v\|_X, \quad \forall T > 0, \quad \forall v \in X. \tag{2.2}$$

Отметим, что если $U, \{U_n\}_{n=0}^{\infty} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$, то

$$U_n \xrightarrow{\tau_s} U \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} \|U_n(t)v - U(t)v\|_X = 0, \quad \forall T > 0, \quad \forall v \in X. \tag{2.3}$$

Операторнозначная функция $U(t) : \mathbb{R}_+ \to B(X)$ называется полугруппой, если $U(0) = I$ (тождественный оператор) и $U(t_1 + t_2) = U(t_1) \circ U(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$. Полугруппа называется сильно непрерывной или C_0-полугруппой, если для любого $u_0 \in X$ выполняется равенство

$$\lim_{t \to 0} \|U(t)u_0 - u_0\|_X = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство основного результата данной работы существенно использует теорему Чернова [18], для ее формулировки введем понятие эквивалентности по Чернову.

Определение 2.1. *Будем говорить, что сильно непрерывная операторнозначная функция* $F(t) : \mathbb{R}_+ \to B(X)$ *эквивалентна по Чернову сильно непрерывной полугруппе* $U(t) : \mathbb{R}_+ \to B(X)$, *если* $F^n\left(\frac{t}{n}\right) \xrightarrow{\tau_s} U(t)$.

В приведенных выше обозначениях теорема Чернова формулируется следующим образом:

Теорема (Чернов, 1968). *Пусть операторнозначная функция* $F(t) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$ *удовлетворяет условиям:*

1. $F(0)$ *является тождественным оператором,*
2. $\|F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant e^{\alpha t}$, $t \geqslant 0$ *при некотором* $\alpha > 0$,
3. *оператор* F_0' *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы* $U(t)$.

Тогда функция $F(t)$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $U(t)$.

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Введем понятия случайного оператора в $\mathcal{H}$ и его математического ожидания. Пусть тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – вероятностное пространство.

Определение 2.2. *Отображение* $\hat{A} : \Omega \to B(\mathcal{H})$ *будем называть случайным оператором в* $\mathcal{H}$, *если функции* $(\hat{A}u, v)$ *являются* $(\Omega, \mathcal{A})$*-измеримыми (т.е. являются случайными величинами) при всех* $u, v \in \mathcal{H}$.

Определение 2.3. *Математическим ожиданием (или усреднением) случайного оператора* $\hat{A}$ *будем называть оператор* $\mathbb{E}\hat{A} \in B(\mathcal{H})$ *такой, что*

$$(\mathbb{E}\hat{A}u, v) = \mathbb{E}(\hat{A}u, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

Достаточные условия существования усреднения случайного оператора можно найти, например, в работе [19].

3. Случайные аффинные преобразования аргумента функций

Рассмотрим случайную операторнозначную функцию $F(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ со значениями в группе аффинных преобразований конечномерного евклидова пространства следующего вида

$$F(t)\vec{x} = e^{A\sqrt{t}+Bt+R(t^{\frac{3}{2}})}\vec{x} + \vec{h}\sqrt{t} + \vec{g}t + \vec{r}(t^{\frac{3}{2}}), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

где при $i, j \in 1, ..., n$ компоненты $\{A^i{}_j\}, \{B^i{}_j\}, \{h^i\}, \{g^i\}$ являются вещественными случайными величинами, а $\{R^i{}_j(s)\}$ и $\{r^i(s)\}$ – случайные непрерывно дифференцируемые функции, обращающиеся в ноль в точке $s = 0$. При этом все случайные величины предполагаются совместно распределенными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

При произвольном фиксированном $\omega \in \Omega$ справедливо следующее представление для функции $F(t)$.

Лемма 3.1. *В некоторой окрестности нуля функция* $F(t)$ *вида (3.1) представима в виде композиции* $F_2(t) \circ F_1(t)$, *где*

$$\begin{aligned} F_1(t)\vec{x} &= e^{Bt+R_0(t^{\frac{3}{2}})}\vec{x} + \vec{g}t + \vec{r}_0(t^{\frac{3}{2}}), \\ F_2(t)\vec{x} &= e^{A\sqrt{t}}\vec{x} + \vec{h}\sqrt{t}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\{(R_0)^i{}_j(s)\}$ *и* $\{(r_0)^i(s)\}$ *— некоторые непрерывно дифференцируемые функции, обращающиеся в ноль в точке* $s = 0$.

Доказательство. По формуле Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа (см., например, [20]) при достаточно малых t выполнено равенство

$$e^{-A\sqrt{t}}e^{A\sqrt{t}+Bt+R(t^{\frac{3}{2}})} = e^{Bt+R_0(t^{\frac{3}{2}})}, \tag{3.3}$$

причем $\{(R_0)^i{}_j(s)\}$ также являются непрерывно дифференцируемыми и равны нулю в точке $s = 0$. Тогда при $\vec{r}_0(t^{\frac{3}{2}}) = \vec{r}(t^{\frac{3}{2}}) - e^{A\sqrt{t}}\vec{g}t$ получаем

$$F(t)\vec{x} = e^{A\sqrt{t}}\left(e^{+Bt+R(t^{\frac{3}{2}})}\vec{x} + \vec{g}t\right) + \vec{h}\sqrt{t} + \vec{r}(t^{\frac{3}{2}}) - e^{A\sqrt{t}}\vec{g}t = F_2(t) \circ F_1(t)\vec{x}. \tag{3.4}$$

□

Случайная операторнозначная функция $F(t)$ (3.1) порождает случайную операторнозначную функцию $\hat{U}_F(t),\ t \geqslant 0$, со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$, таким образом, что при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ выполняется равенство

$$\hat{U}_F(t,\omega)u(x) = u(F(t,\omega)x), \quad \forall u \in \mathcal{H}. \tag{3.5}$$

Согласно теореме 1 из работы [17] при условии

$$\int\limits_{\Omega} \left| \det \left(e^{A\sqrt{t}+Bt+R(t)}\right) \right|^{\frac{1}{2}} d\mu(\omega) < +\infty \tag{3.6}$$

существует математическое ожидание

$$\mathbb{E}\hat{U}_F(t)u = \int\limits_{\Omega} u \circ F(t) d\mu(\omega) \in \mathcal{H}, \qquad \forall u \in \mathcal{H}. \tag{3.7}$$

Пусть выполняются следующие условия:

A1. операторы A, B и $R'(t)$ при каждом $t \in [0,T]$ принимают значения в шаре радиуса $\rho_0 < +\infty$ пространства $B(\mathbb{R}^n)$ с вероятностью 1;
A2. распределение случайного вектора $(\{A^i{}_j\})$ дискретно и симметрично;
A3. $\mathbb{E}h^i = 0$;
A4. оператор A диагонализируем с вероятностью 1;
A5. $\operatorname{tr} A = 0$ с вероятностью 1.
A6. ковариационная матрица случайного вектора $(\{A^i{}_j\}, \{B^i{}_j\}, \{h^i\}, \{g^i\})$ является положительно определенной;

В условии A6 имеется в виду следующее. Рассмотрим компоненты матриц A, B и компоненты векторов $\vec{h}, \vec{g}$ как один случайный вектор размерности $2n^2 + 2n$. Ковариационная матрица такого вектора по определению является положительно полуопределенной. В A6 же накладывается условие, что она строго положительно определена. Отсюда следует, что все вторые моменты $(\{A^i{}_j\}, \{B^i{}_j\}, \{h^i\}, \{g^i\})$ строго больше нуля, а все их попарные корреляции строго меньше 1, иначе ковариационная матрица была бы вырожденной.

Лемма 3.2. *Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (3.1), для которой выполнены условия A1-A2. Тогда для некоторого положительного α справедлива оценка*

$$\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant e^{\alpha t}. \tag{3.8}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|^2_{B(\mathcal{H})} &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{\Omega} u(F(t)x)d\mu(\omega) \right|^2 dx \\
&\overset{①}{\leqslant} \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\Omega} |u(F(t)x)|^2 d\mu(\omega)dx \overset{②}{=} \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(F(t)x)|^2 dx d\mu(\omega) \\
&\overset{③}{=} \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \left|\det(F^{-1}(t))\right| dx d\mu(\omega) = \left|\mathbb{E}\left(\det F^{-1}(t)\right)\right| \\
&= \mathbb{E}e^{-\operatorname{tr}(A\sqrt{t}+Bt+R(t))}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

В приведенных выше выкладках в соответствующих переходах используются:

① неравенство Коши-Буняковского-Шварца,
② теорема Фубини,
③ теорема о замене переменной в интеграле Лебега.

По формуле Тейлора получаем:

$$\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \left(\mathbb{E}e^{-\operatorname{tr}(A\sqrt{t}+Bt+R(t))}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbb{E}\left(1 - A^i{}_i\sqrt{t} - B^i{}_it - o(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.10}$$

причем $\mathbb{E}A^i{}_i = 0$, так как случайные величины $A^i{}_i$ ограничены (A1) и распределены симметрично (A2), а математическое ожидание от остаточного члена является $o(t)$ в силу условия A1. Тогда для некоторого $\alpha > 0$ имеем при $t \in [0, T]$:

$$\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(L_2(\mathbb{R}))} \leqslant \left(1 + t\left(-\mathbb{E}B^i{}_i + o(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1 + \alpha t \leqslant e^{\alpha t}. \tag{3.11}$$

□

Лемма 3.3. *Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (3.1), для которой выполнены условия A1-A3. Тогда для любого $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\hat{U}_F)_0'u =&\mathbb{E}(B^i{}_jx^j + \frac{1}{2}A^i{}_kA^k{}_jx^j + g^i)\partial_iu \\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(A^i{}_kA^j{}_lx^kx^l + 2A^i{}_kh^jx^k + h^ih^j\right)\partial_i\partial_ju.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Доказательство. Найдем значение $(\mathbb{E}\hat{U}_F)_0'u = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\mathbb{E}\hat{U}_F(t)u-u}{t}\right)$ при $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, согласно формуле Тейлора:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\hat{U}_F(t)u(x) = \mathbb{E}u(F(t)x) \\ &= \mathbb{E}\left(u(x) + \partial_iu(x)\left(F(t)x - x\right)^i + \frac{1}{2}\partial_i\partial_ju(x)\left(F(t)x - x\right)^i\left(F(t)x - x\right)^j + r(t)\right) \\ &= u(x) + \partial_iu(x)\mathbb{E}\left(F(t)x - x\right)^i + \frac{1}{2}\partial_i\partial_ju(x)\mathbb{E}((F(t)x - x)^i\left(F(t)x - x\right)^j) + \mathbb{E}(r(t)),\end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$r(t) = \partial_i\partial_j\partial_ku(\zeta)(F(t)x - x)^i(F(t)x - x)^j(F(t)x - x)^k, \tag{3.14}$$

и ζ лежит между 0 и $(F(t)x - x)$ и зависит от ω.

В свою очередь для $\mathbb{E}(F(t)x - x)$ по формуле Тейлора получаем:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(F(t)x - x)^i =&\mathbb{E}\left((A^i{}_j\sqrt{t} + B^i{}_jt) + \frac{1}{2}(A^i{}_k\sqrt{t} + B^i{}_kt)(A^k{}_j\sqrt{t} + B^k{}_jt) + o(t)\right)x^j \\ &+ \mathbb{E}h^i\sqrt{t} + \mathbb{E}g^it = \mathbb{E}\left(B^i{}_jx^j + \frac{1}{2}A^i{}_kA^k{}_jx^j + g^i\right)t + o(t).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Далее аналогично для мономов степеней 2 и 3 имеем:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}((F(t)x - x)^i\left(F(t)x - x\right)^j) \\ &= \mathbb{E}(((A^i{}_j\sqrt{t} + B^i{}_jt) + \frac{1}{2}(A^i{}_k\sqrt{t} + B^i{}_kt)(A^k{}_j\sqrt{t} + B^k{}_jt) + o(t))x^j + h^i\sqrt{t} + g^it)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(A^i{}_kA^j{}_lx^kx^l + 2A^i{}_kh^jx^k + h^ih^j\right)t + o(t),\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\mathbb{E}((F(t)x - x)^i(F(t)x - x)^j(F(t)x - x)^k) = o(t). \tag{3.17}$$

В формулах (3.15)–(3.17) учтены условия A1-A3 из формулировки теоремы, при этом все остаточные члены класса $o(t)$ определены и равномерно липшецевы по ω на отрезке $[0, (F(t)x - x)]$. Из разложений (3.14)–(3.17) следует утверждение леммы. □

По лемме 3.1 в некоторой окрестности нуля функция $F(t)$ представима как композиция $F_2(t)\circ F_1(t)$ вида (3.2). Случайные функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ также в свою очередь порождают операторнозначные функции $\mathbb{E}\hat{U}_{F_1}(t)$ и $\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t)$. При этом производные $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_1})'_0$ и $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2})'_0$ – это операторы, областью определения которых являются подпространства, на которых дифференцируемы в нуле $\mathbb{E}\hat{U}_{F_1}(t)$ и $\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t)$ соответственно.

Операторы $\hat{H}_j,\ j=1,2$, определим следующим образом. При $u\in C_0^\infty$

$$\hat{H}_1 u = (\mathbb{E}\hat{U}_{F_1})'_0 u = \mathbb{E}\left(B^i{}_j x^j + g^i\right)\partial_i u, \tag{3.18}$$

$$\hat{H}_2 u = (\mathbb{E}\hat{U}_{F_2})'_0 u = \frac{1}{2}\mathbb{E}(A^i{}_k x^k + h^i)\partial_i(A^j{}_l x^l + h^j)\partial_j u. \tag{3.19}$$

При этом заданный на пространстве C_0^∞ оператор $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2})'_0$ определяет замыкаемую неположительную квадратичную форму κ_2. За область определения оператора $\hat{H}_2$ берется область определения Фридрихсова расширения оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2})'_0:\ C_0^\infty\to\mathcal{H}$, т.е. оператора, ассоциированного с замыканием квадратичной формы κ_2.

В силу предположений A1-A3 оператор (3.18) определен на $D(\hat{H}_2)$ поскольку существуют постоянные $c_1,c_2>0$ такие, что

$$(\hat{H}_1 u,\hat{H}_1 u)\leqslant c_1\|u\|^2_{\mathcal{H}} + c_2|(u,\hat{H}_2 u)|\ \ \forall u\in D(\hat{H}_2). \tag{3.20}$$

Поэтому положим $D(\hat{H}_1)=D(\hat{H}_2)$.

Заметим также, что $F_2(t)$ в силу предположения A4 представима в виде композиции случайного ортогонального преобразования S_1, случайного самосопряженного преобразования S_2 и сдвига S_3 на случайный вектор $\vec{h}\sqrt{t}$. Таким образом, получаем

$$\hat{U}_{F_2}(t)u = \hat{U}_{S_3}(\sqrt{t})\circ\hat{U}_{S_2}(\sqrt{t})\circ\hat{U}_{S_1}(\sqrt{t})u,\quad u\in\mathcal{H},\quad t\geqslant 0. \tag{3.21}$$

При этом оператор S_3 неперестановочен с S_1 и S_2, поэтому для получения в результате композиции преобразования F_2 необходимо, чтобы оператор S_3 действовал последним.

В работе [17] установлено, что для каждого $i=1,2,3$, и каждого $\omega\in\Omega$ однопараметрические семейства операторов $\hat{U}_{S_i(\omega)}(t),\ t\geqslant 0$, образуют сильно непрерывную унитарную группу операторов в пространстве $\mathcal{H}$, при выполнении условия A5 обладающую антиэрмитовым генератором $\hat{L}_{S_i(\omega)}$. Поэтому в силу теоремы 1 работы [21] для каждого $i=1,2,3$, и каждого $u\in D((\hat{L}_i(\omega))^2)$ верны равенства

$$\hat{U}_{S_i(\omega)}(t)u = u + t\hat{L}_{S_i(\omega)}u + \frac{t^2}{2}\hat{L}^2_{S_i(\omega)}u + \hat{R}_{S_i}(t,\omega)u,\quad \omega\in\Omega,\quad t\geqslant 0, \tag{3.22}$$

причем при каждом $\omega\in\Omega$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\|\hat{R}_{S_i}(t,\omega)u\|_{\mathcal{H}} = 0. \tag{3.23}$$

Поэтому в силу предположений A1-A5 получаем

$$\mathbb{E}\hat{U}_{S_i(\omega)}(t)u = u + t^2\hat{H}_{S_i}u + \hat{R}_i(t)u,\qquad t\geqslant 0,\quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\|\hat{R}_i(t)u\|_H = 0. \tag{3.24}$$

Здесь $\hat{H}_{S_i}u = \frac{1}{2}\mathbb{E}\hat{L}^2_{S_i}u\quad \forall u\in C_0^\infty$.

Операторы $\hat{H}_{S_j}:\ C_0^\infty\to\mathcal{H}$, $j=1,2,3$, плотно определены и неположительны. Как показано в [21], [22], фридрихсовы расширения операторов $\hat{H}_{S_j}:\ C_0^\infty\to\mathcal{H}$, $j=1,2,3$, являются генераторами $\hat{H}_{S_j}$ сильно непрерывных сжимающих полугрупп $e^{t\hat{H}_{S_j}}$ в пространстве $\mathcal{H}$.

В приведенных выше обозначениях верна следующая

Лемма 3.4. *Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (3.1), для которой выполнены условия A1-A6. Тогда оператор $\hat{H}_2$, заданный как фридрихсово расширение оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0\ :\ \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})\to\mathcal{H}$, имеет область определения $D(\hat{H}_2)=\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})$ и является неположительным самосопряженным.*

Доказательство. В силу (3.22) на области определения $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0$ будет справедливо равенство

$$(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0 u = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\hat{L}^2_{S_1} + \frac{1}{2}\hat{L}^2_{S_2} + \frac{1}{2}\hat{L}^2_{S_3} + \hat{L}_{S_2}\circ\hat{L}_{S_1} + \hat{L}_{S_3}\circ\hat{L}_{S_2} + \hat{L}_{S_3}\circ\hat{L}_{S_1}\right)u. \tag{3.25}$$

Из антиэрмитовости операторов L_{S_i} следует, что $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0$ является неположительным оператором:

$$\begin{aligned}(u, (\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0 u) =& \frac{1}{2}\mathbb{E}((u, \hat{L}^2_{S_1}u) + (u, \hat{L}^2_{S_2}u) + (u, \hat{L}^2_{S_2}u)\\ &+ 2(u, \hat{L}_{S_2}\circ\hat{L}_{S_1}u) + 2(u, \hat{L}_{S_3}\circ\hat{L}_{S_3}u) + 2(u, \hat{L}_{S_3}\circ\hat{L}_{S_1}u))\\ =& -\mathbb{E}\|(\hat{L}_{S_1} + \hat{L}_{S_2} + \hat{L}_{S_3})u\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Аналогично рассуждениям в работе [17] рассмотрим квадратичную форму

$$\beta(u,u) = -(u, \hat{H}_2|_{C_0^\infty}v) = \int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\left(A^i{}_k A^j{}_l x^k x^l + 2A^i{}_k h^j x^k + h^i h^j\right)\partial_i u \partial_j u dx, \tag{3.27}$$

для нее справедливо следующее представление

$$\begin{aligned}\beta(u,u) &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}|A^i{}_k x^k\partial_i u + h^i\partial_i u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}|(\nabla u, A\vec{x} + \vec{h})|^2 dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\mathbb{E}(\vec{e}, A\vec{x} + \vec{h})^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\operatorname{Var}(|\vec{x}|(\vec{e}, A\vec{e'}) + (\vec{e}, \vec{h}))dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2(|\vec{x}|^2\operatorname{Var}(\vec{e}, A\vec{e'}) + 2\rho|\vec{x}|\sqrt{\operatorname{Var}(\vec{e}, A\vec{e'})\operatorname{Var}(\vec{e}, \vec{h})} + \operatorname{Var}(\vec{e}, \vec{h}))dx,\end{aligned} \tag{3.28}$$

где $\vec{e} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$, $\vec{e'} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, ρ – линейный коэффициент корреляции случайных величин $(\vec{e}, A\vec{e'})$ и $(\vec{e}, \vec{h})$. Заметим, что если случайные величины $(\vec{e}, A\vec{e'})$ и $(\vec{e}, \vec{h})$, являющиеся линейными комбинациями случайных величин $\{A^i{}_j\}$ и $\{h^i\}$ соответственно, были бы линейно зависимыми, то тогда ковариационная матрица случайного вектора $(\{A^i{}_j\}, \{h^k\})$ была бы вырожденной, что противоречит условию A6. Отсюда следует, что $\exists\gamma > 0 : |\rho| < 1 - \gamma$.

Тогда из (3.28) следуют неравенства

$$-\left(u, C_1(\hat{H}_{S_1} + \hat{H}_{S_2} + \hat{H}_{S_3})u\right) \leqslant \beta(u,u) \leqslant -\left(u, C_2(\hat{H}_{S_1} + \hat{H}_{S_2} + \hat{H}_{S_3})u\right), \tag{3.29}$$

при некоторых $C_1, C_2 > 0$. Откуда следует, что область определения замыкания $\beta(u,u)$ совпадает с областью определения замыкания формы $-(u, (\hat{H}_{S_1} + \hat{H}_{S_2} + \hat{H}_{S_3})u)$. Отсюда также следует, что $\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i}) \subset D(\hat{H}_2)$.

На $\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})$ квадратичная форма оператора $-\hat{H}_2$ мажорирует квадратичные формы операторов $-\hat{H}_{S_i}$. Значит область определения замыкания квадратичной формы оператора $-\hat{H}_2|_{\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})}$ содержится в областях определения замыканий квадратичных форм операторов $-\hat{H}_{S_i}|_{\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})}$. Напомним, что при каждом $i = 1, 2, 3$ оператор $-\hat{H}_{S_i}$ является фридрихсовым расширением оператора $-\hat{H}_{S_i}|_{C_0^\infty}$ [21]. Следовательно, область определения фридрихсова расширения оператора $\hat{H}_2|_{\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})}$ содержится в каждой из областей $D(\hat{H}_{S_i})$, и значит

$$D(\hat{H}_2) \subset \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i}).$$

Следовательно, оператор $\hat{H}_2$, заданный как фридрихсово расширение оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}u(t))'|_{t=0} : \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i}) \to \mathcal{H}$ имеет область определения $D(\hat{H}_2) = \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})$ и самосопряжен. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (3.1), для которой выполнены условия А1-А6. Тогда для любого $u \in D(\hat{H}_2)$ существует производная $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0 u = \hat{H}_2 u + \hat{H}_1 u$.*

Доказательство. Для любого $u \in D(\hat{H}_2)$ справедливо

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0 u =&(\mathbb{E}(\hat{U}_{F_2} \circ \hat{U}_{F_1}))'_0 u = (\mathbb{E}(\hat{U}_{F_2} \circ \hat{U}_{F_1} - \hat{U}_{F_1} + \hat{U}_{F_1}))'_0 u \\ =&\left(\mathbb{E}((\hat{U}_{F_2} - \hat{I}) \circ \hat{U}_{F_1})\right)'_0 u + \left(\mathbb{E}\hat{U}_{F_1}\right)'_0 u = \left(\mathbb{E}\left(\hat{H}_2 + \hat{R}(t)\right)\right)'_0 u + \hat{H}_1 u \\ =&\hat{H}_2 u + \hat{H}_1 u,\end{aligned} \tag{3.30}$$

где $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\|\hat{R}(t)u\|_H = 0$. □

Лемма 3.6. *Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (3.1), для которой выполнены условия А1-А6. Тогда замыкание оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$, является генератором сильно непрерывной полугруппы в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Замыкание оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$ в введенных выше обозначениях можно представить как $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{H}$.

После выделения полного квадрата в формуле (3.28) получаем оценку для $\beta(u,u)$:

$$\beta(u,u) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2(1-\rho^2)\operatorname{Var}(\vec{e},\vec{h})dx \geqslant \alpha \||\nabla u|\|^2, \tag{3.31}$$

где α – некоторая положительная константа, не зависящая от u.

Поскольку полуторалинейная форма β является положительной, то оператор $\hat{H}_2$ является генератором сжимающей полугруппы в $\mathcal{H}$.

Квадратичная форма оператора $\hat{I} + (-\hat{H}_2)$ мажорирует квадратичную форму оператора $\hat{H}_1$, так как справедлива цепочка неравенств:

$$|(\hat{H}_1 v, v)| \leqslant \left\|\mathbb{E}\left({B^i}_j\right)\right\|_{B(\mathbb{R}^n)} \||\vec{x}||\nabla v|\|_{L_2(\mathbb{R})} \|v\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{\epsilon} C((v,v) - \epsilon(\hat{H}_2 v, v)) \tag{3.32}$$

при произвольном $\epsilon \in (0,1]$. Поскольку $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ и квадратичная форма оператора $\hat{I} - \hat{H}_2$ мажорирует квадратичную форму оператора $\hat{H}_1$ в силу неравенства (3.32), то применима теорема о возмущении генератора полугруппы (см., например, [23]). Следовательно, оператор $\hat{H}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы в пространстве $\mathcal{H}$. □

4. Итерации Фейнмана-Чернова

Для последовательности $\{F_k(t)\}, k \in \mathbb{N}$ независимых одинаково распределенных случайных функций вида (3.1) и произвольного неотрицательного t определены последовательности итераций Фейнмана-Чернова:

$$F_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ F_1\left(\frac{t}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Определение 4.1. *Усредняющей по Чернову полугруппой для случайной операторнозначной функции $\hat{U}_F$, порождаемой функцией F вида (3.1), будем называть полугруппу $\hat{W}_F$, генератором которой является замыкание оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$.*

Полугруппа $\hat{W}_F$ порождается решениями задачи Коши для уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \hat{H}u, \qquad u|_{t=0} = u_0 \tag{4.2}$$

для произвольного $u_0 \in \mathcal{H}$, и где оператор $\hat{H}$ на области определения $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$ задается дифференциальным выражением

$$\hat{H} = \mathbb{E}(B^i{}_j x^j + \frac{1}{2} A^i{}_k A^k{}_j x^j + g^i)\partial_i + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(A^i{}_k A^j{}_l x^k x^l + 2A^i{}_k h^j x^k + h^i h^j\right)\partial_i \partial_j. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (3.1), для которой выполнены условия A1-A6. Тогда последовательность усреднений итераций Фейнмана-Чернова сходится в топологии $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ к соответствующей усредняющей по Чернову полугруппе:*

$$\mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n})\circ\ldots\circ F_1(\frac{t}{n})} \xrightarrow{\tau_s} \hat{W}_F(t). \tag{4.4}$$

Доказательство. Согласно леммам 2 и 3 в работе [17] в силу независимости элементов последовательности $\{F_k(t)\}$ для всех $t > 0,\ n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство :

$$\mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n})\circ\ldots\circ \mathbf{F}_1(\frac{t}{n})} = \mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n})} \circ \ldots \circ \mathbb{E}\hat{U}_{F_1(\frac{t}{n})}. \tag{4.5}$$

Сильная непрерывность функции $\mathbb{E}\hat{U}_F(t)$ следует из того, что она является интегралом по вероятностной мере от функции, значениями которой являются сильно непрерывные оператор-функции.

Тогда дальнейшее доказательство теоремы по существу состоит в проверке выполнения условий 1-3 теоремы Чернова для функции $\mathbb{E}\hat{U}_F(t)$.

1. $\mathbb{E}\hat{U}_F(0)$ по построению является тождественным оператором.
2. По лемме 3.2 $\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant e^{\alpha t}$ для некоторого положительного α.
3. По лемме 3.5 замыкание оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$, является генератором сильно непрерывной полугруппы $\hat{W}_F$ в пространстве $\mathcal{H}$.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Furstenberg. *Non-commuting random products* // Trans. Amer. Math. Soc. **108**:3, 377–428 (1963).
2. В.Н. Тутубалин. *О предельных теоремах для произведений случайных матриц* // Теория вероятн. и ее примен. **10**:1, 19–32 (1965).
3. А.В. Скороход. *Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы* // Успехи матем. наук. **37**:6, 157–183 (1982).
4. M.A. Berger. *Central limit theorem for products of random matrices* // Trans. AMS. **285**:2, 777–803 (1984).
5. М.Л. Мета. *Случайные матрицы.* М.: МЦНМО. 2012.
6. Н.Ю. Шубин. *Статистические методы в теории ядра* // Физика элементарных частиц и атомного ядра. **5**:4, 1023–1074 (1974).
7. А.С. Холево. *Стохастические представления квантовых динамических полугрупп* // Тр. МИАН СССР. **191**, 130–139 (1989).
8. G. Teklemariam, E. Fortunato, C.C. Lopez, J. Emerson, J. Paz, T.F.Havel, D. Cory. *Method for modeling decoherence on a quantum-information processor* // Phys. Rev. A **67**, 062316 (2003).
9. V.D. Lakhno. *Translation-invariant bipolarons and the problem of high temperature superconductivity* // Solid State Commun. **152**:7, 621–623 (2012).
10. O. Castejon, V. Kaloshin. *Random Iteration of Maps on a Cylinder and diffusive behavior* // Preprint: arXiv:1501.03319 (2015).
11. С.В. Козырев. *Модель вибронов в квантовом фотосинтезе как аналог модели лазера* // Тр. МИАН. **306**, 158–169 (2019).
12. S. Bonaccorci, F. Cottini, D. Mugnolo. *Random evolution equation: well-posedness, asymptotics and application to graphs* // Appl. Math. Optim. **84**, 2849–2887 (2021).
13. F. Girotti, M. Horssen, R. Carbone, M. Guta. *Large deviations, central limit, and dynamical phase transitions in the atom maser* // J. Math. Phys. **63**, 062202 (2022).

14. Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов* // Тр. МИАН. **285**, 232–243 (2014).
15. Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана* // Изв. РАН. Сер. матем. **80**:6, 141–172 (2016).
16. Дж. Гоф, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Рандомизированное квантование гамильтоновых систем* // Доклады РАН. **498**:1, 31–36 (2021).
17. Р.Ш. Кальметьев, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев. *Итерации Чернова как метод усреднения случайных аффинных преобразований* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **62**:6, 1030–1041 (2022).
18. P. Chernoff. *Note on product formulas for operator semigroups* // J. Funct. Anal. **2**:2, 238–242 (1968).
19. К.Ю. Замана, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Случайные процессы на группе ортогональных матриц и описывающие их эволюционные уравнения* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **60**:10, 1741–1756 (2020).
20. B.C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations* // Springer. (2015).
21. К.Ю. Замана, В.Ж. Сакбаев. *Композиции независимых случайных операторов и связанные с ними дифференциальные уравнения* // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. **49** (2022).
22. К.Ю. Замана. *Усреднение случайных ортогональных преобразований аргумента функций* // Уфимск. матем. журн. **13**:4, 23–41 (2021).
23. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов* // М.: Мир. 1973.

Рустем Шайнурович Кальметьев,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4,
125047, Москва, Россия;
МФТИ,
Институтский пер., 9,
141700, г. Долгопрудный, Россия;
E-mail: kalmetev@phystech.edu

Юрий Николаевич Орлов,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4,
125047, Москва, Россия;
E-mail: ov3159f@yandex.ru

Всеволод Жанович Сакбаев,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4,
125047, Москва, Россия;
МФТИ,
Институтский пер., 9,
141700, г. Долгопрудный, Россия;
ИМВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: fumi2003@mail.ru