ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 1 (2023). С. 44-55.

УДК 517.958

ОБ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЯХ МОДЕЛИ ИЗИНГА-ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

М.М. РАХМАТУЛЛАЕВ, Б.М. ИСАКОВ

Аннотация. Известно, что при низких температурах основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса. Следовательно, задача изучения множества основных состояний для данной физической системы является актуальным.

Рассматривается одна модель смешанного типа (далее назовем моделью Изинга-Поттса) на дереве Кэли, т.е. модели Изинга и Поттса связаны с параметром α, где $\alpha \in [0,1]$. В рассматриваемой статье изучается основное состояние для модели Изинга-Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли. Известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k, где G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка. Определяются периодические и слабо периодические основные состояния, соответствующие нормальным делителям группы G_k. Для модели Изинга-Поттса описано множество периодических и слабо периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группы G_k. Доказано, что при некоторых параметрах нормального делителя не существует таких периодических (не трансляционно-инвариантных) основных состояний. Также доказано, что для нормальной подгруппы состоявшихся из четных слов существуют периодические (не трансляционно-инвариантные) основные состояния и доказано существование слабопериодических (не периодических) основных состояний.

Ключевые слова: дерево Кэли, модель Изинга-Поттса, периодические и слабо периодические основные состояния.

Mathematics Subject Classification: 82B26, 60K35

1. Введение

Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного гамильтониана — это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса.

Известно, что фазовая диаграмма Гиббсовых мер для данного гамильтониана близка к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса (см. [1], [2]). Поэтому, естественно возникает задача описания основных состояний.

В работе [5] изучены трансляционно-инвариантные и периодические основные состояния для модели Изинга на дереве Кэли. В работе [6] вводится понятие слабо периодических основных состояний. Слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями описаны в работах [6] и [7]. Периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k = 2$ изучены в работах [8] и [9]. В работе [10] для модели Поттса изучены

M.M. Rakhmatullaev, B.M. Isakov, Ground states of the model Ising-Potts on a Cayle tree.

Поступила 10 февраля 2022 г.

слабо периодические основные состояния для нормального делителя индекса 2. В работе [11] для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$ описано множество периодических и слабо периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 4 группового представления дерева Кэли. В работах [12] и [13] изучены периодические и слабо периодические основные состояния для λ-модели на дереве Кэли. А в работе [14] для модели Изинга изучены периодические основные состояния относительно подгруппы индекса три. В работе [16] на основе репличного алгоритма методом Монте-Карло выполнены исследования фазовых переходов антиферромагнитной слоистой модели Изинга на кубической решетке с учетом внутрислойных взаимодействий вторых ближайших соседей в малых диапазонах. В работе [17] изучены разные фазовые переходы и взаимодействие 2-х и 3-х ближайших соседей методом Монте-Карло для модели Поттса при $q = 3$. В работе [18] показано, что переход из антиферромагнитной и коллинеарной фаз в парамагнитную является фазовым переходом первого рода, в то время как переход из фрустрированной области в парамагнитную — фазовым переходом второго рода для модели Поттса при $q = 3$ на треугольной решетке. В работе [19] ферро и антиферромагнитная трехвершинная ($q = 3$) модель Поттса на треугольной решетке с учетом взаимодействия вторых ближайших соседей.

В недавней работе [20] авторы рассмотрели модель Поттса на дереве Кэли и доказали существование новых классов гиббсовских мер отличающихся от ранее известных.

В данной работе рассматривается одна модель смешанного типа (далее назовем моделью Изинга-Поттса) на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$. Модели Изинга и Поттса связаны с параметром α, где $\alpha \in [0, 1]$. Если $\alpha = 0$, тогда модель совпадает с моделью Поттса, если $\alpha = 1$, тогда модель совпадает с моделью Изинга. Для модели Изинга-Поттса относительно нормального делителя группы G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп $\{e, a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, соответственно, т.е. $a_i^2 = e$ (см. [15]), определяются периодические и слабо-периодические основные состояния.

В заключение этого параграфа кратко опишем структуру статьи. В следующем параграфе вводятся основные определения и известные факты. В третьем параграфе исследуются периодические и слабо периодические основные состояния.

2. Определения и известные факты

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geqslant 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k.

Пусть G_k — свободное произведение $k+1$ циклической группы $\{e, a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, соответственно, т.е. $a_i^2 = e$ (см. [15]).

Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k (см. [10], [4]).

Две вершины $x, y \in V$ называются соседними, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l \in L$, и в этом случае мы будем писать $l = \langle x, y \rangle$.

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V | d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m$, $L_n = \{\langle x, y \rangle \in L | x, y \in V_n\}$, где $d(x, y)$ — расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющих x и y .

Обозначим через $S(x)$ множество «прямых потомков» точки $x \in G_k$, т.е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$ и через $x_{\downarrow}$ обозначим единственный элемент множества $S_1(x) \setminus S(x)$.

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, \ldots, H_r\}$ фактор группа, где G_k^*-нормальный делитель индекса $r \geqslant 1$.

Определение 2.1. *Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^*-периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x_i \in H_j$, $\forall x \in G_k$. G_k-периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.*

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

Определение 2.2. *Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^*-слабо периодической, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x_\downarrow \in H_i$, $x \in H_j$, $\forall x \in G_k$.*

Гамильтониан модели Изинга-Поттса имеет вид

$$H(\sigma) = -\alpha J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in\ L} \sigma(x)\sigma(y) - (1-\alpha) J_2 \sum_{\langle x,y\rangle \in\ L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{2.1}$$

где $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i\ = j. \end{cases} \tag{2.2}$$

3. Основные состояния

Для пары конфигураций σ и φ, совпадающих почти всюду, т.е. всюду, за исключением конечного числа точек, мы рассматриваем относительный гамильтониан $H(\sigma, \varphi)$ — различие между энергиями конфигураций σ, φ, т.е.

$$H(\sigma,\varphi) = -\alpha J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle,\\ x,y\in V}} (\sigma(x)\sigma(y) - \varphi(x)\varphi(y)) - (1-\alpha) J_2 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle,\\ x,y\in V}} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}), \tag{3.1}$$

где $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ — произвольный фиксированный параметр.

Пусть M — множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ ограниченной конфигурацией σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2}\alpha J_1 \sum_{<x,y>\in L} \sigma(x)\sigma(y) - \frac{1}{2}(1-\alpha) J_2 \sum_{<x,y>\in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}. \tag{3.2}$$

Известна следующая лемма ([6], [8]):

Лемма 3.1. *Относительный гамильтониан* (2.2) *имеет вид*

$$H(\sigma,\varphi) = \sum_{b\in M} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)).$$

В этой работе рассмотрим случай $k = 2$. Через c_b обозначим центр единичного шара b. Пусть

$$B_- = \{x \in S_1(c_b) : \varphi_b(x) = -1\},$$
$$B_0 = \{x \in S_1(c_b) : \varphi_b(x) = 0\},$$
$$B_+ = \{x \in S_1(c_b) : \varphi_b(x) = 1\}.$$

Пусть $\varphi_b(c_b) = z$, $z \in \Phi$ и $|B_-| = d$, $|B_+| = t$. Тогда $|B_0| = 3 - d - t$. Легко доказывается

Лемма 3.2. *Для каждой конфигурации σ_b верно следующее:*
$$U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, U_3, \dots, U_{12}\},$$
где
$$U_1 = 0, \qquad U_2 = -\frac{3\alpha}{2}J_1 - \frac{3}{2}(1-\alpha)J_2, \qquad U_3 = \frac{3\alpha}{2}J_1,$$
$$U_4 = -\alpha J_1 - (1-\alpha)J_2, \qquad U_5 = -\frac{\alpha}{2}J_1 - \frac{1-\alpha}{2}J_2, \qquad U_6 = -\frac{\alpha}{2}J_1 - (1-\alpha)J_2,$$
$$U_7 = \frac{\alpha}{2}J_1 - \frac{1-\alpha}{2}J_2, \qquad U_8 = \alpha J_1, \qquad U_9 = \frac{\alpha}{2}J_1,$$
$$U_{10} = -\frac{1-\alpha}{2}J_2, \qquad U_{11} = -\frac{3-3\alpha}{2}J_2, \qquad U_{12} = -(1-\alpha)J_2.$$

Определение 3.1. *Конфигурация φ называется основным состоянием гамильтониана H, если $U(\varphi_b) = \min\{U_1, U_2, U_3, \dots, U_{12}\}$ для любого $b \in M$.*

Периодическую (слабо периодическую, трансляционно-инвариантную) конфигурацию, являющуюся основным состоянием, далее назовем *периодическим (слабо периодическим, трансляционно-инвариантным) основным состоянием.*

Целью этой работы является описание множества периодических и слабо периодических основных состояний для модели Изинга-Поттса на дереве Кэли порядка $k = 2$, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группового представления дерева Кэли.

Обозначим $C_i = \{\varphi_b : U(\varphi_b) = U_i\}$ и
$$A_i = \left\{J \in \mathbb{R}^2 : U_i = \min\{U_1, U_2, U_3, \dots, U_{12}\}\right\}, \tag{3.3}$$
где $i = 1, 2, \dots, 12$.

Нетрудный, но достаточно громоздкий анализ показывает, что A_i имеет вид:
$$A_1 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 \geqslant 0; \frac{\alpha-1}{\alpha}J_2 \geqslant J_1\},$$
$$A_2 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 \geqslant 0; \frac{\alpha-1}{\alpha}J_2 \leqslant J_1\},$$
$$A_3 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 \leqslant 0; \frac{\alpha-1}{\alpha}J_2 \geqslant J_1\},$$
$$A_4 = A_5 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}J_2; J_2 \leqslant 0\},$$
$$A_6 = A_7 = A_{10} = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = 0; J_2 = 0\},$$
$$A_8 = A_9 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = 0; J_2 \leqslant 0\},$$
$$A_{11} = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 \geqslant \frac{-(1-\alpha)}{\alpha}J_2; J_2 \geqslant 0\},$$
$$A_{12} = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 \leqslant 0; J_2 = 0\}.$$

Легко проверить, что
$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{12} A_i.$$
На Рисунке 1 показано расположение A_i, $i = 1, 2, \dots, 12$ в плоскости.

3.1. Трансляционно-инвариантные основные состояния. В этом подпункте мы изучаем трансляционно-инвариантные основные состояния. Напомним, что конфигурация $\sigma(x)$ называется трансляционно-инвариантной, если $\sigma(x) = i$, $\forall x \in V$, $i \in \Phi$.

Доказана следующая

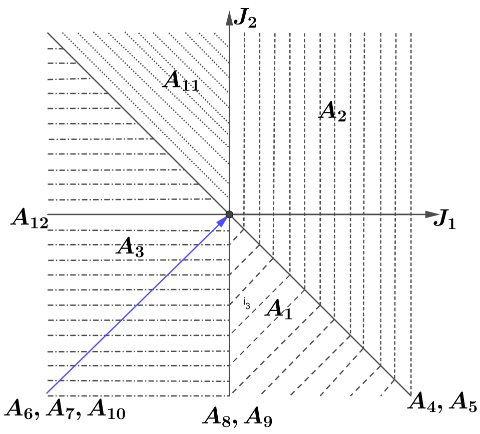

Рис. 1. Расположение A_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$ в плоскости.

Теорема 3.1. *Пусть $k = 2$. Для модели Изинга-Поттса верны следующие утверждения:*

1) На множестве A_{11} существует единственное трансляционно-инвариантное основное состояние и оно имеет вид $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in G_k$.

2) На множестве A_2 существуют два основных состояния и они имеют вид $\varphi(x) = \pm 1$, $\forall x \in G_k$.

3) Если $(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (A_{11} \cup A_2)$, тогда не существует трансляционно-инвариантного основного состояния.

Доказательство. 1. Пусть $\varphi(x) = 0,\ \forall x \in G_k$. Тогда $\forall b \in M$, имеем, что $\varphi_b(c_b) = 0, |B_-| = 0, |B_+| = 0, |B_0| = 3$, следовательно $\varphi_b \in C_{11}$. Значит конфигурация $\varphi(x) = 0, \forall x \in G_k$ является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_{11}

2. Пусть $\varphi(x) = 1, \forall x \in G_k$. Тогда $\forall b \in M$, имеем, что $\varphi_b(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_+| = 3, |B_0| = 0$, следовательно $\varphi_b \in C_2$. Отсюда получим, что конфигурация $\varphi(x) = 1, \forall x \in G_k$ является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_2.

Пусть $\varphi(x) = -1, \forall x \in G_k$. Тогда $\forall b \in M$, имеем, что $\varphi_b(c_b) = -1, |B_-| = 3, |B_+| = 0, |B_0| = 0$, следовательно $\varphi_b \in C_2$. Отсюда получим, что конфигурация $\varphi(x) = -1, \forall x \in G_k$ является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_2.

3. Очевидно. □

Замечание 3.1. *Отметим, что при $\alpha = 0$, Гамильтониан* (2.1) *описывает модели Поттса. Тогда теорема 3.1 совпадает с пунктом Б.1. Теоремы 2 из работы* [8] *в случае $J_2^* = 0$. ($J_2^* = J_2$ из работы* [8]*).*

3.2. Периодические основные состояния. Пусть $A \subset \{1, 2, \ldots, k+1\}$. Известно, что любой нормальный делитель индекса два группы G_k, имеет следующий вид (см. [10]):

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{четно}\}.$$

Рассмотрим фактор группу $G_k/H_A = \{H_0, H_1\}$, где $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_0$. В этом пункте изучим H_A-периодическое основное состояние. H_A-периодическая конфигурация имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sigma_1, & \text{если} \quad x \in H_0, \\ \sigma_2, & \text{если} \quad x \in H_1, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\sigma_1, \sigma_2 \in \Phi$.

Теорема 3.2. *Пусть $k = 2$ и $|A| = 1$. Тогда всякие H_A-периодические основные состояния являются трансляционно инвариантными.*

Доказательство. При $\sigma_1 = \sigma_2$, имеем, что H_A-периодическая конфигурация (3.4) является трансляционно-инвариантным состоянием, которое изучено в теореме 2.1.

Рассмотрим случай где $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Пусть

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x \in H_0, \\ \ \ 0, & \text{если} \quad x \in H_1. \end{cases}$$

Если $c_b \in H_0$, тогда $\forall b \in M$, имеем, что $\varphi_{1,b}(c_b) = -1$, $|B_-| = 2$, $|B_0| = 1$, $|B_+| = 0$, следовательно $\varphi_{1,b} \in C_4$. Если $c_b \in H_1$, тогда $\varphi_{1,b}(c_b) = 0$, $|B_-| = 1$, $|B_0| = 2$, $|B_+| = 0$, следовательно $\varphi_{1,b} \in C_{12}$. Так как $A_4 \cap A_{12} = \{0, 0\}$, следует что, соответствующая конфигурация не является основным состоянием на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Пусть

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x \in H_0, \\ \ \ 1, & \text{если} \quad x \in H_1. \end{cases}$$

Если $c_b \in H_0$, тогда $\forall b \in M$, имеем, что $\varphi_{2,b}(c_b) = -1$, $|B_-| = 2$, $|B_0| = 0$, $|B_+| = 1$, следовательно $\varphi_{2,b} \in C_6$. Если $c_b \in H_1$, тогда $\forall b \in M$, имеем, что $\varphi_{2,b}(c_b) = 1$, $|B_-| = 1$, $|B_0| = 0$, $|B_+| = 2$, следовательно $\varphi_{2,b} \in C_7$. Так как $A_6 \cap A_7 = \{0, 0\}$, следует что, соответствующая конфигурация не является основным состоянием на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Пусть

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \ \ 0, & \text{если} \quad x \in H_0, \\ -1, & \text{если} \quad x \in H_1. \end{cases}$$

Если $c_b \in H_0$, тогда $\forall b \in M$, имеем что $\varphi_{3,b}(c_b) = 0$, $|B_-| = 1$, $|B_0| = 2$, $|B_+| = 0$, следовательно $\varphi_{3,b} \in C_{12}$. Если $c_b \in H_1$, тогда $\forall b \in M$, имеем что $\varphi_{3,b}(c_b) = -1$, $|B_-| = 2$, $|B_0| = 1$, $|B_+| = 0$ следовательно $\varphi_{3,b} \in C_4$.Так как $A_4 \cap A_{12} = \{0, 0\}$, соответствующая конфигурация не является основным состоянием на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Для конфигурации $\varphi_4(x) = -\varphi_1(x)$, $\varphi_5(x) = -\varphi_2(x)$ и $\varphi_6(x) = -\varphi_3(x)$ подобным методом легко доказать, что соответствующие конфигурации также не являются основными состояниями на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Отметим, что кроме $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,6}$ не существует H_0-периодических (не трансляционно-инвариантных) конфигураций. □

Аналогичным методом при $|A| = 2$ можно доказать следующую теорему:

Теорема 3.3. *Пусть $k = 2$ и $|A| = 2$. Тогда всякие H_A-периодические основные состояния являются трансляционно инвариантными.*

Отметим, что при $k = 2$ и $|A| = 3$, нормальный делитель H_A имеет вид:

$$G_k^{(2)} = \{x : |x| - \text{четно}\}$$

(см. [10]). Для $G_k^{(2)}$-периодических основных состояний получена следующая теорема.

Теорема 3.4. *Пусть $k = 2$. Тогда для модели Изинга-Поттса верны следующие утверждения:*

I) На множестве A_3 существуют два $G_k^{(2)}$-периодических основных состояния и они имеют вид:

$$\sigma(x) = \pm \begin{cases} \ \ 1, & \textit{если} \quad x \in H_0, \\ -1, & \textit{если} \quad x \in H_1. \end{cases}$$

II) На множестве A_1 существуют четыре $G_k^{(2)}$-периодических основных состояния и они имеют вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} i, & \textit{если} \quad x \in H_0, \\ j, & \textit{если} \quad x \in H_1, \end{cases}$$

где $|i-j|$ *=1* $(i,j\in\Phi)$.

Доказательство. Докажем пункт I. Рассмотрим конфигурации:

$$\sigma_1(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ -1, & \text{если} \quad x\in H_1.\end{cases}$$

Если $c_b\in H_0$, тогда $\forall b\in M$, имеем что $\varphi_{1,b}(c_b)=1$, $|B_-|=3$, $|B_0|=0$, $|B_+|=0$, следовательно $\varphi_{1,b}\in C_3$. Если $c_b\in H_1$, тогда $\varphi_{1,b}(c_b)=-1$, $|B_-|=0$, $|B_0|=0$, $|B_+|=3$, следовательно $\varphi_{1,b}\in C_3$. Отсюда видим, что на $G_k^{(2)}$ конфигурация $\sigma_1(x)$ является периодическим основным состоянием на A_3.

Теперь рассмотрим:

$$\sigma_2(x)=\begin{cases}-1, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ 1, & \text{если} \quad x\in H_1.\end{cases}$$

Конфигурация $\sigma_2(x)$ также является периодическим основным состоянием на A_3. Доказывается аналогично доказательству для $\sigma_1(x)$.

Докажем пункт II. Рассмотрим конфигурации:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ -1, & \text{если} \quad x\in H_1.\end{cases}$$

Если $c_b\in H_0$, тогда $\forall b\in M$, имеем что $\varphi_{1,b}(c_b)=0$, $|B_-|=3$, $|B_0|=0$, $|B_+|=0$, следовательно $\varphi_{1,b}\in C_1$. Если $c_b\in H_1$, тогда $\forall b\in M$, имеем что $\varphi_{1,b}(c_b)=-1$, $|B_-|=0$, $|B_0|=3$, $|B_+|=0$ следовательно $\varphi_{1,b}\in C_1$. Отсюда видим, что на G_k^2 конфигурация σ_1 является периодическим основным состоянием на A_1.

Теперь рассмотрим:

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}-1, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ 0, & \text{если} \quad x\in H_1.\end{cases}$$

Конфигурация $\varphi_2(x)$ также является периодическим основным состоянием на A_1. Доказывается аналогично доказательству для $\varphi_1(x)$.

Теперь рассмотрим:

$$\varphi_3(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ 1, & \text{если} \quad x\in H_1.\end{cases}$$

Если $c_b\in H_0$, тогда $\forall b\in M$, имеем что $\varphi_{3,b}(c_b)=0$, $|B_-|=0$, $|B_0|=0$, $|B_+|=3$, следовательно $\varphi_{3,b}\in C_1$. Если $c_b\in H_1$, тогда $\forall b\in M$, имеем что $\varphi_{3,b}(c_b)=1$, $|B_-|=0$, $|B_0|=3$, $|B_+|=0$ следовательно $\varphi_{3,b}\in C_1$. Отсюда видим, что на $G_k^{(2)}$ конфигурация φ_3 является периодическим основным состоянием на A_1.

Теперь рассмотрим:

$$\varphi_4(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ 0, & \text{если} \quad x\in H_1.\end{cases}$$

Конфигурация $\varphi_4(x)$ также является периодическим основным состоянием на A_1. Доказывается аналогично доказательству $\varphi_3(x)$. Отсюда видим, что на $G_k^{(2)}$ конфигурации $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,4}$ являются периодическими основными состояниями на A_1. □

Замечание 3.2. *Отметим, что при* $\alpha=0$, *Гамильтониан* (2.1) *описывает модели Поттса. Тогда теорема 3.4 совпадает с пунктом Б.3 теоремы 2 из работы* [8] *в случае* $J_2=0$.

3.3. Слабо периодические основные состояния. Изучим H_A-слабо периодическое основное состояние. H_A-слабо периодическая конфигурация имеет следующий вид:

$$\varphi_(x) = \begin{cases} \sigma_{0,0}, & \text{если} \quad x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ \sigma_{0,1}, & \text{если} \quad x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ \sigma_{1,0}, & \text{если} \quad x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ \sigma_{1,1}, & \text{если} \quad x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

где $\sigma_{i,j} \in \Phi, \ i, j = \overline{0,1}$.

Далее для удобства слабо периодическую конфигурацию $\varphi(x)$, $x \in G_k$, напишем в виде $\varphi = (\sigma_{0,0}, \sigma_{0,1}, \sigma_{1,0}, \sigma_{1,1})$.

Теорема 3.5. *Пусть $k = 2$ и $|A| = 1$. Тогда для модели Изинга-Поттса верны следующие утверждения:*

I) На множестве $\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} J_2; J_2 \leqslant 0\}$ существуют шесть H_A-слабо периодических (непериодических) основных состояний и они имеют вид:

$$(1, 1, 0, 1), (-1, -1, 0, -1), (1, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, -1), (-1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1).$$

II) Всякие H_A-слабо периодические основные состояния кроме конфигураций указанных в пункте I являются трансляционно-инвариантными.

Доказательство. Докажем пункт I. Рассмотрим конфигурацию:

$$\varphi_1 = (1, 1, 0, 1).$$

1. Пусть $c_b \in H_0$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{1,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 0, |B_+| = 3$, следовательно $\varphi_{1,b} \in C_4$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1,b}(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_{1,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 1, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{1,b} \in C_4$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{1,b}(c_b) = 0, |B_-| = 0, |B_0| = 0, |B_+| = 3$, следовательно, $\varphi_{1,b} \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{1,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 0, |B_+| = 3$, следовательно $\varphi_{1,b} \in C_4$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{1,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 1, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{1,b} \in C_4$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{1,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 0, |B_+| = 3$, следовательно, $\varphi_{1,b} \in C_1$.

Отсюда получим, что на множестве $A_1 \cap A_4 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} J_2; J_2 \leqslant 0\}$ слабо периодическая конфигурация φ_1 является $G_k^{(2)}$- слабо периодическим основным состоянием.

Теперь рассмотрим :

$$\varphi_2 = (-1, -1, 0, -1).$$

1. Пусть $c_b \in H_0$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{2,b}(c_b) = -1, |B_-| = 3, |B_0| = 0, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{2,b} \in C_4$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_{2,b}(c_b) = -1, |B_-| = 2, |B_0| = 1, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{2,b} \in C_4$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{2,b}(c_b) = 0, |B_-| = 3, |B_0| = 0, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{2,b} \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{2,b}(c_b) = -1, |B_-| = 3, |B_0| = 0, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{2,b} \in C_4$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{2,b}(c_b) = -1, |B_-| = 2, |B_0| = 1, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{2,b} \in C_4$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{2,b}(c_b) = -1, |B_-| = 3, |B_0| = 0, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{2,b} \in C_1$.

Отсюда получим, что на множестве $A_1 \cap A_4 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} J_2; J_2 \leqslant 0\}$ слабо периодическая конфигурация φ_2 является $G_k^{(2)}$- слабо периодическим основным состоянием.

Теперь рассмотрим :

$$\varphi_3 = (1, 0, 1, 1).$$

1. Пусть $c_b \in H_0$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{3,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 1, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{3,b} \in C_4$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{3,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 0, |B_+| = 3$, следовательно, $\varphi_{3,b} \in C_4$.

2. Пусть $c_b \in H_1$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{3,b}(c_b) = 0, |B_-| = 0, |B_0| = 0, |B_+| = 3$, следовательно, $\varphi_{3,b} \in C_2$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{3,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 0, |B_+| = 3$, следовательно, $\varphi_{3,b} \in C_2$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_{3,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 1, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{3,b} \in C_4$.

Отсюда получим, что на множестве $A_2 \cap A_4 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} J_2; J_2 \leqslant 0\}$ слабо периодическая конфигурация φ_3 является $G_k^{(2)}$- слабо периодическим основным состоянием.

Теперь рассмотрим :

$$\varphi_4 = (-1, 0, -1, -1).$$

1. Пусть $c_b \in H_0$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{4,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{4,b}(c_b) = -1, |B_-| = 2, |B_0| = 1, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{4,b} \in C_4$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{4,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{4,b}(c_b) = -1, |B_-| = 3, |B_0| = 0, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{4,b} \in C_4$.

2. Пусть $c_b \in H_1$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{4,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{4,b}(c_b) = 0, |B_-| = 3, |B_0| = 0, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{4,b} \in C_2$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{4,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{4,b}(c_b) = -1, |B_-| = 3, |B_0| = 0, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{4,b} \in C_2$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{4,b}(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_{4,b}(c_b) = -1, |B_-| = 2, |B_0| = 1, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{4,b} \in C_4$.

Отсюда получим, что на множестве $A_2 \cap A_4 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} J_2; J_2 \leqslant 0\}$ слабо периодическая конфигурация φ_4 является $G_k^{(2)}$- слабо периодическим основным состоянием.

Теперь рассмотрим :

$$\varphi_5 = (-1, 0, 0, 1).$$

1. Пусть $c_b \in H_0$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{5,b}(c_b) = -1, |B_-| = 2, |B_0| = 1, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{5,b} \in C_4$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{5,b}(c_b) = 0, |B_-| = 1, |B_0| = 0, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{5,b} \in C_1$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{5,b}(c_b) = 0, |B_-| = 2, |B_0| = 0, |B_+| = 1$, следовательно, $\varphi_{5,b} \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{5,b}(c_b) = 0, |B_-| = 1, |B_0| = 0, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{5,b} \in C_1$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_{5,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 2, |B_+| = 1$, следовательно, $\varphi_{5,b} \in C_5$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{5,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 1, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{5,b} \in C_4$.

Отсюда получим, что на множестве $A_1 \cap A_4 \cap A_5 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} J_2; J_2 \leqslant 0\}$ слабо периодическая конфигурация φ_5 является $G_k^{(2)}$- слабо периодическим основным состоянием.

Теперь рассмотрим:

$$\varphi_6 = (1, 0, 0, -1).$$

1. Пусть $c_b \in H_0$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{6,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 1, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{6,b} \in C_4$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{6,b}(c_b) = 0, |B_-| = 2, |B_0| = 0, |B_+| = 1$, следовательно, $\varphi_{6,b} \in C_1$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{6,b}(c_b) = 0, |B_-| = 1, |B_0| = 0, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{6,b} \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{6,b}(c_b) = 0, |B_-| = 2, |B_0| = 0, |B_+| = 1$, следовательно, $\varphi_{6,b} \in C_1$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_{6,b}(c_b) = -1, |B_-| = 1, |B_0| = 2, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{6,b} \in C_5$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{6,b}(c_b) = -1, |B_-| = 2, |B_0| = 1, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{6,b} \in C_4$.

Отсюда получим, что на множестве $A_1 \cap A_4 \cap A_5 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} J_2; J_2 \leqslant 0\}$ слабо периодическая конфигурация φ_4 является $G_k^{(2)}$-слабо периодическим основным состоянием. Заметим что, во всех случаях область пересечений A_1, A_2, A_4 и A_5 равна множеству

$$\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | J_1 = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} J_2; J_2 \leqslant 0\}.$$

Значит на множестве $\{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 | \alpha J_1 = -(1-\alpha) J_2; (1-\alpha) J_2 \leqslant 0\}$ конфигурация φ_i, $i = \overline{1.6}$ является слабо периодическим основным состоянием. Отсюда следует, что первая часть теоремы доказана.

Теперь докажем пункт II: Рассмотрим произвольную конфигурацию отличающуюся от конфигурации из пункта I:

$$\varphi_7 = (1, 1, 0, -1).$$

1. Пусть $c_b \in H_0$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{7,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{7,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 0, |B_+| = 3$, следовательно, $\varphi_{7,b} \in C_2$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{7,b}(c_{b\downarrow}) = 0$, тогда $\varphi_{7,b}(c_b) = 1, |B_-| = 0, |B_0| = 1, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{7,b} \in C_4$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{7,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{7,b}(c_b) = 0, |B_-| = 1, |B_0| = 0, |B_+| = 2$, следовательно, $\varphi_{7,b} \in C_1$.

2. Пусть $c_b \in H_1$, возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{7,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{7,b}(c_b) = 1, |B_-| = 2, |B_0| = 0, |B_+| = 1$, следовательно, $\varphi_{7,b} \in C_7$.

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{7,b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{7,b}(c_b) = -1, |B_-| = 1, |B_0| = 1, |B_+| = 1$, следовательно, $\varphi_{7,b} \in C_{10}$.

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{7,b}(c_{b\downarrow}) = -1$, тогда $\varphi_{7,b}(c_b) = -1, |B_-| = 2, |B_0| = 1, |B_+| = 0$, следовательно, $\varphi_{7,b} \in C_4$.

Отсюда получим, что пересечение $A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_7 \cap A_{10}$ дает нам точку (0,0).

Это нам дает, что конфигурация $\varphi_{7,b}$ является трансляционно-инвариантной. Аналогичным методом можно доказать остальные случаи. Значит, все конфигурации кроме указанных в пункте I являются трансляционно-инвариантными на $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. □

Замечание 3.3. *В работе* [10] *доказано, что для модели Поттса на дереве Кэли порядка два, при $|A| = 1$ не существует H_A-слабо периодических (непериодических) основных состояний. А для модели Изинга-Поттса на дереве Кэли порядка два, при $|A| = 1$ существуют H_A-слабо периодические (непериодические) основные состояния.*

Благодарности

Авторы выражают глубокую признательность профессорам Н.Н. Ганиходжаеву и У.А. Розикову за полезные советы по работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Я.Г. Синай. *Теория фазовых переходов. Строгие результаты.* М.: Наука. 1980.
2. Р.А. Минлос. *Введение в математическую статистическую физику.* Пер. с англ. Ю.В. Жукова. – М.: МЦНМО, 2002.
3. U.A. Rozikov. *Gibbs measures on Cayley trees: results and open problems* // Rev. Math. Phys. **25**:1, 112 pp. (2013).
4. Н.Н. Ганиходжаев, У.А. Розиков. *Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли* // ТМФ. **111**:1, 109–117 (1997).
5. U.A. Rozikov. *A Constructive description of ground states and Gibbs measures for Ising model with two-step interactions on Cayley tree* // Jour. Statist. Phys. 122, 217–235 (2006).
6. У.А. Розиков, М.М. Рахматуллаев. *Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли* // ТМФ. **160**:3, 507–516 (2009).
7. M.M. Rahmatullaev. *Description of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree* // Appl. Math. and Inf. Science. **4**:2, 237–241 (2010).
8. Г.И. Ботиров, У.А. Розиков. *Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод* // ТМФ. **153**:1, 86–97 (2007).
9. F.M. Mukhamedov, U.A. Rozikov, F.F. Mendes. *On contour arguments for the three state Potts model with competing interactions on a semi-infinite Cayley tree* // J. Math Phys. **48**, 013301 (2007).
10. М.М. Рахматуллаев. *Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли* // ТМФ. **176**:3, 477–493 (2013).
11. М.А. Расулова, М.М. Рахматуллаев. *Периодические и слабо периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли* // Матем. тр. **18**:2, 112–132 (2015).
12. Ф.М. Мухамедова, Ч. Пах, Х. Джамиль. *Основные состояния и фазовые переходы $\lambda-$ модели на дереве Кэли* // ТМФ. **194**:2, 304–319 (2018).

13. F.M. Mukhamedov, M.M. Rahmatullaev, M.A. Rasulova. *Weakly periodic ground states for the $\lambda-$model* // Ukr. Math. Zhur. **72**:5, 771–784 (2020).
14. M.M. Rahmatullaev, D.O. Egamov, F.H. Haydarov. *Periodic and weakly periodic ground states corresponding to subgroups of index three for the ising model on Cayley tree* // Rep. Math. Phys. **88**:2, 247–257 (2021).
15. М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. *Основы теории групп.* М.: Наука. 1982.
16. М.К. Рамазанов, А.К. Муртазаев. *Фазовые переходы в антиферромагнитной слоистой модели Изинга на кубической решетке* // Письма в ЖЭТФ. **103**:7, 522–526 (2016).
17. F.A. Kassan-Oglya, A.K. Murtazaev, A.K. Zhuravleva, M.K. Ramazanov, A.I. Proshkina. *Ising model on a square lattice with second-neighbor and third-neighbor interactions* // J. Magn. Magn. Mat. **384**, 247–254 (2015).
18. М.А. Магомедов, А.К. Муртазаев, Л.К. Магомедова. *Фазовые переходы в модели Поттса на треугольной решетке* // Естественные науки. **32**:4, 14–24 (2017).
19. А.Б. Бабаев, М.А. Магомедов, А.К. Муртазаев, Ф.А. Кассан-Оглы, А.И. Прошкин. *Фазовые переходы в двумерной антиферромагнитной модели Поттса на треугольной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей* // ЖЭТФ. **149**:2, 357–366 (2016).
20. M.M. Rahmatullaev, D.J. Dekhkonov. *The Potts model on a Cayley tree: the new class of Gibbs measures* // Preprint: arXiv:2211.12128 (2022).

Музаффар Мухаммаджанович Рахматуллаев,
Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Узбекистан,
ул. Университетская, 7,
100174, Ташкент, Узбекистан
Наманганский государственный университет,
ул. Уйчи, 316,
160136, Наманган, Узбекистан
E-mail: `mrahmatullaev@rambler.ru`

Бегзод Мухторжонович Исаков,
Андижанский государственный университет,
ул. Университетская, 129,
170100, Андижан, Узбекистан
E-mail: `begzod1981bek@gmail.com`