

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА–ЛЫКОВА

С.Х. ГЕККИЕВА, М.А. КЕРЕФОВ, Ф.М. НАХУШЕВА

Аннотация. При математическом моделировании сплошных сред с памятью возникают уравнения, описывающие новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией и классическими волнами. Имеются в виду дифференциальные уравнения дробного порядка, как по временной, так и по пространственной переменной, которые являются основой большинства математических моделей в механике жидкости, вязкоупругости, а также в процессах переноса в средах с фрактальной структурой и памятью.

В настоящей работе представлено качественно новое уравнение влагопереноса, являющееся обобщением уравнения Аллера–Лыкова. Данное обобщение дает возможность отражения в характере исходного уравнения специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности.

Работа посвящена исследованию локальных и нелокальных краевых задач для неоднородного уравнения влагопереноса типа Аллера–Лыкова с переменными коэффициентами с дробной производной Римана–Лиувилля. Для обобщенного уравнения типа Аллера–Лыкова рассмотрены начально-краевые задачи с условиями первого и третьего рода, а также нелокальные задачи, содержащие в краевых условиях нелокальность по времени. Методом энергетических неравенств, при предположении существования регулярных решений, получены априорные оценки в терминах дробной производной Римана–Лиувилля, из которых следует единственность решений рассматриваемых краевых задач, их устойчивость по правой части и начальным данным.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса Аллера–Лыкова, дробная производная Римана–Лиувилля, метод Фурье, априорная оценка.

Mathematics Subject Classification: 35E99

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы тепло-, влагопереноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, строительной физики и других областей науки. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов и т.д. [1, гл. 6]. В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью [2, гл. 5].

Примером такого рода моделей, описывающих процесс переноса почвенной влаги с учетом движения против потенциала влажности, а также фрактальной структуры почвы,

S.KH. GEKKIEVA, M.A. KEREFOV, F.M. NAKHUSHEVA, LOCAL AND NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE GENERALIZED ALLER–LYKOV EQUATION.

© ГЕККИЕВА С.Х., КЕРЕФОВ М.А., НАХУШЕВА Ф.М. 2023.

Поступила 2 декабря 2021 г.

может служить обобщенное уравнение переноса Аллера–Лыкова:

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A D_{0t}^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

где D_{0t}^α — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [2, с. 9], $0 < \alpha < 1$, $A_1, A = \text{const} > 0$, $k(x, t)$ — коэффициент диффузии, $f(x, t)$ — плотность источников влаги. Для функции $u(x, t)$, зависящей от двух переменных, оператор частного интегро-дифференцирования $D_{0t}^\alpha u(x, \tau)$ по переменной t определяется так же, как и для функции одной переменной, при этом вторая переменная x рассматривается как параметр. Так, для случая $0 < \alpha < 1$ имеем

$$D_{0t}^\alpha u(x, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau.$$

Уравнения влагопереноса в локальной постановке (при $\alpha = 1$) рассматривались в работах многих авторов и решались методом разделения переменных, методом априорных оценок, а также численными методами. Среди последних отметим работы [3], [4], в которых получены априорные оценки для решения нелокальных задач для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова в дифференциальной и разностной трактовках, а также работы [5]–[7], в которых исследовано уравнение влагопереноса Аллера–Лыкова с дробной по времени производной с различного рода граничными условиями.

В [8] доказаны существование и единственность решения первой краевой задачи для уравнения Аллера–Лыкова с постоянными коэффициентами. В работе [9] исследована вторая краевая задача.

В [10] для обобщенных уравнений Аллера и Аллера–Лыкова с краевыми условиями первого рода получены решения системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых. Получены априорные оценки, из которых следует сходимость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами дробного порядка.

Настоящая работа посвящена исследованию локальных и нелокальных краевых задач для уравнения влагопереноса типа Аллера–Лыкова с переменными коэффициентами с дробной производной Римана–Лиувилля

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + D_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t). \quad (1.1)$$

Исследование уравнения (1.1) будем проводить методом априорных оценок.

2. ЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА–ЛЫКОВА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ

В прямоугольнике $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ рассмотрим уравнение (1.1).

Регулярным решением уравнения (1.1) в Ω_T назовем функцию $u = u(x, t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t), D_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\bar{\Omega}_T)$; $D_{0t}^{\alpha+1} u(x, t), u_{xx}(x, t), D_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(\Omega_T)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) во всех точках $(x, t) \in \Omega_T$.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1.1) в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = u_0(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha u(x, t) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.2)$$

где $u_0(x), u_1(x)$ — заданные функции.

В дальнейшем будем предполагать существование регулярных решений рассматриваемых в работе задач. Далее M_i , $i = 1, 2, \dots$ — положительные постоянные, зависящие исключительно только от входных данных рассматриваемой задачи.

Скалярное произведение и норма определяются следующим образом:

$$(a, b) = \int_0^l ab dx, \quad (a, a) = \|a\|_0^2,$$

где a, b — заданные на отрезке $[0, l]$ функции.

2.1. Априорная оценка решения первой краевой задачи.

Теорема 2.1. *Если $k_x(x, t)$, $\eta_x(x)$, $k_t(x, t)$, $q_t(x, t)$, $f(x, t) \in C(\overline{\Omega}_T)$; $u_1(x) \in C[0, l]$; $u_0(x) \in C^2[0, l]$; $0 < c_1 \leq k(x, t)$; $\eta(x)$, $q(x, t) \leq c_2$; $k_t, q_t \leq 0$ всюду на $\overline{\Omega}_T$ и выполнено условие $u_0(0) = u_0(l) = 0$, тогда для решения задачи (1.1)–(2.2) справедлива априорная оценка*

$$\|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha u\|_{2, \Omega_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha u_x\|_{2, \Omega_t}^2 \leq M \left(\|f\|_{2, \Omega_t}^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \|u_1(x)\|_0^2 \right), \quad (2.3)$$

где

$$\|D_{0t}^\alpha u\|_{2, \Omega_t}^2 = \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha u(x, \tau)\|_0^2 d\tau, \quad \|u_0(x)\|_{W_2^2(0, l)}^2 = \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2 + \|u_0''(x)\|_0^2.$$

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $g(x, t)$, полагая

$$u(x, t) = g(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x) \quad (2.4)$$

так, что $g(x, t)$ представляет собой отклонение функции $u(x, t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x)$. С учетом [11, с. 15]

$$D_{0t}^{\alpha+1} t^{\alpha-1} = 0, \quad D_{0t}^\alpha t^{\alpha-1} = 0, \quad D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)$$

функция $g(x, t)$ будет определяться, как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g + D_{0t}^\alpha g - (kg_x)_x - D_{0t}^\alpha (\eta g_x)_x + qg = F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.5)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} g(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} \left(u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x) \right) = u_0(x) - \frac{u_0(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha g(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha \left(u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x) \right) = u_1(x) - \frac{u_0(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha t^{\alpha-1} = u_1(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

и граничными условиями

$$g(0, t) = g(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.7)$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (k_x u_0'(x) + k u_0''(x) + \eta_x u_0'(x) + \eta u_0''(x) - q u_0(x)).$$

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана–Лиувилля, для чего умножим уравнение (2.5) скалярно на

$$D_{0t}^\alpha g = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha},$$

получим:

$$\begin{aligned} (A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^\alpha g) + (D_{0t}^\alpha g, D_{0t}^\alpha g) - ((kg_x)_x, D_{0t}^\alpha g) \\ - (D_{0t}^\alpha (\eta g_x)_x, D_{0t}^\alpha g) + (qg, D_{0t}^\alpha g) = (F, D_{0t}^\alpha g). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Преобразуем слагаемые тождества (2.8) с учетом (2.6), (2.7):

$$\begin{aligned} (A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^\alpha g) &= A_1 \int_0^l \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \\ &= \frac{A_1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (D_{0t}^\alpha g)^2 dx = \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \\ (D_{0t}^\alpha g, D_{0t}^\alpha g) &= \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \\ ((kg_x)_x, D_{0t}^\alpha g) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l (kg_x)_x \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \Big|_0^l - \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \right\} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx, \\ (D_{0t}^\alpha (\eta g_x)_x, D_{0t}^\alpha g) &= \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{(\eta g_x)_x d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \eta \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \Big|_0^l \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \eta \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \right\} \\ &\leq -c_1 \int_0^l \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \right)^2 dx = -c_1 \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2. \end{aligned}$$

Для оценки правой части (2.8) воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и ε -неравенством [12, с. 100]:

$$(F, D_{0t}^\alpha g) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \quad \varepsilon > 0.$$

С учетом полученных неравенств из (2.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \\ + c_1 \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 + (qg, D_{0t}^\alpha g) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Проинтегрируем (2.9) по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau \int_0^l k g_x(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{g_x(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau - \tau_1)^\alpha} dx \\ & + c_1 \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau \int_0^l q g(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{g(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau - \tau_1)^\alpha} dx \quad (2.10) \\ & \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_{2, \Omega_t}^2 + \varepsilon \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \frac{A_1}{2} \|(D_{0t}^\alpha g)(x, 0)\|_0^2. \end{aligned}$$

Докажем неотрицательность тройных интегралов в левой части последнего неравенства [13, гл. 2]. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^l dx \int_0^t k g_x(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{g_x(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau - \tau_1)^\alpha} d\tau, \\ F_1(x, t) &= \frac{\sin \pi(1-\alpha)}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau_1) d\tau_1}{(t - \tau_1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом формулы обращения интегрального уравнения Абеля [14, с. 39] имеем

$$J = \frac{\pi}{\sin \pi(1-\alpha)} \int_0^l dx \int_0^t k F_1(x, \tau) d\tau \int_0^\tau \frac{F_1(x, \tau_1) d\tau_1}{(t - \tau_1)^{1-\alpha}}.$$

Используя формулу для гамма-функции

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} \cos kt dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu} \cos \frac{\mu\pi}{2}, \quad k > 0, \quad 0 < \mu < 1,$$

при $k = (\tau - \tau_1)$, $\mu = 1 - \alpha$ получаем

$$\frac{1}{(t - \tau_1)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2}} \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \cos \xi(t - \tau_1) d\xi,$$

а для исходного интеграла получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{\sin \pi(1-\alpha) \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2}} \int_0^l dx \int_0^t k F_1(x, \tau) d\tau \int_0^\tau F_1(x, \tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \cos \xi(t - \tau_1) d\xi \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2}} \int_0^l dx \int_0^t k F_1(x, \tau) d\tau \int_0^\tau F_1(x, \tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \cos \xi(\tau - \tau_1) d\xi. \end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования, будем иметь

$$J = \frac{\Gamma(\alpha)}{\cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2}} \left[\int_0^l dx \int_0^\infty \xi^{-\alpha} d\xi \int_0^t k F_1(x, t) \cos \xi \tau d\tau \int_0^\tau F_1(x, \tau_1) \cos \xi \tau_1 d\tau_1 \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^l dx \int_0^\infty \xi^{-\alpha} d\xi \int_0^t k F_1(x, \tau) \sin \xi \tau d\tau \int_0^\tau F_1(x, \tau_1) \sin \xi \tau_1 d\tau_1 \Big] \\
 & = \frac{\Gamma(\alpha)}{2 \cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2}} \left\{ \int_0^l dx \int_0^\infty \xi^{-\alpha} d\xi \int_0^t k(x, \tau) \left[\left(\int_0^\tau F_1(x, \tau_1) \cos \tau_1 \xi d\tau_1 \right)^2 \right]_\tau d\tau \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^l dx \int_0^\infty \xi^{-\alpha} d\xi \int_0^t k(x, \tau) \left[\left(\int_0^\tau F_1(x, \tau) \sin \tau_1 \xi d\tau_1 \right)^2 \right]_\tau dt \right\}.
 \end{aligned}$$

Последнее равенство интегрированием по частям преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 J & = \frac{\Gamma(\alpha)}{2 \cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2}} \left\{ \int_0^l dx \int_0^\infty \xi^{-\alpha} k \left[\left(\int_0^\tau F_1(x, \tau_1) \cos \tau_1 \xi d\tau_1 \right)^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\int_0^\tau F_1(x, \tau_1) \sin \tau_1 \xi d\tau_1 \right)^2 \right] d\xi - \int_0^l dx \int_0^\infty \xi^{-\alpha} d\xi \int_0^t k_\tau \left[\left(\int_0^\tau F_1(x, \tau_1) \cos \tau_1 \xi d\tau_1 \right)^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\int_0^\tau F_1(x, \tau_1) \sin \tau_1 \xi d\tau_1 \right)^2 \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

При выполнении условия $k_t \leq 0$, так как $\Gamma(\alpha) > 0$, $0 < \cos \frac{(1-\alpha)\pi}{2} < 1$, получим, что $J \geq 0$.

Таким образом, при выполнении условий $k_t, q_t \leq 0$ доказана неотрицательность тройных интегралов в левой части неравенства (2.10).

Усиливая неравенство (2.10), получим

$$\begin{aligned}
 A_1 \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + 2(1 - \varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g(x, \tau_1)\|_0^2 d\tau + 2c_1 \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x(x, \tau_1)\|_0^2 d\tau \\
 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|F\|_{2, Q_t}^2 + A_1 \|u_1(x)\|_0^2,
 \end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$\|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_{2, \Omega_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha g_x\|_{2, \Omega_t}^2 \leq M_1 \left(\|F\|_{2, \Omega_t}^2 + \|u_1(x)\|_0^2 \right)$$

или, возвращаясь к $u(x, t)$, получим (2.3). \square

Замечание 2.1. Из (2.3) следует единственность решения задачи (1.1)–(2.2).

Действительно, пусть u — решение однородной задачи, т.е. $f = u_0 = u_1 = 0$. Тогда из (2.3) имеем:

$$\|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha u\|_{2, Q_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha u_x\|_{2, Q_t}^2 = 0.$$

Применяя обобщенную формулу Ньютона-Лейбница [11, с. 15]:

$$D_{0t}^{-\alpha} D_{0t}^\alpha u(x, t) = u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t),$$

в частности, получим:

$$u(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0(x) = 0 \quad \text{в } \Omega_T.$$

2.2. Априорная оценка решения третьей краевой задачи. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения (1.1) в области Ω_T с краевыми условиями

$$\begin{cases} \Pi(0, t) = \beta_1(t)u(0, t) - \mu_1(t), \\ -\Pi(l, t) = \beta_2(t)u(l, t) - \mu_2(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

и начальными условиями (2.2), где $\Pi(x, t) = k(x, t)u_x + D_{0t}^\alpha(\eta u_x)$.

Теорема 2.2. *Если дополнительно к условиям теоремы 2.1 выполняются соотношения $\beta_1, \beta_2 \in C^1[0, T]$; $\mu_1, \mu_2 \in C[0, T]$; $\beta_1, \beta_2 \geq c_0 > 0$; $\beta_{1t} \leq 0$; $\beta_{2t} \leq 0$ всюду на $\overline{\Omega}_t$ и выполнено условие $u_0(0) = u_0(l) = u'_0(0) = u'_0(l) = 0$, тогда для решения задачи (1.1), (2.11), (2.2) справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned} & \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha u\|_{2, Q_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha u_x\|_{2, Q_t}^2 \\ & \leq M \left(\|f\|_{2, Q_t}^2 + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \|u_0(x)\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \|u_1(x)\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $g(x, t)$ по формуле (2.4). В результате получим определение функции $g(x, t)$, как решение уравнения (2.5) с начальными условиями (2.6) и граничными условиями

$$\begin{cases} \Pi_1(0, t) = \beta_1(t)g - \mu_1(t), & x = 0, \\ -\Pi_1(l, t) = \beta_2(t)g - \mu_2(t), & x = l, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $\Pi_1(x, t) = k(x, t)g_x + D_{0t}^\alpha(\eta g_x)$.

Далее, преобразовывая слагаемые (2.8) с учетом (2.6), (2.13), получим:

$$\begin{aligned} (A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^\alpha g) &= \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \\ (D_{0t}^\alpha g, D_{0t}^\alpha g) &= \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \\ ((kg_x)_x, D_{0t}^\alpha g) &= kg_x(l, t) D_{0t}^\alpha g(l, \tau) - kg_x(0, t) D_{0t}^\alpha g(0, \tau) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx, \\ (D_{0t}^\alpha(\eta g_x)_x, D_{0t}^\alpha g) &\leq D_{0t}^\alpha(\eta(l) g_x(l, \tau)) D_{0t}^\alpha g(l, \tau) \\ &\quad - D_{0t}^\alpha(\eta(0) g_x(0, \tau)) D_{0t}^\alpha g(0, \tau) - c_1 \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2, \\ (F, D_{0t}^\alpha g) &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

С учетом полученных неравенств из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \\ & \quad + c_1 \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l qg(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \\ & \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \Pi_1(x, t) D_{0t}^\alpha g(x, \tau)|_0^l. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Оценим последнее слагаемое правой части неравенства (2.14):

$$\begin{aligned}
\Pi_1(x, t) D_{0t}^\alpha g(x, \tau) \Big|_0^l &= D_{0t}^\alpha g(l, \tau) (k g_x(l, t) + D_{0t}^\alpha (\eta(l) g_x(l, \tau))) \\
&\quad - D_{0t}^\alpha g(0, \tau) (k g_x(0, t) + D_{0t}^\alpha (\eta(0) g_x(0, \tau))) \\
&= D_{0t}^\alpha g(l, \tau) (\mu_2(t) - \beta_2 g) - D_{0t}^\alpha g(0, \tau) (\beta_1 g - \mu_1(t)) \\
&= D_{0t}^\alpha g(l, \tau) \mu_2(t) - D_{0t}^\alpha g(l, \tau) \beta_2 g(l, t) \\
&\quad - D_{0t}^\alpha g(0, \tau) \beta_1 g(0, t) + D_{0t}^\alpha g(0, \tau) \mu_1(t) \\
&\leq - D_{0t}^\alpha g(l, \tau) \beta_2 g(l, t) - D_{0t}^\alpha g(0, \tau) \beta_1 g(0, t) + \frac{1}{2} (\mu_1^2 + \mu_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} ((D_{0t}^\alpha g(0, \tau))^2 + (D_{0t}^\alpha g(l, \tau))^2).
\end{aligned}$$

Учитывая полученную оценку, из (2.14) приходим к неравенству:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + D_{0t}^\alpha (0, \tau) \beta_1 g(0, t) + D_{0t}^\alpha g(l, \tau) \beta_2 g(l, t) \\
+ (k g_x, D_{0t}^\alpha g_x) + c_1 \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 + (qg, D_{0t}^\alpha g) \\
\leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \frac{1}{2} (\mu_1^2 + \mu_2^2) \\
+ \frac{1}{2} ((D_{0t}^\alpha g(0, \tau))^2 + (D_{0t}^\alpha g(l, \tau))^2).
\end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее неравенство по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau + \int_0^t \beta_1 g(0, \tau) D_{0\tau}^\alpha g(0, \tau_1) d\tau + \int_0^t \beta_2 g(l, \tau) D_{0\tau}^\alpha g(l, \tau_1) d\tau \\
+ \int_0^t (k g_x, D_{0\tau}^\alpha g_x) d\tau + c_1 \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x\|_0^2 d\tau + \int_0^t (qg, D_{0\tau}^\alpha g) d\tau \\
\leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \|F\|_0^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau \\
+ \frac{1}{2} \int_0^t ((D_{0\tau}^\alpha g(0, \tau_1))^2 + (D_{0\tau}^\alpha g(l, \tau_1))^2) d\tau + \frac{A_1}{2} \|(D_{0t}^\alpha g)(x, 0)\|_0^2.
\end{aligned}$$

При выполнении условий $k_t \leq 0$, $q_t \leq 0$, $\beta_{1t} \leq 0$, $\beta_{2t} \leq 0$, усиливая это неравенство, получим

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau + c_1 \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x\|_0^2 d\tau \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \|F\|_0^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau \\
+ \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t ((D_{0\tau}^\alpha g(0, \tau_1))^2 + (D_{0\tau}^\alpha g(l, \tau_1))^2) d\tau \\
+ \frac{A_1}{2} \|(D_{0t}^\alpha g)(x, 0)\|_0^2.
\end{aligned}$$

С учетом оценок [15, с. 124]

$$\begin{aligned} (D_{0\tau}^\alpha g(0, \tau_1))^2 &\leq \varepsilon \|(D_{0t}^\alpha g)_x\|_0^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right) \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \\ (D_{0\tau}^\alpha g(l, \tau_1))^2 &\leq \varepsilon \|(D_{0t}^\alpha g)_x\|_0^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right) \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} &\frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \left(1 - \varepsilon - \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right)\right) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau + (c_1 - \varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x\|_0^2 d\tau \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \|F\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \frac{A_1}{2} \|(D_{0t}^\alpha g)(x, 0)\|_0^2 \end{aligned}$$

или

$$\|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau + \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x\|_0^2 d\tau \leq M_2 \left(\int_0^t \|F\|_0^2 d\tau + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \|u_1(x)\|_0^2 \right).$$

Возвращаясь к $u(x, t)$, получим (2.12), откуда следует единственность решения задачи (1.1), (2.11), (2.2). \square

3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА–ЛЫКОВА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ

Задачам с нелокальными граничными условиями для уравнений в частных производных посвящены многие работы, в том числе, уже ставшая классической, работа [16]. Известно [17, с. 135], что нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых задаются условия, связывающие значения искомого решения и (или) его производных в различных точках границы либо же в точках границы и в каких-либо внутренних точках.

Задача 3.1. *Рассмотрим нелокальную краевую задачу для уравнения (1.1) в области Ω_T , удовлетворяющую краевым условиям*

$$\begin{cases} \Pi_2(0, t) = \beta_1(t)u(0, t) + D_{0t}^\alpha u(0, \tau) - \mu_1(t), \\ -\Pi_2(l, t) = \beta_2(t)u(l, t) + D_{0t}^\alpha u(l, \tau) - \mu_2(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

и начальным условиям (2.2), где $\Pi_2(x, t) = k(x, t)u_x + D_{0t}^\alpha(\eta u_x)$.

Нелокальные краевые задачи, содержащие в краевых условиях нелокальность по времени, впервые изучены А.И. Кожановым [18]. Краевые задачи для уравнений влагопереноса с такого рода граничными условиями рассматривались также в работах [19], [20].

Теорема 3.1. *Если выполняются условия теоремы 2.2, тогда для решения задачи (1.1), (3.1), (2.2) справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned} &\|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha u\|_0^2 d\tau + \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha u_x\|_0^2 d\tau + \int_0^t (D_{0\tau}^\alpha u(l, \tau_1))^2 + (D_{0\tau}^\alpha u(0, \tau_1))^2 d\tau \\ &\leq M_3 \left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \|u_0(x)\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|u_1(x)\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. Для новой неизвестной функции $g(x, t)$ получим определение функции $g(x, t)$, как решение уравнения (2.5) с начальными условиями (2.6) и граничными условиями

$$\begin{cases} \Pi_3(0, t) = \beta_1(t)g(0, t) + D_{0t}^\alpha g(0, t) - \mu_1(t), \\ -\Pi_3(l, t) = \beta_2(t)g(l, t) + D_{0t}^\alpha g(l, t) - \mu_2(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\Pi_3(x, t) = k(x, t)g_x + D_{0t}^\alpha(\eta g_x)$.

Последнее слагаемое правой части неравенства (2.14), с учетом (3.3), представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_3 D_{0t}^\alpha g \Big|_0^l &= D_{0t}^\alpha g(l, \tau) (k g_x(l, t) + D_{0t}^\alpha(\eta(l) g_x(l, \tau))) \\ &\quad - D_{0t}^\alpha g(0, \tau) (k g_x(0, t) + D_{0t}^\alpha(\eta(0) g_x(0, \tau))) \\ &= D_{0t}^\alpha g(l, \tau) (\mu_2(t) - \beta_2(t) g(l, t) - D_{0t}^\alpha g(l, \tau)) \\ &\quad - D_{0t}^\alpha g(0, \tau) (\beta_1(t) g(0, t) + D_{0t}^\alpha g(0, \tau) - \mu_1(t)) \\ &\quad + D_{0t}^\alpha g(l, \tau) \mu_2(t) - D_{0t}^\alpha g(l, \tau) \beta_2 g(l, t) - D_{0t}^\alpha g(l, \tau) D_{0t}^\alpha g(l, \tau) \\ &\quad + D_{0t}^\alpha g(0, \tau) \mu_1(t) - D_{0t}^\alpha g(0, \tau) \beta_1 g(0, t) - D_{0t}^\alpha g(0, \tau) D_{0t}^\alpha g(0, \tau). \end{aligned}$$

Оценим сумму $\mu_2(t)D_{0t}^\alpha g(l, t) + \mu_1(t)D_{0t}^\alpha g(0, t)$:

$$\mu_1 D_{0t}^\alpha g(0, t) + \mu_2 D_{0t}^\alpha g(l, t) \leq \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \left(\varepsilon \|(D_{0t}^\alpha g(x, t))_x\|_0^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \|D_{0t}^\alpha g(x, t)\|_0^2 \right).$$

Учитывая полученную выше оценку, из (2.14) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \left(1 - \varepsilon - \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \right) \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + (k g_x, D_{0t}^\alpha g_x) + (c_1 - \varepsilon) \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 \\ + (qg, D_{0t}^\alpha g) + \beta_2(t) D_{0t}^\alpha g(l, \tau) g(l, t) + \beta_1(t) D_{0t}^\alpha g(0, \tau) g(0, t) \\ + (D_{0t}^\alpha g(l, \tau))^2 + (D_{0t}^\alpha g(0, \tau))^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Проинтегрируем (3.4) по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \nu(\varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau + \int_0^t (k g_x, D_{0\tau}^\alpha g_x) d\tau + \nu_1(\varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x\|_0^2 d\tau \\ + \int_0^t (qg, D_{0\tau}^\alpha g) d\tau + \int_0^t \beta_2 g(l, \tau) D_{0\tau}^\alpha g(l, \tau) d\tau \\ + \int_0^t \beta_1 g(0, \tau) D_{0\tau}^\alpha g(0, \tau) d\tau + \int_0^t (D_{0\tau}^\alpha g(l, \tau))^2 + (D_{0\tau}^\alpha g(0, \tau))^2 d\tau \\ \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \|F\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \frac{A_1}{2} \|(D_{0t}^\alpha g)(x, 0)\|_0^2, \end{aligned}$$

где $\nu(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right)$, $\nu_1(\varepsilon) = c_1 - \varepsilon$.

При выполнении условий $k_t \leq 0$, $q_t \leq 0$, $\beta_{1t} \leq 0$, $\beta_{2t} \leq 0$ можно усилить последнее неравенство. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \nu(\varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau + \nu_1(\varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x\|_0^2 d\tau + \int_0^t (D_{0\tau}^\alpha g(l, \tau_1))^2 + (D_{0\tau}^\alpha g(0, \tau_1))^2 d\tau \\ \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \|F\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \frac{A_1}{2} \|u_1(x)\|_0^2. \end{aligned}$$

Откуда следует оценка (3.2), доказывающая единственность решения задачи (1.1), (3.1), (2.2). \square

Задача 3.2. В задаче (1.1), (3.1), (2.2) заменим граничные условия (3.1) условиями вида

$$\begin{cases} \Pi_4(0, t) = \beta_1(t) (u(0, t) + D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau)) - \mu_1(t), \\ -\Pi_4(l, t) = \beta_2(t) (u(l, t) + D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau)) - \mu_2(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

Теорема 3.2. Если выполняются условия теоремы 2.2, тогда для решения задачи (1.1), (3.5), (2.2) справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha u\|_{2, \Omega_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha u_x\|_{2, \Omega_t}^2 + (D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau))^2 + (D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau))^2 \\ \leq M \left(\|f\|_{2, \Omega_t}^2 + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \|u_1(x)\|_0^2 + u_0^2(0) + u_0^2(l) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) скалярно на $D_{0t}^\alpha u$:

$$\begin{aligned} (A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u, D_{0t}^\alpha u) + (D_{0t}^\alpha u, D_{0t}^\alpha u) - ((ku_x)_x, D_{0t}^\alpha u) \\ - (D_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x, D_{0t}^\alpha u) + (qu, D_{0t}^\alpha u) = (f, D_{0t}^\alpha u). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Повторим те же рассуждения, которые проводились при выводе неравенства (2.14), тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l ku_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \\ + c_1 \|D_{0t}^\alpha u_x\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l qu(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \\ \leq \Pi_4(x, t) D_{0t}^\alpha u(x, \tau) \Big|_0^l + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для получения априорной оценки преобразуем, с учетом (3.5), первое слагаемое правой части неравенства (3.8):

$$\begin{aligned} \Pi_4 D_{0t}^\alpha u \Big|_0^l &= D_{0t}^\alpha u(l, \tau) (ku_x(l, t) + D_{0t}^\alpha (\eta(l) u_x(l, \tau))) - D_{0t}^\alpha u(0, \tau) (ku_x(0, t) \\ &\quad + D_{0t}^\alpha (\eta(0) u_x(0, \tau))) = D_{0t}^\alpha u(l, \tau) (\mu_2(t) - \beta_2(t) (u(l, t) + D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau))) \\ &\quad - D_{0t}^\alpha u(0, \tau) (\beta_1(t) (u(0, t) + D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau)) - \mu_1(t)) \\ &= D_{0t}^\alpha u(l, \tau) \mu_2(t) - D_{0t}^\alpha u(l, \tau) \beta_2(t) u(l, t) - D_{0t}^\alpha u(l, \tau) \beta_2(t) D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau) \\ &\quad + D_{0t}^\alpha u(0, \tau) \mu_1(t) - D_{0t}^\alpha u(0, \tau) \beta_1(t) u(0, t) - D_{0t}^\alpha u(0, \tau) \beta_1(t) D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau). \end{aligned}$$

Учитывая оценки

$$\begin{aligned} D_{0t}^\alpha u(l, \tau) \beta_2(t) D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau) &\geq c_0 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau))^2, \\ D_{0t}^\alpha u(0, \tau) \beta_1(t) D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau) &\geq c_0 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau))^2, \end{aligned}$$

из (3.8) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \left(1 - \varepsilon - \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right)\right) \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + (ku_x, D_{0t}^\alpha u_x) + (c_1 - \varepsilon) \|D_{0t}^\alpha u_x\|_0^2 \\ + (qu, D_{0t}^\alpha u) + \beta_2(t) D_{0t}^\alpha u(l, \tau) u(l, t) + \beta_1(t) D_{0t}^\alpha u(0, \tau) u(0, t) \\ + \frac{c_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau))^2 + \frac{c_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau))^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} (\mu_1^2 + \mu_2^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Проинтегрируем (3.9) по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \nu(\varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha u\|_0^2 d\tau + \int_0^t (ku_x, D_{0\tau}^\alpha u_x) d\tau + \nu_1(\varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha u_x\|_0^2 d\tau \\ + \int_0^t (qu, D_{0\tau}^\alpha u) d\tau + \int_0^t \beta_2 u(l, \tau) D_{0\tau}^\alpha u(l, \tau_1) d\tau + \int_0^t \beta_1 u(0, \tau) D_{0\tau}^\alpha u(0, \tau_1) d\tau \\ + \frac{c_0}{2} \left[(D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau))^2 + (D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau))^2 \right] \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau \\ + \frac{A_1}{2} \|(D_{0t}^\alpha u)(x, 0)\|_0^2 + \frac{c_0}{2} (D_{0t}^{\alpha-1} u(l, 0))^2 + \frac{c_0}{2} (D_{0t}^{\alpha-1} u(0, 0))^2, \end{aligned}$$

где $\nu(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right)$, $\nu_1(\varepsilon) = c_1 - \varepsilon$.

При выполнении условий $k_t \leq 0$, $q_t \leq 0$, $\beta_{1t} \leq 0$, $\beta_{2t} \leq 0$ усилим последнее неравенство. В результате получим оценку

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \nu(\varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha u\|_0^2 d\tau + \nu_1(\varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha u_x\|_0^2 d\tau + \frac{c_0}{2} \left[(D_{0t}^{\alpha-1} u(l, \tau))^2 \right. \\ \left. + (D_{0t}^{\alpha-1} u(0, \tau))^2 \right] \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \frac{A_1}{2} \|(D_{0t}^\alpha u)(x, 0)\|_0^2 \\ + \frac{c_0}{2} (D_{0t}^{\alpha-1} u(l, 0))^2 + \frac{c_0}{2} (D_{0t}^{\alpha-1} u(0, 0))^2, \end{aligned}$$

из которой вытекает искомая оценка (3.6), доказывающая единственность решения задачи (1.1), (3.5), (2.2). \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Чудновский. *Теплофизика почв*. М.: Наука. 1976.
2. А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит. 2003.
3. С.М. Архестова, М.Х. Шхануков-Лафишев. *Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера-Лыкова с нелокальным условием* // Известия КБНЦ РАН. **3**, 7–16 (2012).
4. М.М. Лафишева, М.А. Керефов, Р.В. Дышекова. *Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера-Лыкова с нелокальным условием* // Владикавказский математический журнал. **19**:1, 50–58 (2017).

5. С.Х. Геккиева. *Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова* // Вестник КРАУНЦ, Физ.-мат. науки. **4** (24), 19–28 (2018).
6. М.А. Керевов, Ф.М. Нахушева, С.Х. Геккиева. *Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью* // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. **24**:3, 23–29 (2018).
7. С.Х. Геккиева, М.А. Керевов. *Краевая задача для нелокального уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **167**, 27–33 (2019).
8. S.Kh. Gekkieva, M.A. Kerefov. *Dirichlet boundary value problem for Aller–Lykov moisture transfer equation with fractional derivative in time* // Ufa Math. J. **11**:2, 71–81 (2019).
9. М.А. Керевов, С.Х. Геккиева. *Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. **23**:4, 607–621 (2019).
10. М.А. Керевов, С.Х. Геккиева. *Численно-аналитический метод решения краевой задачи для обобщенных уравнений влагопереноса* // Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Комп. науки. **31**:1, 19–34 (2021).
11. А.В. Пеху. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука. 2005.
12. А.А. Самарский. *Теория разностных схем*. М.: Наука. 1989.
13. М.А. Керевов. *Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной*. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2000. 75 с.
14. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника. 1987.
15. О.А. Ладыженская. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука. 1973.
16. А.В. Бицадзе, А.А. Самарский. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач* // Докл. АН СССР. **185**:4, 739–740 (1969).
17. А.М. Нахушев. *Уравнения математической биологии*. М.: Физматлит. 1995.
18. А.И. Кожанов. *Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера* // Дифференц. уравнения. **40**:6, 763–774 (2004).
19. M.Kh. Beshtokov. *Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann–Liouville fractional derivative* // Differential equations. **54**:6, 763–778 (2018).
20. М.Х. Бештоков. *Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся дифференциальных уравнений дробного порядка с нелокальным линейным источником и разностные методы их численной реализации* // Уфимск. матем. журн. **11**:2, 36–55 (2019).

Сакинат Хасановна Геккиева,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул. Шортанова, 89 А,
360000, г. Нальчик, Россия
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

Марат Асланбиевич Керевов,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173,
360004, г. Нальчик, Россия
E-mail: kerefov@mail.ru

Фатима Мухамедовна Нахушева,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173,
360004, г. Нальчик, Россия
E-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru