ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 1 (2023). С. 35-43.

УДК 517.986.2

ЧАСТИЧНЫЕ ПОРЯДКИ НА $*$-РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЬЦАХ

К.К. КУДАЙБЕРГЕНОВ, Б.О. НУРЖАНОВ

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются некоторые новые частичные порядки на $*$-регулярных кольцах. Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-регулярное кольцо, $P(\mathcal{A})$ — решетка всех проекторов из $\mathcal{A}$ и μ — точная нормальная нормированная мера на $P(\mathcal{A})$. Предположим, что $(\mathcal{A}, \rho)$ — полное метрическое $*$-кольцо относительно ранк-метрики ρ на $\mathcal{A}$, определяемую следующим образом $\rho(x, y) = \mu(l(x - y)) = \mu(r(x - y))$, $x, y \in \mathcal{A}$, где $l(a), r(a)$ — левый и правый носитель элемента a, соответственно. На $\mathcal{A}$ определим следующие три частичных порядка: $a \prec_s b \iff b = a + c$, $a \perp c$; $a \prec_l b \iff l(a)b = a$; $a \prec_r b \iff br(a) = a$, $a \perp c$ означает алгебраическую ортогональность, т.е. $ac = ca = a^*c = ac^* = 0$. Доказано, что порядковые топологии, ассоциированные с этими частичными порядками, сильнее чем топология, порожденная метрикой ρ. Рассматриваются сужения этих частичных порядков на подмножества проекторов, унитарных операторов и частичных изометрий $*$-регулярной алгебры $\mathcal{A}$. В частности, показано, что эти три порядка совпадают с обычным порядком $\leq$ на решетке проекторов $*$-регулярной алгебры. Также показывается, что кольцевые изоморфизмы $*$-регулярных колец сохраняют частичные порядки $\prec_l$ и $\prec_r$.

Ключевые слова: частичный порядок, $*$-регулярное кольцо, алгебра фон Неймана, порядковая топология.

Mathematics Subject Classification: 46L10, 46L51, 16E50

1. Введение

Г. Биркгоф и Дж. фон Нейман в своей знаменитой статье [1] показали, что набор утверждений квантовой механики имеет алгебраические свойства, отличные от булевой алгебры, а именно структуру ортомодулярной решетки. Тематика регулярных колец фон Неймана является частью некоммутативной теории колец, которая была первоначально введена фон Нейманом для прояснения некоторых аспектов операторных алгебр [2], [3]. Во многом развитие регулярных колец вызвано этой и рядом других связей с функциональным анализом двух основных типов: конструкции регулярных колец, ассоциированных с операторными алгебрами и полными дополненными модулярными решетками, а также структурными аналогиями между регулярными кольцами и операторными алгебрами. Современное состояние ортомодулярных решеток можно найти в работах [4], [5]. Существует ряд работ, посвященных звездному порядку и топологиям алгебр фон Неймана [6], [7]. В работе [6] была изучена топология, порожденная звездным порядком на алгебрах фон Неймана, и доказана, что порядковая топология тоньше, чем σ-сильная* топология. Также показано, что порядковая топология совпадает с топологией сходимости по норме тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана конечномерна. В работе [8] авторы исследовали порядковую топологию на эрмитовой части алгебры фон Неймана

K.K. Kudaybergenov, B.O. Nurjanov, Partial orders on $*$-regular rings.

Исследование первого автора выполнено при частичной финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2022-896.

Поступила 25 декабря 2021 г.

и дали характеризацию многих важных свойств алгебр фон Неймана, таких как конечность, сигма-конечность, конечность и атомичность, с точки зрения того, как порядковая топология сравнивается с другими известными топологиями на алгебрах фон Неймана.

В данной работе вводятся некоторые новые порядковые отношения на $*$-регулярных кольцах в смысле фон Неймана. Работа организована следующим образом. Во втором параграфе собраны некоторые основные факты о $*$-регулярных кольцах в смысле фон Неймана, мерах на решетке проекторов $*$-регулярных алгебр и алгебрах Мюррея-фон Неймана. В третьем параграфе вводятся некоторые новые частичные порядки на $*$-регулярных кольцах. Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-регулярное кольцо и $a, b \in \mathcal{A}$. На $\mathcal{A}$ определяются следующие три частичных порядка:

(1) $a \prec_s b \Longleftrightarrow b = a + c,\ a \perp c$;
(2) $a \prec_l b \Longleftrightarrow l(a)b = a$;
(3) $a \prec_r b \Longleftrightarrow br(a) = a$.

Доказывается, что если $\mathcal{A}$ является $*$-регулярной алгеброй с ранк-метрикой ρ, то порядковые топологии, ассоциированные с этими частичными порядками, сильнее, чем топология, порожденная метрикой ρ. Также рассматриваются сужения этих частичных порядков на подмножества проекторов, унитарных операторов и частичных изометрий $*$-регулярной алгебры $\mathcal{A}$.

2. $*$-Регулярные кольца

В этом параграфе мы даем предварительную информацию о $*$-регулярных кольцах и алгебрах Мюррея-фон Неймана из работ [3], [9], [10].

Кольцо $\mathcal{A}$ называется $*$-кольцом (или кольцом с инволюцией), если существует операция $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такая, что для всех $a, b \in \mathcal{A}$ выполняются следующие равенства

$$(a^*)^* = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*.$$

Напомним, что элемент e $*$-кольца $\mathcal{A}$ называется проектором, если $e^2 = e = e^*$.

Кольцо $\mathcal{A}$ называется регулярным, если для каждого $x \in \mathcal{A}$ существует элемент $y \in \mathcal{A}$ такой, что $xyx = x$. Инволюция $*$ в $\mathcal{A}$ называется собственной, если из $x^*x = 0$ следует, что $x = 0$ для любого $x \in \mathcal{A}$. $*$-кольцо $\mathcal{A}$ называется $*$-регулярным, если оно является регулярным кольцом с собственной инволюцией.

Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-регулярное кольцо. Тогда существует единственный проектор $r(x)$ такой, что

(1) $xr(x) = x$;
(2) $xy = 0$ тогда и только тогда, когда $r(x)y = 0$.

Аналогично существует единственный проектор $l(x)$ такой, что

(3) $l(x)x = x$;
(4) $yx = 0$ тогда и только тогда, когда $yl(x) = 0$.

Проекторы $r(x)$ и $l(x)$ называются соответственно правым и левым проектором x. Проектор $s(x) = l(x) \vee r(x)$ называется носителем элемента x.

Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-регулярное кольцо, и пусть $P(\mathcal{A})$ — решетка всех проекторов из $\mathcal{A}$, т.е. $P(\mathcal{A}) = \{p \in \mathcal{A} : p^2 = p = p^*\}$. Действительнозначная функция μ на $P(\mathcal{A})$ называется нормальной точной нормированной мерой, если

(1) $0 \leq \mu(p) \leq 1$;
(2) $\mu(0) = 0$, $\mu(\mathbf{1}) = 1$;
(3) $\mu(p \vee q) + \mu(p \wedge q) = \mu(p) + \mu(q)$;
(4) $p \leq q \Rightarrow \mu(p) \leq \mu(q)$;
(5) если $p_i \uparrow p$, то $\mu(p_i) \uparrow \mu(p)$.

Рассмотрим так называемую ранк-метрику ρ на $\mathcal{A}$, определяемую следующим образом

$$\rho(x, y) = \mu(l(x - y)), \ x, y \in \mathcal{A} \tag{2.1}$$

(см. [3, Лемма 18.1]).

Одним из важных классов $*$-регулярных алгебр являются алгебры Мюррея-фон Неймана (подробнее см. [11]–[15]).

Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в H и $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана в $B(H)$.

Замкнутый линейный оператор $x : \mathrm{dom}(x) \to H$ с плотной областью определения (здесь область определения $\mathrm{dom}(x)$ оператора x является плотным линейным подпространством в H) называется присоединенным к $\mathcal{M}$, если $yx \subset xy$ для каждого y из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Обозначим через $S(\mathcal{M})$ множество всех операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. Хорошо известно, что $S(\mathcal{M})$ является унитальной $*$-регулярной алгеброй над $\mathbb{C}$ (см. [16], [17]). Алгебра $S(\mathcal{M})$ называется алгеброй Мюррея-фон Неймана, ассоциированной с $\mathcal{M}$ [12].

Пусть τ — точный нормальный конечный след на $\mathcal{M}$ и ρ — ранк-метрика на $S(\mathcal{M})$, определенная как в (2.1). Согласно [18, Предложение 2.1], алгебра $S(\mathcal{M})$ с метрикой ρ является полным топологическим $*$-кольцом. Кольцевые изоморфизмы алгебры $S(\mathcal{M})$ и их $*$-подалгебр в случае алгебр типа II_1 были описаны в работах [19], [20].

Пусть $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана. Пусть $a = v|a|$ — полярное разложение элемента $a \in S(\mathcal{M})$. Тогда $l(a) = vv^*$ и $r(a) = v^*v$ — левый и правый носители элемента a соответственно. Проектор $s(a) = l(a) \vee r(a)$ является носителем элемента a. Существует единственный элемент $i(a)$ в $S(\mathcal{M})$ такой, что $ai(a) = l(a)$, $i(a)a = r(a)$, $ai(a)a = a$, $i(a)l(a) = i(a)$ и $r(a)i(a) = i(a)$. Элемент $i(a)$ называется частичным обратным к элементу a. (см. [9], [15]).

3. Частичные порядки на $*$-регулярных кольцах

3.1. Частичные порядки. В этом подпараграфе $\mathcal{A}$ — $*$-регулярное кольцо с ранк-метрикой ρ. Более того, мы будем предполагать, что $(\mathcal{A}, \rho)$ — полное метрическое $*$-кольцо.

Пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Мы говорим, что a алгебраически ортогонален b, если

$$ab = ba = a^*b = ab^* = 0$$

(обозначается $a \perp b$). В частности, если $a, b \in \mathcal{A}_h = \{x \in \mathcal{A} : x = x^*\}$, то a алгебраически ортогонален b, тогда и только тогда, когда $ab = 0$.

Отметим, что a алгебраически ортогонален b, тогда и только тогда, когда $s(a)s(b) = 0$. Действительно, предположим, что $s(a)s(b) = 0$. Тогда

$$r(a)l(b) = r(b)l(a) = l(a)l(b) = r(a)r(b) = 0$$

и, следовательно, $ab = ba = a^*b = ab^* = 0$.

Если a и b алгебраически ортогональны, то отсюда следует, что

$$r(a)l(b) = r(b)l(a) = l(a)l(b) = r(a)r(b) = 0.$$

Таким образом, $l(a) \leq \mathbf{1} - l(b)$ и $r(a) \leq \mathbf{1} - l(b)$ и, следовательно, $s(a) \leq \mathbf{1} - l(b)$. Значит, $s(a)l(b) = 0$. Аналогично $s(a)r(b) = 0$. Таким образом, $l(b) \leq \mathbf{1} - s(a)$ и $r(b) \leq \mathbf{1} - s(a)$ и, следовательно, $s(b) \leq \mathbf{1} - s(a)$. Значит, $s(a)s(b) = 0$.

Для элементов $a, b \in \mathcal{A}$ положим

$$a \prec_s b \Longleftrightarrow b = a + c, \ a \perp c,$$

$$a \prec_l b \Longleftrightarrow l(a)b = a,$$

$$a \prec_r b \Longleftrightarrow br(a) = a.$$

Лемма 3.1. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда*

$$a \prec_s b \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad s(a)b = bs(a) = a. \tag{3.1}$$

Доказательство. Предположим, что $a \prec_s b$. В таком случае $b = a + c$, где $a, c \in \mathcal{A}$ такие, что $s(a)s(c) = 0$. Тогда

$$s(a)b = s(a)(a + c) = s(a)a + s(a)c = a$$

и

$$bs(a) = (a + c)s(a) = as(a) + cs(a) = a.$$

Теперь предположим, что $s(a)b = bs(a) = a$. Тогда $l(a) = l(bs(a)) \leq l(b) \leq s(b)$ и $r(a) \leq r(s(a)b) \leq r(b) \leq s(b)$. Следовательно, $s(a) = l(a) \vee r(a) \leq s(b) \vee s(b) = s(b)$.

Рассмотрим разложение Пирса $b = ebe + ebf + fbe + fbf$, где $e = s(a)$ и $f = \mathbf{1} - s(a)$. Поскольку $s(a)b = bs(a) = a$, то из этого следует, что $ebe = a$, $ebf = fbe = 0$. Таким образом, $b = a + c$, где $c = fbf$. Так как $s(a)s(c) = es(c) = e(fs(c)) = efs(c) = 0$, то имеем $a \prec_s b$. □

Лемма 3.2. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда*

$$a \prec_s b \Rightarrow a \prec_l b \Leftrightarrow a^* \prec_r b^*. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $a \prec_s b$, т.е. $s(a)b = bs(a) = a$. Таким образом, имеем

$$a = l(a)a = l(a)s(a)b = l(a)b,$$

т.е. $a \prec_l b$.

Поскольку $r(a^*) = l(a)$, то следует, что $a \prec_l b \Leftrightarrow a^* \prec_r b^*$. □

Лемма 3.3. *Отношение $\prec$, где $\prec \in \{\prec_s, \prec_l, \prec_r\}$, является частичным порядком на $\mathcal{A}$, т.е.*

(1) $x \prec x$;
(2) $x \prec y$, $y \prec x \Rightarrow x = y$;
(3) $x \prec y$, $y \prec z \Rightarrow x \prec z$.

Доказательство. Утверждение леммы проверим для случая $\prec_l$. Случаи $\prec_s$ и $\prec_r$ аналогичны.

Свойство (1) очевидно.

Отметим, что из $a \prec_l b$ следует, что

$$l(a) \leq l(b). \tag{3.3}$$

В самом деле, $l(a) = l(br(a^*)) \leq l(b)$.

Возьмем элементы $x, y \in \mathcal{A}$ такие, что $x \prec_l y$, $y \prec_l x$. Тогда $l(x) \leq l(y)$ и $l(y) \leq l(x)$, т.е. $l(x) = l(y)$. Далее, имеем

$$x = l(x)y = l(y)y = y.$$

Пусть $x \prec_l y$ и $y \prec_l z$. Тогда

$$l(x) \leq l(y), \quad l(y) \leq l(z).$$

Таким образом,

$$x = l(x)y = l(x)(l(y)z) = l(x)l(y)z = l(x)z.$$

Следовательно, $x \prec_l z$. □

В общем случае, обратное к первой импликации в (3.2) неверно. Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-регулярное кольцо, содержащее кольцо матриц порядка 2. Возьмем ненулевые взаимно ортогональные эквивалентные проекторы $p, q \in \mathcal{A}$ и элемент $u \in \mathcal{A}$ такие, что $u^*u = p$, $uu^* = q$. Положим $a = u^*$ и $b = u^* + u$. Тогда

$$l(a) = p, \quad r(a) = q, \quad s(a) = p + q.$$

Далее,

$$l(a)b = l(a)(u^* + u) = p(u^* + u) = pu^* = a.$$

Таким образом, $a \prec_l b$.

Но

$$s(a)b = (p+q)b = b \neq a,$$

следовательно, $a \prec_s b$ является неверным.

Отметим, что

$$a \prec_s b \Rightarrow ab = ba = a^2. \tag{3.4}$$

Действительно, для элементов a и b, удовлетворяющих условию $a \prec_s b$, используя (3.1), имеем

$$ab = (as(a))b = a(s(a)b) = a^2 = (bs(a))a = ba.$$

Отметим, что бинарное отношение $\leq$ на $\mathcal{A}$ является частичным порядком [4, Пример 1.6.7]:

$$a \leq b \ \text{тогда и только тогда, когда} \ ab = ba = a^2.$$

В общем случае, обратная импликация в (3.4) неверна. Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-регулярное кольцо, содержащее фактор типа I_3. Возьмем ненулевые взаимно ортогональные эквивалентные проекторы $p, q, r \in \mathcal{A}$ и элементы $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что $a^*a = p$, $aa^* = q$, $b = r$. Тогда

$$ab = ba = 0 = a^2,$$

но неравенство $a \prec_s b$ является неверным.

Следует отметить, что

$$(a \prec_l b) \wedge (a \prec_r b) \Rightarrow aa^* = ba^*, \quad a^*a = a^*b.$$

Действительно, для элементов a и b, удовлетворяющих условию $a \prec_l b$, имеем

$$ba^* = bl(a^*)a^* = br(a)a^* = aa^*,$$

и из неравенства $a \prec_r b$ следует

$$a^*b = a^*r(a^*)b = a^*l(a)b = a^*a.$$

Отметим, что бинарное отношение $\preceq$ на $\mathcal{A}$, определяемое следующим образом

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad aa^* = ba^*, \quad a^*a = a^*b$$

является частичным порядком [6], [7], [21], [22]. Этот порядок называется звездным порядком, который берет свое начало в матричном анализе и был введен для $*$-полугрупп М.П. Дразиным в работе [21].

3.2. Порядковая топология. В этом подпараграфе мы будем рассматривать порядковые топологии на $*$-регулярном кольце $\mathcal{A}$, порожденные частичными порядками $\prec_s$, $\prec_l$ и $\prec_r$.

Понятие порядковой сходимости сети было введено Г. Биркгофом (см. [1]). Напомним понятие порядковой топологии или (o)-топологии (подробнее см. [1], [23]). Пусть $\prec \in \{\prec_s, \prec_l, \prec_r\}$. Для сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{A}$ понятие $x_\alpha \uparrow x$ (соответственно $x_\alpha \downarrow x$), где $x \in \mathcal{A}$, означает, что $x_\alpha \prec x_\beta$ (соответственно $x_\beta \prec x_\alpha$) для $\alpha \leq \beta$ и $x = \sup\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ (соответственно, $x = \inf\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$). Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{A}$ называется (o)-сходящейся к элементу x в $\mathcal{A}$ (обозначается $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$), если существуют сети $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из $\mathcal{A}$ такие, что $y_\alpha \prec x_\alpha \prec z_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$ и $y_\alpha \uparrow x$, $z_\alpha \downarrow x$. Сильнейшая топология на $\mathcal{A}$, для которой (o)-сходимость сетей влечет их сходимость в топологии называется порядковой топологией или (o)-топологией, и обозначается $t_o(\prec)$.

Пусть t_ρ — топология на $\mathcal{A}$, порожденная ранк-метрикой ρ.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-регулярное кольцо с ранк-метрикой ρ такое, что $(\mathcal{A}, \rho)$ является полным метрическим $*$-кольцом. Тогда порядковая топология $t_o(\prec)$ сильнее, чем t_ρ.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что любая сеть $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{A}$, которая (o)-сходится к нулю, также сходится к нулю относительно топологии t_ρ. Мы докажем это в следующих двух леммах.

Лемма 3.4. *Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset (\mathcal{A}, \prec)$ — возрастающая (соответственно убывающая) сеть, где $\prec \in \{\prec_s, \prec_l, \prec_r\}$. Тогда существует $x \in \mathcal{A}$ такой, что*

(1) $x = \sup\limits_{\alpha\in A} x_\alpha \in \mathcal{A}$ *(соответственно, $x = \inf\limits_{\alpha\in A} x_\alpha \in \mathcal{A}$);*

(2) $s(x) = \sup\limits_{\alpha\in A} s(x_\alpha)$ *(соответственно, $s(x) = \inf\limits_{\alpha\in A} s(x_\alpha)$);*

(3) $x_\alpha \xrightarrow{\rho} x$.

Доказательство. Докажем три приведенных выше утверждения для случая $\prec_l$. Случаи $\prec_s$ и $\prec_r$ аналогичны.

Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset (\mathcal{A}, \prec)$ — возрастающая сеть. Поскольку $x_\alpha \prec x_\beta$ для всех $\alpha \le \beta$, то отсюда следует, что $l(x_\alpha) \le l(x_\beta)$ (см. (3.3)). Следовательно, существует проектор $l = \sup\limits_{\alpha\in A} l(x_\alpha)$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau(l(x_\beta - x_\alpha)) = \tau(l(x_\beta - l(x_\alpha)x_\beta)) &= \tau(l((l(x_\beta) - l(x_\alpha))x_\beta)) \\ &\le \tau(l(x_\beta) - l(x_\alpha)) \le \tau(l - l(x_\alpha)) \to 0.\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\rho(x_\beta, x_\alpha) = \tau(l(x_\beta - x_\alpha)) \to 0.$$

Это означает, что $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является сетью Коши. Поскольку $(\mathcal{A}, \rho)$ полно, то существует элемент $x \in \mathcal{A}$ такой, что $\rho(x_\alpha, x) \to 0$, т.е. $x_\alpha \xrightarrow{\rho} x$.

Сначала покажем, что $x_\alpha \prec x$ для всех $\alpha \in A$.

Пусть $\gamma \in A$ — фиксированный индекс. Для всех $\alpha \ge \gamma$ имеем $l(x_\gamma)x_\alpha = x_\gamma$, поскольку $x_\gamma \prec x_\alpha$. Так как умножение в $\mathcal{A}$ ρ-непрерывно, отсюда следует, что $l(x_\gamma)x_\alpha \xrightarrow{\rho} l(x_\gamma)x$. Таким образом, $l(x_\gamma)x = x_\gamma$ и, следовательно, $x_\gamma \prec x$, в частности, $l(x_\alpha) \le l(x)$ для всех $\alpha \in A$.

Поскольку $x_\alpha \xrightarrow{\rho} x$, $l(x_\alpha) \le l(x)$ для всех $\alpha \in A$, то отсюда следует, что $l(x) = \sup\limits_{\alpha\in A} l(x_\alpha)$.

Возьмем элемент $y \in \mathcal{A}$ такой, что $x_\alpha \prec y$, и покажем, что $x \prec y$. Имеем

$$l(x_\alpha)y = x_\alpha$$

для всех $\alpha \in A$. Таким образом,

$$l(x_\alpha)y = l(x_\alpha)x$$

для всех $\alpha \in A$. Поскольку $l(x) = \sup\limits_{\alpha\in A} l(x_\alpha)$, то

$$l(x)y = x.$$

Это означает, что $x \prec y$ и, следовательно, $x = \sup\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$. □

Пусть $y \prec x \prec z$. Тогда

$$\rho(x, z) \le \rho(y, z) \quad \text{и} \quad \rho(y, x) \le \rho(y, z). \tag{3.5}$$

Докажем первое неравенство. Используя равенство

$$l(x)y = x,$$

получаем, что

$$\rho(x,z)=\tau(l(z-x))=\tau(l(z-l(x)z))=\tau(l((l(z)-l(x))z))$$
$$\leq\tau(l((l(z)-l(y))z))\leq\tau(l(z-y))=\rho(y,z).$$

Лемма 3.5. *Если $x_\alpha\overset{(o)}{\to}x$, то $x_\alpha\overset{\rho}{\to}x$.*

Доказательство. Пусть $x_\alpha\overset{(o)}{\to}x$. Тогда существуют сети $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A}$ такие, что $y_\alpha\prec x_\alpha\prec z_\alpha$ для каждого $\alpha\in A$ и $y_\alpha\uparrow x$, $z_\alpha\downarrow x$. По лемме 3.4 (3) имеем $y_\alpha\overset{\rho}{\to}x$ и $z_\alpha\overset{\rho}{\to}x$. Используя эти соотношения, получим

$$\rho(x_\alpha,x)\leq\rho(x_\alpha,y_\alpha)+\rho(y_\alpha,x)\overset{(3.5)}{\leq}\rho(z_\alpha,y_\alpha)+\rho(y_\alpha,x)$$
$$\leq\rho(z_\alpha,x)+\rho(x,y_\alpha)+\rho(y_\alpha,x)\to 0,$$

т.е. $x_\alpha\overset{\rho}{\to}x$. □

Замечание 3.1. *Заметим, что если $\mathcal{A}$ — конечномерная $*$-регулярная алгебра с ранк-метрикой ρ, то обе топологии t_o и t_ρ являются дискретными. Действительно, поскольку $\mathcal{A}$ — конечномерна, то множество всех значений функции ρ конечно. Следовательно, топология t_ρ является дискретной. Кроме того, поскольку t_o должно быть сильнее, чем t_ρ, то отсюда следует, что порядковая топология также дискретна.*

3.3. Сужение порядка на решетке проекторов и множестве частичных изометрий. Пусть $\mathcal{A}_h$ — подмножество всех эрмитовых элементов из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_+$ — конус всех положительных элементов из $\mathcal{A}_h$, т.е. $\mathcal{A}_+=\{x\in\mathcal{A}_h: x=y^2,\ y\in\mathcal{A}_h\}$. Пусть $\leq$ — обычный порядок на $\mathcal{A}_h$, поэтому для $x,y\in\mathcal{A}_h$ неравенство $x\leq y$ означает, что $y-x\in\mathcal{A}_+$.

Частичные порядки $\prec_s,\prec_l$ и $\prec_r$ на множестве $P(\mathcal{A})$ всех проекторов из $\mathcal{A}$ совпадают с обычным порядком $\leq$.

Действительно, пусть $p,q\in P(\mathcal{A})$ такие, что $p\prec_i q$, где $i\in\{s,l,r\}$. Поскольку $s(p)=l(p)=r(p)=p$, то из равенств $l(p)q=qr(p)=p$ вытекает, что $pq=qp=p$, а это означает, что $p\leq q$.

Наоборот, если $p\leq q$ для $p,q\in P(\mathcal{A})$, то из этого следует, что $pq=qp=p$. Значит, $p\prec_i q$, $i\in\{s,l,r\}$.

Обозначим через $\mathcal{GU}(\mathcal{A})$ множество всех частичных изометрий в $\mathcal{A}$, т.е.

$$\mathcal{GU}(\mathcal{A})=\{w\in\mathcal{A}: w=ww^*w\}.$$

Отметим, что $l(w)=ww^*$ и $r(w)=w^*w$ являются левым и правым носителями для $w\in\mathcal{GU}(\mathcal{A})$.

На множестве $\mathcal{GU}(\mathcal{A})$ можно определить частичный порядок следующим образом:

$$u\leqslant_l v\Leftrightarrow uu^*\leqslant vv^*,\quad u=uu^*v.$$

Ясно, что

$$u\leqslant_r v\Leftrightarrow u^*u\leqslant v^*v,\quad u=vu^*u$$

также определяет частичный порядок на множестве $\mathcal{GU}(\mathcal{A})$ и

$$u\leqslant_l v\Leftrightarrow u^*\leqslant_r v^*.$$

Это означает, что сужения частичных порядков $\prec_l$ и $\prec_r$ на $\mathcal{GU}(\mathcal{A})$ совпадают с частичными порядками $\leqslant_l$ и $\leqslant_r$, соответственно.

3.4. Кольцевые изоморфизмы — отображения, сохраняющие порядок. Покажем теперь, что кольцевые изоморфизмы регулярных колец сохраняют частичные порядки $\prec_l$ и $\prec_r$.

Предложение 3.1. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — $*$-регулярные кольца и $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — кольцевой изоморфизм. Тогда*

1. *$x \prec_l y$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) \prec_l \Phi(y)$.*
2. *$x \prec_r y$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) \prec_r \Phi(y)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\prec_l$. Случай $\prec_r$ аналогичен.

Пусть $x \prec_l y$, т.е.

$$l(x)y = x. \tag{3.6}$$

Имеем

$$\Phi(l(x)) = \Phi(xi(x)) = \Phi(x)\Phi(i(x))$$

и поэтому

$$l\left(\Phi(l(x))\right) \leq l\left(\Phi(x)\right).$$

Далее,

$$\Phi(x) = \Phi(l(x)x) = \Phi(l(x))\Phi(x).$$

Следовательно,

$$l\left(\Phi(x)\right) \leq l\left(\Phi(l(x))\right)$$

и

$$l\left(\Phi(x)\right) = l\left(\Phi(l(x))\right). \tag{3.7}$$

В конечном итоге, имеем

$$\begin{aligned} l\left(\Phi(x)\right)\Phi(y) &\overset{(3.7)}{=} l\left(\Phi(l(x))\right)\Phi(y) = l\left(\Phi(l(x))\right)\Phi\left(l(x)\right)\Phi(y) \\ &= l\left(\Phi(l(x))\right)\Phi\left(l(x)y\right) \overset{(3.6)}{=} l\left(\Phi(l(x))\right)\Phi\left(x\right) \\ &\overset{(3.7)}{=} l\left(\Phi(x)\right)\Phi\left(x\right) = \Phi\left(x\right). \end{aligned}$$

Это означает, что $\Phi(x) \prec_l \Phi(y)$.

Поскольку Φ является кольцевым изоморфизмом, то отсюда следует, что обратная импликация также верна. □

Благодарности

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Birkhoff, J. von Neumann. *The logic of quantum mechanics* // Ann. of Math. **37**:4, 823–843 (1936).
2. J. von Neumann. *Continuous rings and their arithmetics* // Proc. Nat Acad. Sci. U.S.A. **23**, 341–349 (1937).
3. J. von Neumann. *Continuous geometry.* Princeton: Princeton University Press. 1960.
4. A. Dvurecenskij, S. Pulmannova. *New trends in quantum structures.* Dordrecht: Springer. 2000.
5. P. Ptǎk, S. Pulmannovǎ. *Orthomodular structures as quantum logics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group. 1991.
6. M. Bohata. *Star order and topologies on von Neumann algebras* // Mediterr. J. Math. **15**:4, 14 pp. (2018).

7. X.P. Zhang, W.J. Shi, G.X. Ji. *Star partial order in a von Neumann algebra* // Acta Math. Sinica (Chin. Ser.). **60**:1, 19–30 (2017).
8. E. Chetcuti, J. Hamhalter, H. Weber. *The order topology for a von Neumann algebra* // Studia Math. **230**:2, 95–120 (2015).
9. S.K. Berberian. *Baer $*$-rings.* New York-Berlin: Springer-Verlag. 1972.
10. K.R. Goodearl. *Von Neumann regular rings.* London: Pitman. 1979.
11. R. Kadison, J. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, vol II.* Orlando: Academic Press. 1986.
12. R. Kadison, Z. Liu. *A note on derivations of Murray–von Neumann algebras* // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **111**:6, 2087–2093 (2014).
13. M.A. Muratov, V.I. Chilin. *$*$-algebras of unbounded operators affiliated with a von Neumann algebra* // J. Math. Sci. **140**:3, 445–451 (2007).
14. E. Nelson. *Notes on non-commutative integration* // J. Funct. Anal. **15**:2, 103–116 (1974).
15. K. Saitô. *On the algebra of measurable operators for a general AW^*-algebra II* // Tohoku Math. J. **23**:3, 525–534 (1971).
16. I.E. Segal. *A non-commutative extension of abstract integration* // Ann. Math. **57**:3, 401–457 (1953).
17. A. Thom. *L_2-cohomology for von Neumann algebras* // Geom. Funct. Anal. **18**:1, 251–270 (2008).
18. L. Ciach. *Linear-topological spaces of operators affiliated with von Neumann algebra* // Bull. Polish Acad. Sc. **31**:3, 161–166 (1983).
19. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. *Ring isomorphisms of Murray–von Neumann algebras* // J. Funct. Anal. **280**:5, 108891 (2021).
20. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. *Ring isomorphisms of $*$-subalgebras of Murray–von Neumann factors* // Lobachevskii J. Math. **42**:12, 2730–2739 (2021).
21. M.P. Drazin. *Natural structures on semigroups with involution* // Bull. Amer. Math. Soc. **84**:1, 139–141 (1978).
22. R.E. Hartwig, M.P. Drazin. *Lattice properties of the $*$-order for complex matrices* //J. Math. Anal. Appl. **86**:2, 359–378 (1982).
23. B.Z. Vulikh. *Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces.* New York: Gordon and Breach. 1967.

Каримберген Кадирбергенович Кудайбергенов,
Институт математики им. В.И. Романовского АН Республики Узбекистан,
ул. Университетская, 9,
100174, Ташкент, Узбекистан
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
ул. Ч. Абдирова, 1,
230112, Нукус, Узбекистан
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, Владикавказ, Россия
E-mail: karim2006@mail.ru

Бердах Орынбаевич Нуржанов,
Институт математики им. В.И. Романовского АН Республики Узбекистан,
ул. Университетская, 9,
100174, Ташкент, Узбекистан
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
ул. Ч. Абдирова, 1,
230112, Нукус, Узбекистан
E-mail: nurjanov@list.ru