ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 1 (2023). С. 3-21.

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ ПОРЯДКА НАИЛУЧШИХ M–ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА–КАРАМАТЫ

Г.А. АКИШЕВ

Аннотация. В статье рассматривается известный класс слабо колеблющихся функций и по этим функциям определяется анизотропное пространство Лоренца–Караматы 2π–периодических функций многих переменных. Частными случаями этих пространств, являются анизотропные пространства Лоренца–Зигмунда и Лоренца. В анизотропном пространстве Лоренца–Караматы определен аналог класса Никольского–Бесова. Основной целью статьи является нахождение точных порядков наилучших M–членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского–Бесова по норме другого анизотропного пространства Лоренца–Караматы. В статье установлены точные по порядку двусторонние оценки наилучших M–членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского–Бесова в анизотропном пространстве Лоренца–Караматы в разных метриках. Для доказательства оценки сверху наилучших M–членных приближений, использована идея метода жадных алгоритмов предложенного В.Н. Темляковым, с модификацией для анизотропного пространства Лоренца–Караматы.

Ключевые слова: пространство Лоренца–Караматы, класс Никольского–Бесова, M–членное приближение.

Mathematics Subject Classification: 41A10, 41A25, 42A05

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \leqslant x_j < 1;\ j = 1, \dots, m\} = [0,1)^m$ — m-мерный куб.

Напомним определения невозрастающей перестановки функции.

Определение 1.1. *Пусть f — измеримая по Лебегу функция одной переменной на $[0,1)$. Функция распределения для $|f|$ определяется как мера Лебега (см., например,* [1, с. 81]*)*

$$\mu_f(y) := \mu\{x \in [0,1) :\ |f(x)| > y\}, \quad 0 \leqslant y < \infty.$$

Две неотрицательные измеримые функции f и g называются равноизмеримыми, если их функции распределения равны (см., например, [1, с. 82]).

Определение 1.2. *Невозрастающей перестановкой функции f одной переменной называется невозрастающая на $[0,1)$ функция $f^*(t)$ равноизмеримая с функцией $|f(x)|$ (см., например,* [1, с. 83]*).*

G.A. Akishev On estimates of the order of best M–term approximations of multivariate functions in anisotropic Lorentz–Karamata spaces.

Исследование выполнено в рамках гранта МОН РК, Проект AP 08855579.

Поступила 31 ноября 2021 г.

Невозрастающая перестановка f^* функции f одной переменной на $[0,1)$ определяется по формуле (см., например, [1, с. 83])

$$f^*(t) := \inf\{y > 0 : \ \mu_f(y) \leqslant t\}, \quad t \in [0,1).$$

Теперь напомним определение невозрастающей перестановки функции m переменных.

Определение 1.3 (см. [2]–[4]). *Пусть $f(x_1,\dots,x_m)$ — измеримая по Лебегу функция m переменных на $I^m = [0,1)^m$. Невозрастающей перестановкой функции $|f(x_1,\dots,x_m)|$, по первой переменной понимается функция $f^{*_1}(t_1,x_2,\dots,x_m)$, равноизмеримая на I^m, невозрастающая по t_1 и такая, что функции $|f(x_1,\dots,x_m)|$ и $f^{*_1}(t_1,x_2,\dots,x_m)$ равноизмеримы как функции одной переменной для почти всех фиксированных $x_2,\dots,x_m$.*

Аналогичным образом рассматривая невозрастающую перестановку функции $f^{*_1}(t_1,x_2,\dots,x_m)$ по переменной x_2, при фиксированных $t_1,x_3,\dots,x_m$ определяется функция $f^{*_1*_2}(t_1,t_2,x_3,\dots,x_m)$ равноизмеримая с функцией $|f(x_1,\dots,x_m)|$. Продолжая этот процесс определяется невозрастающая перестановка $f^{*_1*_2\cdots*_m}(t_1,t_2,\dots,t_m)$ равноизмеримая с функцией $|f(x_1,\dots,x_m)|$.

Определение 1.4 (см., например, [5]). *Функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей на $[1,\infty)$, если существует такое постоянное число C, что $\varphi(t_1) \leqslant C\varphi(t_2)$ для $1 \leqslant t_1 < t_2 < \infty$.*

Функция $\varphi(t)$ называется почти убывающей на $[1,\infty)$, если существует такое постоянное число C, что $\varphi(t_1) \geqslant C\varphi(t_2)$ для $1 \leqslant t_1 < t_2 < \infty$.

Определение 1.5. *Положительная и измеримая по Лебегу функция $b(t)$ называется слабо меняющейся (slowly varying) на $[1,+\infty)$ в смысле Караматы, если для любого $\varepsilon > 0$ функция $t^{\varepsilon}b(t)$ почти возрастает на $[1,\infty)$ и функция $t^{-\varepsilon}b(t)$ почти убывает на $[1,\infty)$ (см.* [6], [7]*).*

Множество таких функций обозначается $SV[1,\infty)$. Для заданной слабо меняющейся функции v на $[1,\infty)$, положим $V(t) = v(1/t)$ для $t \in (0,1]$.

Пусть даны числа $p,\tau \in (1,\infty)$ и функция $v \in SV[1,\infty)$. Пространством Лоренца–Караматы $L_{p,V,\tau}(\mathbb{T})$ называется множество всех измеримых по Лебегу 2π периодических функций f для которых (см., например, [6, с. 112])

$$\|f\|_{p,V,\tau} := \left\{\int_0^1 \big(f^*(t)\big)^{\tau} V^{\tau}(t) t^{\frac{\tau}{p}-1} dt\right\}^{\frac{1}{\tau}} < +\infty,$$

где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi x)|$, $x \in [0,1)$, $\mathbb{T} = [0,2\pi)$.

Известно, что $L_{p,V,\tau}(\mathbb{T})$ является симметричным пространством (см., например, [6, с. 114]).

Отметим, что при $V(t) = 1$ пространство Лоренца–Караматы $L_{p,V,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с известным пространством Лоренца, обозначаемым символом $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p$, $\tau < \infty$ (см. [8, с. 228]) с

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \big(f^*(t)\big)^{\tau} t^{\frac{\tau}{p}-1} dt\right)^{1/\tau} < \infty,$$

для $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \tau < +\infty$.

Пусть даны функции $v_j \in SV[1,\infty)$, для $j = 1,\dots,m$ и положим $V_j(t) = v_j(1/t)$, для $t \in (0,1]$, $j = 1,\dots,m$ и $\overline{V}(t) = (V_1(t),\dots,V_m(t))$, $\overline{p} = (p_1,\dots p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1,\dots\tau_m)$, числа $p_j,\tau_j \in (1,\infty)$. Анизотропное пространство Лоренца–Караматы $L^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, состоит из всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина (см. [2])

$$\|f\|^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}} :=\| \dots \|f^{*_1,\dots,*_m}\|_{p_1,V_1,\tau_1} \dots \|_{p_m,V_m,\tau_m}$$

$$=\Big[\int_0^1\Big[\dots\Big[\int_0^1 (f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m))^{\tau_1}\left(\prod_{j=1}^m V_j(t_j)t_j^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{\tau_j}}\right)^{\tau_1}dt_1\Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\dots\Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}}dt_m\Big]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j\in[0,1]$ при фиксированных остальных переменных.

Через $\mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим множество всех функций $f\in L^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j=0,\quad j=1,\dots,m.$$

Для $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$ через $l_{\overline{p}}$ обозначается пространство последовательностей $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m_+}$ действительных чисел с нормой

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{p}}(\mathbb{Z}^m_+)}=\left\{\sum_{n_m=0}^{\infty}\Big[...\Big[\sum_{n_1=0}^{\infty}|a_{\overline{n}}|^{p_1}\Big]^{\frac{p_2}{p_1}}...\Big]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}}<+\infty,$$

для $1\leqslant p_j<+\infty$, $j=1,2,...,m$ и

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}\right\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^m_+)}=\sup_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m_+}|a_{\overline{n}}|$$

для $p_j=\infty,\ \ j=1,...,m$

Введем обозначения: $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}$, $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})=\sum\limits_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}(f)e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$, где $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle=\sum\limits_{j=1}^m y_jx_j$,

$$\rho(\overline{s})=\left\{\overline{k}=(k_1,...,k_m)\in\mathbb{Z}^m:\ [2^{s_j-1}]\leqslant|k_j|<2^{s_j},\ j=1,...,m\right\},$$

$[y]$ — целая часть действительного числа y и $s_j\in\mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим функциональный класс Никольского–Бесова

$$S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}B=\Big\{f\in\mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m):\ \|f\|^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}+\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^m 2^{s_jr_j}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}\Big\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\Big\|_{l_{\overline{\theta}}}\leqslant 1\Big\},$$

где $\overline{\theta}=(\theta_1,...,\theta_m)$, $\overline{r}=(r_1,...,r_m)$, $1\leqslant\theta_j\leq+\infty$, $0<r_j<+\infty$, $j=1,...,m$.

В случае $V_j(t)=1$ и $\tau_j=p_j=p$, $j=1,\dots,m$ класс $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}B$ совпадает с известным классом Никольского–Бесова в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1\leqslant p<\infty$ (см. [9]–[11]).

Пусть дан вектор $\overline{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$, $\gamma_j>0$, $j=1,\dots,m$. Положим

$$Q^{\overline{\gamma}}_n=\cup_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle<n}\rho(\overline{s}),\qquad T(Q^{\overline{\gamma}}_n)=\{t(\overline{x})=\sum_{\overline{k}\in Q^{\overline{\gamma}}_n}b_{\overline{k}}e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle}\},$$

$E^{(\overline{\gamma})}_n(f)_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}$ — наилучшее приближение функции $f\in L^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ полиномами из множества $T(Q^{\overline{\gamma}}_n)$.

Положим

$$E^{(\overline{\gamma})}_n(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}:=\sup_{f\in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B}E^{(\overline{\gamma})}_n(f)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}},$$

где $\overline{q}=(q_1,\dots,q_m)$, $\overline{V}^{(i)}(t)=(V^{(i)}_1(t),\dots,V^{(i)}_m(t))$, $t\in(0,1]$, $\overline{\tau}^{(i)}=(\tau^{(i)}_1,\dots,\tau^{(i)}_m)$ и $1<q_j$, $\tau^{(i)}_j<\infty$, $i=1,2$, $j=1,...,m$.

Пусть X — нормированное пространство 2π–периодических функций многих переменных. Для функции $f\in X$ наилучшим M–членным тригонометрическим приближением называется величина (см. [12])

$$e_M(f)_X = \inf_{\overline{k}^j, b_j} \Big\| f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{i\langle \overline{k}^j, \overline{x}\rangle} \Big\|_X,$$

где $\{\overline{k}^j\}_{j=1}^M$ — система векторов $\overline{k}^j = (k_1^j, ..., k_m^j)$ с целочисленными координатами, b_j — действительные или комплексные числа. Если F — некоторый функциональный класс в пространстве X, то положим $e_M(F)_X = \sup_{f\in F} e_M(f)_X$.

Оценкам порядка величины $e_M(F)_Y$ в пространстве $Y = L_q(\mathbb{T}^m)$ для классов Соболева $F = W_p^r$, Никольского–Бесова $F = S_{p,\theta}^r B$, Лизоркина–Трибеля посвящены исследования Р.С. Исмагилова [12], Э.С. Белинского [13]–[15], Ю. Маковоза [16], В.Е. Майорова [17], Р. Девора [18], В.Н. Темлякова [19]–[21], А.С. Романюка [22], М. Хансена и У. Зикеля [23], С. А. Стасюка [24], Д.Б. Базарханова [25]–[26] и других авторов. По этой тематике, более подробную библиографическую ссылку можно найти в обзорной статье [27].

Оценки наилучших M–членных приближений функций класса Никольского–Бесова в пространствах Лоренца и Лебега с анизотропными нормами исследованы в [28]–[34].

Методы доказательства оценок снизу и сверху для наилучших M–членных тригонометрических приближений классов периодических функций многих переменных смешанной гладкости были разработаны В.Н. Темляковым [19]–[21] и были использованы другими авторами (например, [22], [24]–[26], [28]–[32], а также см. библиографию в [27]). В предлагаемой статье для доказательства основного результата (теорема 3.1), использованы идея метода В.Н. Темлякова, с модификацией для анизотропных пространств Лоренца–Караматы.

Статья состоит из двух разделов. В первом разделе даны некоторые вспомогательные результаты необходимые для доказательства основных результатов. Во втором разделе сформулированы и доказаны основные результаты статьи. Отметим, что в случае

$$V_j^{(1)}(t) = V_j^{(2)}(t) = 1, \qquad t \in (0,1]$$

и $p_j = \tau_j^{(1)} = p$, $q_j = \tau_j^{(2)} = q$, $\theta_j = \theta$ для $j = 1, ..., m$ и $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant r_m$ теорема 3.1 совпадает с ранее известными результатами В.Н. Темлякова [19, теорема 2.2, с. 92] и А.С. Романюка [22, теорема 3.1] для пространств Лебега и в общем случае обобщает их на анизотропные пространства Лоренца–Караматы.

Через $C(p, q, y, ..)$ обозначим положительные величины зависящие от указанных в скобках параметров (иногда без указания параметров), но не зависящие от M–порядка наилучшего M–членного приближения. Запись $A_n \asymp B_n$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 A_n \leqslant B_n \leqslant C_2 A_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Также для краткости записи вместо неравенств $B_n \geqslant C_1 A_n$ или $B_n \leqslant C_2 A_n$, часто будем использовать $B \gg A$ или $B \ll A$, соответственно.

2. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе определен один класс функций и даны несколько вспомогательных утверждений.

Через $SVL[1,\infty)$ обозначим множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1,\infty)$ функций $v(t)$, для которых функция $(\log 2t)^{-\varepsilon} v(t)$ почти убывает и функция $(\log 2t)^{\varepsilon} v(t)$ почти возрастает на $[1,\infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$.

Ясно, что $SVL[1,\infty) \subset SV[1,\infty)$.

Пример 1. Функция $v(t) = (1 + \log(1 + \log t))^\alpha \in SVL[1,\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Здесь и далее $\log t$ означает логарифм с основанием 2 от числа $t > 0$.

Теорема 2.1 (см. [35]). *Пусть* $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_m)$, $\overline{q}=(q_1,\ldots,q_m)$, $\overline{\tau}^{(1)}=(\tau_1^{(1)},\ldots,\tau_m^{(1)})$, $\overline{\tau}^{(2)}=(\tau_1^{(2)},\ldots,\tau_m^{(2)})$, $\overline{r}=(r_1,\ldots,r_m)$, $\overline{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ *и* $1<\tau_j^{(1)},\tau_j^{(2)}<+\infty$, $1<p_j<q_j<+\infty$ *и функции* $v_j^{(i)}\in SV[1,\infty)$, $V_j^{(i)}(t)=v_j^{(i)}(1/t)$, $t\in(0,1]$, $j=1,\ldots,m$, $\overline{V}^{(i)}(t)=(V_1^{(i)}(t),...,V_m^{(i)}(t))$, $i=1,2$.

Если $f\in L^*_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)}}(\mathbb{T}^m)$ *и величина*

$$\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)}}\right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\in l_{\overline{\tau}^{(2)}},$$

то $f\in L^*_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^*_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}\leqslant C\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)}}\right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)}}}.$$

Теорема 2.2 (см. [37]). *Пусть* $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_m)$, $\overline{q}=(q_1,\ldots,q_m)$, $\overline{\tau}^{(1)}=(\tau_1^{(1)},\ldots,\tau_m^{(1)})$, $\overline{\tau}^{(2)}=(\tau_1^{(2)},\ldots,\tau_m^{(2)})$, $\overline{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$, $\overline{\gamma}^{'}=(\gamma_1^{'},\ldots,\gamma_m^{'})$, $\overline{r}=(r_1,\ldots,r_m)$, $\overline{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ *и* $0<\theta_j\leq\infty$, $1<\tau_j^{(1)},\tau_j^{(2)}<+\infty$, $1<p_j<q_j<+\infty$, $r_j>\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}$, $\gamma_j=\frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}}$, $1\leqslant\gamma_j^{'}\leqslant\gamma_j$, $j=1,...,m$ *и* $r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}=\min\{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}:j=1,...,m\}$, $A=\{j:\frac{\gamma_j}{\gamma_j^{'}}=1,\ j=1,...,m\}$, $j_1=\min\{j\in A\}$ *и функции* $v_j^{(i)}\in SV[1,\infty)$, $V_j^{(i)}(t)=v_j^{(i)}(1/t)$, $t\in(0,1]$, $j=1,\ldots,m$, $\bar{V}^{(i)}(t)=(V_1^{(i)}(t),...,V_m^{(i)}(t))$, $i=1,2$.

1. Если $1\leqslant\tau_j^{(2)}<\theta_j\leqslant+\infty$ *и функции* $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}\in SVL[1,\infty)$, $j=1,...,m$, *то*

$$E_n^{(\overline{\gamma}^{'})}\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\right)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}\asymp 2^{-n\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})}n^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j})},$$

для $n\in\mathbb{N}$ *таких, что* $n>n_0$.

2. Если $1\leqslant\theta_j\leqslant\tau_j^{(2)}<+\infty$, $j=1,...,m$, *то справедливо соотношение*

$$E_n^{(\overline{\gamma}^{'})}\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\right)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}\asymp 2^{-n\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})}$$

в случаях $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}\in SVL[1,\infty)$, $j=1,...,m$ *и* $A\setminus\{j_1\}=\emptyset$ *или* $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)}$ *почти возрастает, а* $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)}t^{-\varepsilon}$ *почти убывает на* $[1,\infty)$, $\varepsilon>0$, $j=1,...,m$ *и множество* $A\setminus\{j_1\}\neq\emptyset$, *для* $n\in\mathbb{N}$, *таких, что* $n>n_0$, *где* n_0 *некоторое положительное число большее* 1.

Следующее утверждение будет использовано в доказательстве оценок снизу M–членного приближения функций класса Никольского–Бесова в теореме 3.1.

Теорема 2.3. *Пусть функции* $v_j\in SV[1,\infty)$, $V_j(t)=v_j(1/t)$, $t\in(0,1]$, $1<\tau_j,\beta_j<+\infty$, $1<p_j<\lambda_j<\infty$, $j=1,...,m$. *Если* $f\in L^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, *то справедливо неравенство*

$$\|f\|^*_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}\gg\left\{\sum_{s_m=1}^\infty\left[...\left[\sum_{s_1=1}^\infty\Big(\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{p_j})}V_j(2^{-s_j})\Big)^{\tau_1}\left(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{\lambda},\overline{\beta}}\right)^{\tau_1}\right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}...\right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{\tau_m}}.$$

Эта теорема доказывается также, как теорема 4 в [33] и теорема 4 в [37].

Рассмотрим множества

$$Y^m(\overline{\gamma}, n) = \{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma}\rangle \geqslant n\} \quad \text{и} \quad \kappa^m(n, \overline{\gamma}) = \{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \overline{s}, \overline{\gamma}\rangle = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.1. *Пусть даны функции* $V_j(t) = v_j(1/t)$, $t \in (0,1]$, $j = 1,\ldots,m$ *и* $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $0 < \gamma_j' \leqslant \gamma_j$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1,\ldots,m$ *и* $\alpha \in (0,\infty)$, $\delta = \min\{\frac{\gamma_j}{\gamma_j'} : j = 1,\ldots,m\}$, $A = \{j = 1,\ldots,m : \frac{\gamma_j}{\gamma_j'} = \delta\}$, $j_1 = \min\{j : j \in A\}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle} \prod_{j=1}^m V_j(2^{-s_j}) \right\}_{\overline{s}\in Y^m(n,\overline{\gamma}')} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant C 2^{-n\alpha\delta} \prod_{j\in A} V_j(2^{-n/\gamma_j'}) n^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}},$$

в случаях:

если $1 \leqslant \theta_j < \infty$ *и функции* $v_j \in SV[1,\infty)$, , $j = 1,\ldots,m$;

или если $\theta_j = \infty$, $j = 1,\ldots,m$ *и функции* $v_j \in SV[1,\infty)$, $j = 1,\ldots,m$ *и множество* $A \setminus \{j_1\} = \emptyset$;

или если $\theta_j = \infty$, $j = 1,\ldots,m$ *и функции* $v_j(t)$ *почти возрастают, а* $t^{-\varepsilon}v_j(t)$ *почти убывают на* $[1,\infty)$, *для* $\varepsilon > 0$, $j = 1,...,m$ *и множество* $A \setminus \{j_1\} \neq \emptyset$.

Доказательство. В случае $1 \leqslant \theta_j < \infty$ и функции $v_j \in SV[1,\infty)$, $j = 1,\ldots,m$ эта лемма фактически доказана в [37].

Рассмотрим случай $\theta_j = \infty$, $j = 1,\ldots,m$. Оценим величину

$$I_n := \sup_{\overline{s}\in Y^m(n,\overline{\gamma}')} 2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle} \prod_{j=1}^m V_j(2^{-s_j}). \tag{2.1}$$

Пусть $m = 2$. Множество $Y^2(n,\overline{\gamma}')$ можно представить в следующем виде

$$Y^2(n,\overline{\gamma}') = \{\overline{s} = (s_1,s_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \ 0 \leqslant s_2 < \frac{n}{\gamma_2'}, s_1 \geqslant \frac{n - s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}\}$$
$$\cup \{\overline{s} = (s_1,s_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \ s_2 \geqslant \frac{n}{\gamma_2'}, s_1 \geqslant 0\}.$$

По условию леммы функция $v_2 \in SV[1,\infty)$. Значит функция $v_2(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1,\infty)$ для $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle} \prod_{j=1}^2 V_j(2^{-s_j}) &= 2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle} \prod_{j=1}^m v_j\left(2^{s_j}\right) \\ &\leqslant C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha} 2^{-s_2\gamma_2'(\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'})\alpha} v_2(2^{s_2}) v_1(2^{\frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

для $s_1 \geqslant \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}$.

Пусть $\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} > 0$. Выберем число $\eta \in \left(0, \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\right)\alpha\right)$. Так как функция $v_1(t)t^{\eta}$ почти возрастает на $[1,\infty)$ для $\eta > 0$, а $v_2(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1,\infty)$ для $\varepsilon > 0$, и $0 < n - s_2\gamma_2' \leqslant n$ для $0 \leqslant s_2 < n/\gamma_2'$, то из неравенства (2.2) получим, что

$$
\begin{aligned}
2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\prod_{j=1}^{2}V_j(2^{-s_j}) \leqslant & C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}2^{-n\eta}2^{(n-s_2\gamma_2')\eta} \\
& \times v_1(2^{\frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}})2^{-s_2\gamma_2'((\frac{\gamma_2}{\gamma_2'}-\frac{\gamma_1}{\gamma_1'})\alpha-\eta)}v_2(2^{s_2}) \\
\leqslant & C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}2^{-n\eta}2^{n\eta}v_1(2^{\frac{n}{\gamma_1'}})2^{-s_2\gamma_2'((\frac{\gamma_2}{\gamma_2'}-\frac{\gamma_1}{\gamma_1'})\alpha-\eta)}v_2(2^{s_2}) \\
\leqslant & C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}v_1(2^{\frac{n}{\gamma_1'}}) = C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1'}})
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

для $0 \leqslant s_2 < \frac{n}{\gamma_2'}$ и $s_1 \geqslant \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}$.

Пусть $\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} < 0$. Тогда выбирая число $\eta \in (0, -(\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'})\alpha)$ аналогично (2.3) можно доказать, что

$$
2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\prod_{j=1}^{2}V_j(2^{-s_j}) \leqslant C2^{-n\frac{\gamma_2}{\gamma_2'}\alpha}V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2'}}) \tag{2.4}
$$

для $0 \leqslant s_2 < \frac{n}{\gamma_2'}$ и $s_1 \geqslant \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}$.

Пусть $\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} = 0$. Тогда из (2.2) имеем

$$
2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\prod_{j=1}^{2}V_j(2^{-s_j}) \leqslant C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}v_2(2^{s_2})v_1(2^{\frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}}) \tag{2.5}
$$

для $0 \leqslant s_2 < \frac{n}{\gamma_2'}$ и $s_1 \geqslant \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}$. Так как функции v_j, $j = 1, 2$ почти возрастают, то

$$
v_2(2^{s_2}) \leqslant Cv_2(2^{\frac{n}{\gamma_2'}}), \quad 0 \leqslant s_2 < \frac{n}{\gamma_2'}
$$

и

$$
v_1(2^{\frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}}) \leqslant Cv_1(2^{\frac{n}{\gamma_1'}}), \quad 0 < \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'} \leqslant \frac{n}{\gamma_1'}.
$$

Поэтому из (2.5) следует, что

$$
2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\prod_{j=1}^{2}V_j(2^{-s_j}) \leqslant C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}v_1(2^{\frac{n}{\gamma_1'}})v_2(2^{\frac{n}{\gamma_2'}}) = C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1'}})V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2'}}) \tag{2.6}
$$

для $0 \leqslant s_2 < \frac{n}{\gamma_2'}$ и $s_1 \geqslant \frac{n-s_2\gamma_2'}{\gamma_1'}$, в случае $\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} = 0$.

Пусть $s_1 \geqslant 0$ и $s_2 \geqslant \frac{n}{\gamma_2'}$. Тогда в силу того, что функция $v_j(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1, \infty)$ для $\varepsilon > 0$ получим

$$
\begin{aligned}
2^{-\alpha\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\prod_{j=1}^{2}V_j(2^{-s_j}) &= 2^{-s_1\gamma_1\alpha}v_1(2^{s_1})2^{-s_2\gamma_2\alpha}v_2(2^{s_2}) \\
&\leqslant C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}v_1(1)v_2(2^{\frac{n}{\gamma_2'}}) = C2^{-n\frac{\gamma_2}{\gamma_2'}\alpha}V_1(1)V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2'}}).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Теперь, из неравенств (2.1), (2.3) и (2.7) следует, что

$$
I_n \leqslant C\Big\{2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1'}}) + 2^{-n\frac{\gamma_2}{\gamma_2'}\alpha}V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2'}})\Big\} \leqslant C2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha}V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1'}}), \tag{2.8}
$$

если $\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} > 0$.

Если $\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} < 0$, то из неравенств (2.1), (2.4) и (2.7) следует, что

$$I_n \leqslant C 2^{-n\frac{\gamma_2}{\gamma_2'}\alpha} V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2'}}). \tag{2.9}$$

Если $\frac{\gamma_2}{\gamma_2'} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} = 0$, то из неравенств (2.1), (2.6) и (2.7)

$$\begin{aligned} I_n &\leqslant C\Big\{2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha} V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1'}}) V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2'}}) + 2^{-n\frac{\gamma_2}{\gamma_2'}\alpha} V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2'}})\Big\} \\ &\leqslant C 2^{-n\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\alpha} V_2(2^{-\frac{n}{\gamma_2'}}) V_1(2^{-\frac{n}{\gamma_1'}}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

для почти возрастающей на $[1,\infty)$ функции v_j, $j = 1,2$.

Этим утверждение леммы доказано для $m = 2$, в случае $\theta_j = \infty$, $j = 1,2$.

Далее, применяя метод математической индукции и неравенства (2.8)–(2.10) утверждение можно доказать для $m > 2$. □

Лемма 2.2. *(см. [30, лемма 4]). Пусть $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 \leqslant \tau_j < +\infty$, и $j = 1, ..., m$. Тогда справедливо соотношение*

$$\Big\|\big\{\chi_{\varkappa(n)}(\overline{s})\big\}_{\overline{s}\in\varkappa(n)}\Big\|_{l_{\overline{\tau}}} \asymp n^{\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь и далее, $\chi_{\varkappa(n)}(\overline{s})$ характеристическая функция множества

$$\varkappa(n) = \{\overline{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \quad \langle \overline{s}, \overline{\gamma}\rangle = n\}.$$

3. Основной результат

В этом параграфе докажем основной результат статьи.

Теорема 3.1. *Пусть $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $\overline{\tau}^{(1)} = (\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_m^{(1)})$, $\overline{\tau}^{(2)} = (\tau_1^{(2)}, \ldots, \tau_m^{(2)})$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ и $0 < \theta_j \leq \infty$, $1 < \tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)} < +\infty$, $1 < p_j < q_j \leqslant 2$, $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $\gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}}$, $j = 1, ..., m$ и $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1, ..., m\}$, $A = \{j : \frac{\gamma_j}{\gamma_j'} = 1,\ j = 1, ..., m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$ и функции $v_j^{(i)} \in SV[1,\infty)$, $V_j^{(i)}(t) = v_j^{(i)}(1/t)$, $t \in (0,1]$, $j = 1, \ldots, m$, $\bar{V}^{(i)}(t) = (V_1^{(i)}(t), ..., V_m^{(i)}(t))$, $i = 1,2$.*

1. Если $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leqslant +\infty$ и функции $v_j^{(2)}/v_j^{(1)} \in SVL[1,\infty)$, $j \in A$, то

$$\begin{aligned} e_M\big(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\big)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} \asymp & M^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} \\ & \times (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})} (\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j})}. \end{aligned}$$

2. Если $1 \leqslant \theta_j = \theta \leqslant \tau_j^{(2)} = \tau^{(2)} < +\infty$, $j = 1, ..., m$, то

$$\begin{aligned} e_M\big(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\big)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} \asymp & M^{-\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} \prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} \\ & \times (\log M)^{((|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})+\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta})_+}, \end{aligned}$$

в случаях $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1,\infty)$, $j \in A$ *и* $A \setminus \{j_1\} = \emptyset$ *или* $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)} t^{-\varepsilon}$ *почти убывает для* $\varepsilon > 0$ *и* $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)}$ *почти возрастает на* $[1,\infty)$ *для* $j \in A$ *и множество* $A \setminus \{j_1\} \neq \emptyset$, *для* $M \in \mathbb{N}$, *таких, что* $M > M_0$, *где* M_0 *некоторое положительное число большее* 1.

Доказательство. Пусть $f \in S^{\bar r}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B$. Положим

$$r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1,...,m\} \quad \text{и} \quad \gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}}, \quad j = 1,...,m.$$

Выберем числа $\gamma_j^{'} > 0$ так, чтобы $\gamma_j^{'} \leqslant \gamma_j$, $j = 1,...,m$ и введем обозначения

$$A = \{j : \frac{\gamma_j}{\gamma_j^{'}} = 1,\ j = 1,...,m\}, \quad j_1 = \min\{j \in A\}.$$

Отметим, что $\gamma_j^{'} = \gamma_j = 1$, для $j \in A$. Для числа $M \in \mathbb{N}$ существует натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$, где $|A|$ — количество элементов множества A.

Тогда в силу определения величины $e_M(f)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}$ и теоремы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} e_M(f)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} &\leqslant E_n^{(\overline{\gamma}^{'})}(f)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} \\ &\ll 2^{-n\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} \prod_{j \in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} n^{\sum\limits_{j \in A\setminus\{j_1\}} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

в случае $\tau_j^{(2)} \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1,...,m$. Так как функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1,\infty)$, $j = 1,...,m$ и $\frac{\log t}{t} \to 0$ при $t \to +\infty$, то

$$\begin{aligned} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} &= \frac{v_j^{(2)}(2^n)}{v_j^{(1)}(2^n)} = \frac{v_j^{(2)}(2^n)}{v_j^{(1)}(2^n)} \big(\log 2^{n+1}\big)^{\varepsilon} \big(\log 2^{n+1}\big)^{-\varepsilon} \\ &\ll \frac{v_j^{(2)}(2^n n^{|A|-1})}{v_j^{(1)}(2^n n^{|A|-1})} \big(\log(2^{n+1} n^{|A|-1})\big)^{\varepsilon} \big(\log 2^{n+1}\big)^{-\varepsilon} \\ &= \frac{v_j^{(2)}(2^n n^{|A|-1})}{v_j^{(1)}(2^n n^{|A|-1})} \big(n + 1 + \log n^{|A|-1}\big)^{\varepsilon} (n+1)^{-\varepsilon} \ll \frac{v_j^{(2)}(2^n n^{|A|-1})}{v_j^{(1)}(2^n n^{|A|-1})} \\ &\ll \frac{V_j^{(2)}((2^n n^{|A|-1}))^{-1}}{V_j^{(1)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})} \ll \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В силу того, что $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$ имеем $n \asymp \log M$ и

$$\begin{aligned} 2^{-n\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} n^{\sum\limits_{j \in A\setminus\{j_1\}} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})} =& 2^{-n\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} n^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} n^{(|A|-1)\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} \\ &\times n^{\sum\limits_{j \in A\setminus\{j_1\}} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})} \asymp M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} \\ &\times (\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) + \sum\limits_{j \in A\setminus\{j_1\}} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})} \end{aligned} \tag{3.3}$$

для $n > n_0$, где n_0 некоторое положительное число большее 1.

Теперь из неравенств (3.1)–(3.2) и соотношения (3.3) следует, что

$$e_M(f)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} \ll M^{-\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} \prod_{j\in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j})}$$

для $M > M_0 > 1$, в случае $\tau_j^{(2)} < \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1,...,m$. Этим в первом пункте оценка сверху доказана.

Рассмотрим второй случай $1 \leqslant \theta_j = \theta < \tau_j^{(2)} = \tau < \infty$, $j = 1,...,m$ и вместо $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B$ и $\|f\|^*_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}$ будем писать $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B$ и $\|f\|^*_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\tau^{(2)}}$. Для функции $f\in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B$ построим приближающий полином $P(\Omega_M,\overline{x})$, который дает требуемую оценку приближения.

Пусть натуральное число n удовлетворяет соотношению

$$M \asymp 2^n n^{|A|-1}$$

и $n_0 = [n + (|A|-1)\log n]$. Полином $P(\Omega_M,\bar{x})$ будем строить в виде

$$P(\Omega_M,\overline{x}) = \tilde{R}(\overline{x}) + \tilde{Q}(\overline{x}),$$

где $\tilde{R}(\overline{x}) = \sum\limits_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<n} \delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})$, а $\tilde{Q}(\overline{x})$ будет построен в дальнейшем. Для натурального числа l положим

$$\tilde{S}_l = \left(\sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<l+1} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\left(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

и обозначим

$$\tilde{m}_l = \left[2^n n^{|A|-1}2^{-l}\tilde{S}_l^\theta\right] + 1,$$

где $[a]$ — целая часть числа a. Нетрудно убедиться, что количество гармоник K, которые образуют полином $P(\Omega_M,\overline{x})$, не превышает по порядку M. По свойству нормы

$$\begin{aligned}\|f - P(\Omega_M)\|^*_{\overline{q},\bar{V}^{(2)},\tau^{(2)}} \leqslant & \Big\|f - \sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<n_0}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|^*_{\overline{q},\bar{V}^{(2)},\tau^{(2)}} \\ & + \|R^* - \tilde{Q}\|_{\overline{q},\bar{V}^{(2)},\tau^{(2)}} = J_1 + J_2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Согласно теореме 2.1, неравенству Йенсена [9, лемма 3.3.3], лемме 2.1 при $\theta_j = \infty$, $j = 1,\dots,m$ и учитывая $0 < \gamma_j' \leqslant \gamma_j$, для $j = 1,\dots,m$ имеем

$$\begin{aligned} J_1 \leqslant & C\left\{\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\geqslant n_0}\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)\tau^{(2)}}\left(\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\right)^{\tau^{(2)}}\left(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)}}\right)^{\tau^{(2)}}\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ \ll & \left\{\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\geqslant n_0}\prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j\tau^{(2)}}\left(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)}}\right)^{\tau^{(2)}}\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ & \times \sup_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\geqslant n_0}\prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \\ \ll & \left\{\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j\theta}\left(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)}}\right)^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} \times \sup_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\geqslant n_0} 2^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle}\prod_{j=1}^m\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\end{aligned}$$

$$\leqslant C2^{-n_0(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-n_0})}{V_j^{(1)}(2^{-n_0})}\leqslant C2^{-n(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})}$$

для любой функции $f\in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B$, в случае $1\leqslant\theta\leqslant\tau^{(2)}<\infty$.

Теперь учитывая определение числа n_0 и то, что функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}t^{\varepsilon}$ почти возрастают на $[1,\infty)$, $j=1,...,,m$ отсюда получим

$$J_1 << (2^n n^{|A|-1})^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}{V_j^{(1)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})} \tag{3.5}$$

для любой функции $f\in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B$, в случае $1\leqslant\theta\leqslant\tau^{(2)}<\infty$.

Для оценки J_2 воспользуемся рассуждениями примененными в [19, с. 93]. Каждому натуральному числу l, $n\leqslant l<n_0$ сопоставим сумму

$$\sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<l+1}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}). \tag{3.6}$$

Пусть $\alpha_i(f,l)$, $i=1,2,...,\tilde{m}_l$, обозначают числа

$$\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)}}$$

переставленные в убывающем порядке, для которых блоки $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})$ входят в сумму (3.6). Сумму таким образом полученных «блоков» $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})$ по всем $l\in[n,n_0)$ обозначим $\tilde{Q}(\overline{x})$. Через D_f обозначим множество тех векторов $\bar{s}$ удовлетворяющих условию $n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<n_0$ для которых «блоки» $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})$ не попали $\tilde{Q}(\overline{x})$.

Так как функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}$ для $j=1,\ldots,m$ удовлетворяют условиям леммы 2.1, то учитывая, что $\gamma_j'=1$ для $j\in A$ будем иметь

$$2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j=1}^{m}\frac{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}{V_j^{(2)}(2^{-s_j})} >> 2^{l(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(1)}(2^{-l})}{V_j^{(2)}(2^{-l})}$$

для $\overline{s}$, удовлетворяющих неравенству $\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\geqslant l$. Теперь пользуясь этим неравенством и учитывая, что $0<\gamma_j'\leqslant\gamma_j=\frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}}$ для $j=1,\ldots,m$ будем иметь

$$\tilde{S}_l=\left(\sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<l+1}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\left(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$=\left(\sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<l+1}2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})\theta}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}\right)^{\theta}\right.$$

$$\left.\times\left(\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\geqslant C2^{l(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(1)}(2^{-l})}{V_j^{(2)}(2^{-l})}$$

$$\times\left(\sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<l+1}\left(\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$=C2^{l(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(1)}(2^{-l})}{V_j^{(2)}(2^{-l})}\left[\sum_{k=1}^{\tilde{m}_l}\alpha_k^{\theta}(f,l)\right]^{\frac{1}{\theta}}\gg 2^{l(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(1)}(2^{-l})}{V_j^{(2)}(2^{-l})}j^{\frac{1}{\theta}}\alpha_i(f,l)$$

для $i=1,2,...,\tilde{m}_l$.

Таким образом

$$\alpha_i(f,l)\leqslant i^{-\frac{1}{\theta}}2^{-l(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})}\tilde{S}_l$$

для $i=1,2,...,\tilde{m}_l$.

Далее пользуясь теоремой 2.1, предыдущим неравенством, определением чисел $\tilde{S}_l$, $\tilde{m}_l$ получим

$$J_2=\Big\|\sum_{\bar{s}\in D_f}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|^*_{\bar{q},\bar{V}^{(2)},\tau^{(2)}}\ll\left\{\sum_{\bar{s}\in D_f}\left(\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)}}\right)^{\tau^{(2)}}\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}}$$

$$=C\left\{\sum_{l=n}^{n_0}\sum_{j\geqslant\tilde{m}_l}\alpha_j^{\tau^{(2)}}(f,l)\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}}$$

$$\ll\left\{\sum_{l=n}^{n_0}2^{-l(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})\tau^{(2)}}\Big(\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})}\Big)^{\tau^{(2)}}\tilde{S}_l^{\tau^{(2)}}\sum_{j\geqslant\tilde{m}_l}j^{-\frac{\tau^{(2)}}{\theta}}\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}}$$

$$\ll\left(2^n n^{|A|-1}\right)^{\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta}}\left\{\sum_{l=n}^{n_0}2^{-l\tau^{(2)}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\tau^{(2)}}\right)}\Big(\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})}\Big)^{\tau^{(2)}}\tilde{S}_l^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}}.$$

Таким образом

$$J_2\ll\left(2^n n^{|A|-1}\right)^{\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta}}\left\{\sum_{l=n}^{n_0}2^{-l\tau^{(2)}(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\tau^{(2)}})}\Big(\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})}\Big)^{\tau^{(2)}}\tilde{S}_l^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}}\tag{3.7}$$

в случае $1\leqslant\theta\leqslant\tau^{(2)}<\infty$.

Далее, рассмотрим два случая

а) $r_{j_0}\geqslant\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{q_{j_0}}+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tau^{(2)}}$;

б) $\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{q_{j_0}}<r_{j_0}<\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{q_{j_0}}+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tau^{(2)}}$.

Введем обозначение

$$J_3=\left\{\sum_{l=n}^{n_0}2^{-l\tau^{(2)}(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\tau^{(2)}})}\Big(\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-l})}{V_j^{(1)}(2^{-l})}\Big)^{\tau^{(2)}}\tilde{S}_l^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}}.$$

В случае а) по определению $\tilde{S}_l$ и учитывая, что функции $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)}t^{-\varepsilon}$ почти убывают на $[1,\infty)$ для $\varepsilon>0$, $j=1,\dots,m$ имеем

$$J_3\leqslant 2^{-n\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\tau^{(2)}}\right)}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})}\|f\|^{\frac{\theta}{\tau^{(2)}}}_{S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B}$$

для любой функции $f\in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B$. Следовательно, из неравенства (3.7) получим

$$J_2\ll 2^{-n(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\tau^{(2)}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})}n^{(|A|-1)(\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta})}\tag{3.8}$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B$ в случае $r_{j_0} \geqslant \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$, $\theta < \tau^{(2)}$.

Рассмотрим случай б). По определению $\tilde{S}_l$ и выбору чисел n_0 и в силу того, что $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau^{(2)}} < 0$, а функции $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)} t^{\varepsilon}$ почти возрастают на $[1,\infty)$ для $\varepsilon > 0$, $j = 1,\dots,m$ имеем

$$\begin{aligned} J_3 &\leqslant 2^{-n_0\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\tau^{(2)}}\right)} \prod_{j\in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n_0})}{V_j^{(1)}(2^{-n_0})} \left\{\sum_{l=n}^{n_0} \tilde{S}_l^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\tau^{(2)}}} \\ &\ll 2^{-n_0\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\tau^{(2)}}\right)} \prod_{j\in A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n_0})}{V_j^{(1)}(2^{-n_0})} \|f\|^{\frac{\theta}{\tau^{(2)}}}_{S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B} \end{aligned} \tag{3.9}$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B$.

Так как $n_0 = [n + (|A|-1)\log n]$, то $2^{n_0} \leqslant 2^n n^{|A|-1} < 2^{n_0+1}$. Поэтому, из оценки (3.9) получим

$$J_3 \ll (2^n n^{|A|-1})^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\tau^{(2)}})} \prod_{j\in A} \frac{V_j^{(2)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}{V_j^{(1)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B$, в случае $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0} < \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$, $\theta < \tau^{(2)}$.

Следовательно, учитывая, что $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$ из (3.7) получим

$$\begin{aligned} J_2 &\leqslant C(2^n n^{|A|-1})^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j\in A} \frac{V_j^{(2)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})}{V_j^{(1)}((2^n n^{|A|-1})^{-1})} \\ &\asymp M^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j\in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} \end{aligned} \tag{3.10}$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B$, в случае б), $\theta \leqslant \tau^{(2)}$.

Таким образом, из оценок (3.7), (3.8) и (3.10) заключаем , что

$$J_2 \leqslant CM^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})} (\log^{|A|-1} M)^{(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tau^{(2)}})_+} \prod_{j\in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} \tag{3.11}$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B$, в случае $1 \leqslant \theta \leqslant \tau^{(2)} < \infty$ и $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0}$.

Теперь в силу оценок (3.5) и (3.11) из неравенства (3.4) получим

$$\|f - P(\Omega_M)\|^{*}_{\bar{q},\bar{V}^{(2)},\tau^{(2)}} \ll M^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})} (\log^{|A|-1} M)^{(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tau^{(2)}})_+} \prod_{j\in A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\theta}B$, $1 \leqslant \theta \leqslant \tau^{(2)} < \infty$, $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0}$. Напомним, что $y_+ = \max\{0, y\}$. Этим оценки сверху доказаны.

Теперь докажем оценки снизу. Для числа $M \in \mathbb{N}$ выберем натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{m-1}$ и $2^n n^{m-1} \geq 4M$.

Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\theta_j}} \sum_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle = n} \prod_{j=1}^{m} \frac{2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Пользуясь соотношением (см. [33])

$$\Big\|\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\Big\|^{*}_{\bar{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}} \asymp \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(1-\frac{1}{p_j})} V_j^{(1)}(2^{-s_j}),$$

для $1<p_j,\tau_j<+\infty,\ j=1,...,m$ и леммой 2.2 получим

$$\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^{*}_{\bar{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)}}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle=n}\right\|_{l_{\bar{\theta}}} = n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\theta_j}}$$

$$\times\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\prod_{j=1}^{m}\frac{2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\left\|\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\right\|^{*}_{\bar{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)}}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle=n}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}$$

$$\ll n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\theta_j}}\|\{1\}_{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle=n}\|_{l_{\bar{\theta}}} \leqslant C_0.$$

Таким образом, $f_0\in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{V}^{(1)},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}B$.

Пусть Ω_M множество из M $m-$мерных векторов $\{\overline{k}^{(1)},...,\overline{k}^{(M)}\}$ с целочисленными координатами. Для каждого вектора $\overline{s}$ для которого $\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle = n$ рассмотрим множества $\Omega_M\cap\rho(\overline{s})$. Тогда в силу выбора числа n множество S векторов $\overline{s}$ таких, что $\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle = n$ и $|\Omega_M\cap\rho(\overline{s})| \leq \frac{1}{2}|\rho(\overline{s})|$, будет содержать по крайней мере половину всех $\overline{s}$ таких, что $\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle = n$ и следовательно $|S|\asymp n^{m-1}$.

Пусть $T(\overline{x})$ обозначает произвольный тригонометрический полином с номерами гармоник из Ω_M. Тогда по теореме 2.3 при $\beta_j=\lambda_j=2,\ \ j=1,...,m$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\|f_0-T\|^{*}_{\bar{q},\bar{V}^{(2)},\bar{\tau}^{(2)}} &\gg \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}V_j^{(2)}(2^{-s_j})\,\|\delta_{\bar{s}}(f_0-T)\|_2\right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n}\right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}}\\
&\gg \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}V_j^{(2)}(2^{-s_j})\,\|\delta_{\bar{s}}(f_0-T)\|_2\right\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}}\\
&\gg n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\theta_j}}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}V_j^{(2)}(2^{-s_j})\prod_{j=1}^{m}\frac{2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\prod_{j=1}^{m}2^{\frac{s_j}{2}}\right\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}}\\
&\gg n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\theta_j}}\left\|\left\{2^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\prod_{j=1}^{m}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\right\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}}\\
&= Cn^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\theta_j}}2^{-n(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}\right\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\tau}^{(2)}}}.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Нетрудно убедиться, что если $v_j\in SVL[1,\infty)$, $j=1,...,m$, то $1/v_j\in SVL[1,\infty)$, $j=1,...,m$. Поэтому согласно лемме 1 [36] имеем

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{V_j(2^{-s_j})}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n}\right\|_{l_{\bar{\tau}'}} \ll \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{V_j(2^{-n})}(n+1)^{\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau'_j}},\tag{3.13}$$

где $\overline{\tau}' = (\tau_1', ..., \tau_m')$, $\frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_j'} = 1$, $1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, ..., m$.

Применяя неравенство Гёльдера $\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} + \frac{1}{\tau_j^{(2)'}} = 1, \ \ j = 1, ..., m\right)$ и в неравенстве (3.13) полагая $V_j(t) = \frac{V_j^{(2)}(t)}{V_j^{(1)}(t)}$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, ..., m$ имеем

$$|S| = \sum_{\bar{s}\in S} 1 \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}{V_j^{(2)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)'}}}$$
$$\leqslant \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(1)}(2^{-s_j})}{V_j^{(2)}(2^{-s_j})} \right\}_{\langle \bar{s}, \gamma\rangle = n} \right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)'}}}$$
$$\ll n^{\sum\limits_{j=2}^{m} \frac{1}{\tau_j^{(2)'}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)}}}.$$

Так как $|S| \asymp n^{m-1}$, то отсюда получим

$$n^{m-1} \leq C(n+1)^{\sum\limits_{j=2}^{m} \frac{1}{\tau_j^{(2)'}}} \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(1)}(2^{-n})}{V_j^{(2)}(2^{-n})} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)}}}.$$

Следовательно

$$(n+1)^{\sum\limits_{j=2}^{m} \frac{1}{\tau_j^{(2)}}} \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)}}}.$$

Поэтому из неравенства (3.12) получим

$$\|f_0 - T\|^*_{\bar{q}, \overline{V}^{(2)}, \overline{\tau}^{(2)}} \gg 2^{-n(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} (n+1)^{\sum\limits_{j=2}^{m} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})}$$

для любого полинома $T(\bar{x})$ с номерами гармоник из Ω_M. Следовательно

$$\begin{aligned} e_M \left(S^{\overline{r}}_{\overline{p}, \bar{V}^{(1)}, \overline{\tau}^{(1)}, \overline{\theta}} B \right)_{\overline{q}, \bar{V}^{(2)}, \overline{\tau}^{(2)}} &\gg 2^{-(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})} \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(2^{-n})}{V_j^{(1)}(2^{-n})} (n+1)^{\sum\limits_{j=2}^{m} (\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j})} \\ &\gg M^{-\left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)} \prod_{j=1}^{m} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(m-1)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}}\right) + \sum\limits_{j=2}^{m} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Пусть $\tau_j^{(2)} < \theta_j$, $j = 1, ..., m$. Так как $|A| \leq m$, $r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}} > 0$ и функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, ..., m$, то

$$\begin{aligned} &\prod_{j\notin A} \frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})} (\log M)^{(m-|A|)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}}\right) + \sum\limits_{j\notin A\setminus\{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)} \\ &\gg \prod_{j\notin A} \frac{V_j^{(2)}(2^{-1})}{V_j^{(1)}(2^{-1})} (\log 2)^{(m-|A|)\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} + \frac{1}{q_{j_0}}\right) + \sum\limits_{j\notin A\setminus\{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right)}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

для натуральных чисел $M \geqslant 2$. Поэтому из неравенства (3.14) получим

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\right)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} \gg M^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})} \times \prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}+\frac{1}{q_{j_0}})+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j})}$$

для натуральных чисел $M \geqslant 2$, в случае $\tau_j^{(2)} < \theta_j$, $j = 1, ..., m$.

Пусть $\theta < \tau^{(2)} < \infty$ и $r_{j_0} \geqslant \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$. Тогда учитывая, что функции $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}} \in SVL[1,\infty)$, $j = 1, ..., m$ и $|A| \leqslant m$ имеем (см. (3.13))

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{m}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}(\log M)^{(m-1)\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}+\frac{1}{q_{j_0}}\right)+\sum\limits_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j}\right)}\\ &\gg \prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}(\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}+\frac{1}{q_{j_0}}+\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta}\right)}\end{aligned} \tag{3.16}$$

для натуральных чисел $M \geqslant 2$.

Теперь из неравенств (3.14) и (3.16) следует, что

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B\right)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\tau^{(2)}} \gg M^{-\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}(\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}+\frac{1}{q_{j_0}}+\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta}\right)}$$

для натуральных чисел $M \geqslant 2$, в случае $\theta < \tau^{(2)} < \infty$ и $r_{j_0} \geqslant \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$.

Пусть $\theta < \tau^{(2)} < \infty$ и $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} < r_{j_0} < \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau^{(2)}}$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{m}\frac{2^{-s_j^0(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j^0})}\sum_{\bar{k}\in\rho(\overline{s}^0)}e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle},$$

где $\overline{s}^0 = (s_1^0, ..., s_m^0)$, $s_j^0 = s_j$ если $j \in A$ и $s_j^0 = 0$ если $j \notin A$. Нетрудно убедиться, что функция $f_1 \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B$.

Пусть Ω_M множество из M m–мерных векторов $\{\overline{k}^{(1)}, ..., \overline{k}^{(M)}\}$ с целочисленными координатами. Существует $\overline{s}^0 \in \mathbb{Z}_+^m$, такой, что $|\rho(\overline{s}^0)| \asymp M$ и $|\rho(\overline{s}^0)| \geqslant 2M$. Тогда $|\rho(\overline{s}^0)\cap\Omega| \leqslant \frac{|\rho(\overline{s}^0)|}{2}$.

Пусть $T(\overline{x})$ обозначает произвольный тригонометрический полином с номерами гармоник из Ω_M. Тогда по теореме 2.3 при $\beta_j = \lambda_j = 2$, $j = 1, ..., m$ будем иметь

$$\begin{aligned}\|f_0 - T\|^*_{\overline{q},\bar{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} &\gg \prod_{j=1}^{m}2^{s_j^0(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}V_j^{(2)}(2^{-s_j^0})\,\|\delta_{\overline{s}^0}(f_0-T)\|_2\\ &= C\prod_{j=1}^{m}2^{s_j^0(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}V_j^{(2)}(2^{-s_j^0})\prod_{j=1}^{m}\frac{2^{-s_j^0(r_j+1-\frac{1}{p_j})}}{V_j^{(1)}(2^{-s_j^0})}(|\rho(\overline{s}^0)|-M)^{1/2}\\ &\gg \prod_{j=1}^{m}2^{-s_j^0(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\frac{V_j^{(2)}(2^{-s_j^0})}{V_j^{(1)}(2^{-s_j^0})} \gg M^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}.\end{aligned}$$

$\square$

Следствие 3.1. *Пусть числа* $q_j, p_j, \tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}, r_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ *удовлетворяют условиям теоремы 3.1 и функции*

$$v_j^{(1)}(t) = (1+\log t)^{a_j}(1+\log(1+\log t))^{b_j},$$

$$v_j^{(1)}(t) = (1+\log t)^{a_j}(1+\log(1+\log t))^{c_j},\ a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R},\ c_j > b_j,\ j = 1, ..., m.$$

1. Если $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$e_M\big(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\big)_{\overline{q},\bar{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} \asymp M^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\Big(1+\log(1+\log M)\Big)^{c_j-b_j}$$

$$\times (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j})}.$$

2. Если $1 \leqslant \theta \leqslant \tau^{(2)} < +\infty$, *то*

$$e_M\big(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\theta}B\big)_{\overline{q},\bar{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}} \asymp M^{-\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\prod_{j\in A}\Big(1+\log(1+\log M)\Big)^{c_j-b_j}$$

$$\times (\log M)^{((|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})+\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Доказательство. Известно (см., например, [6]), что функции

$$v_j^{(1)}(t) = (1+\log t)^{a_j}(1+\log(1+\log t))^{b_j}, \quad v_j^{(1)}(t) = (1+\log t)^{a_j}(1+\log(1+\log t))^{c_j},$$

принадлежат классу $\in SV[1, \infty)$ для $j = 1, ..., m$ и их отношение

$$v_j^{(2)}(t)/v_j^{(1)}(t) = (1+\log(1+\log t))^{c_j-b_j}$$

возрастает, а $\frac{v_j^{(2)}(t)}{v_j^{(1)}(t)}t^{-\varepsilon}$ почти убывает на $[1, \infty)$, $\varepsilon > 0$, $j = 1, ..., m$. Поэтому утверждения следствия верны согласно теореме 3.1. □

Замечание 3.1. *В случае* $V_j^{(1)}(t) = V_j^{(2)}(t) = 1$, $t \in (0, 1]$ *и* $p_j = \tau_j^{(1)} = p$, $q_j = \tau_j^{(2)} = q$, $\theta_j = \theta$ *для* $j = 1, ..., m$ *и* $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant r_m$ *теорема 3.1 совпадает с ранее известными результатами В.Н. Темлякова* [19, теорема 2.2, с. 92] *и А.С. Романюка* [22, теорема 3.1] *для пространств Лебега и в общем случае распространяют их на анизотропные пространства Лоренца–Караматы. Для* $V_j^{(1)}(t) = V_j^{(2)}(t) = 1$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, ..., m$ *и* $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant r_m$ *теоремы 3.1 совпадает с результатами* [28, теорема 3] *и* [34, теорема 5].

Автор благодарен Рецензентам за замечания способствовавшие лучшему изложению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. *Интерполяция линейных операторов.* М.: Наука. 1978.
2. A.P. Blozinski. *Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms* // Trans. Amer. Math. Soc. **263**, 146–167 (1981).
3. А.А. Яценко. *Итеративные перестановки функций и пространства Лоренца* // Изв. вузов. Матем. **5**, 73–77 (1998).
4. V.I. Kolyada. *On embedding theorems* // Nonlinear Analysis, Function spaces and Applic. Publisher: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Praha, 35–94 (2007).
5. Н.К. Бари, С.Б. Стечкин. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Труды Моск. матем. общества. **5**, 483–522 (1956).

6. D.E. Edmunds, W.D. Evans. *Hardy operators, function spaces and embedding.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2004.
7. Е. Сенет. *Правильно меняющиеся функции.* М.: Наука. 1985.
8. И. Стейн, Г. Вейс. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М.: Мир. 1974.
9. С.М. Никольский. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука. 1977.
10. П.И. Лизоркин, С.М. Никольский. *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Труды математического института АН СССР. **187**, 143–161 (1989).
11. Т.И. Аманов. *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной.* Алма-ата: Наука, 1976. 224 с.
12. Р.С. Исмагилов. *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами* // Усп. матем. наук. **29**:3, 161–178 (1974).
13. Э.С. Белинский. *Приближение периодических функций с «плавающей» системой экспонент и тригонометрические поперечники* // В сб. «Исследования по теории функций многих вещественных переменных», Ярославль, 10–24 (1984).
14. Э.С. Белинский. *Приближение «плавающей» системой экспонент на классах гладких периодических функций* // Матем. сб. **132**:1, 20–27 (1987).
15. Э.С. Белинский. *Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной* // В сб. «Исследования по теории функций многих вещественных переменных», Ярославль, 16–33 (1988).
16. Y. Makovoz. *On trigonometric n–widths and their generalization* // J. Approx. Theory. **41**:4, 361–366 (1984).
17. В.Е. Майоров. *Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q* // Мат. замет. **40**:2, 161–173 (1986).
18. R.A. DeVore. *Nonlinear approximation* // Acta Numerica. **7**, 51–150 (1998).
19. В.Н. Темляков. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Труды математического института АН СССР. **178**, 1–112 (1986).
20. В.Н. Темляков. *Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости* // Матем. сб. **206**:11, 131–1160 (2015).
21. V.N. Temlyakov. *Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness* // Constr. Approx. **45**:3, 467–495 (2017).
22. А.С. Романюк. *Наилучшие M–членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных* // Изв. РАН, сер. мат. **67**:2, 61–100 (2003).
23. M. Hansen, W. Sickel. *Best m–term approximation and Lizorkin–Triebel spaces* // J. Approx. Theory. **163**, 923–954 (2011).
24. S.A. Stasyuk. *Best m–term trigonometric approximation for the classes $B_{p,\theta}^r$ of functions of low smoothness* // Ukr. Math. Jour. **62**:1, 114–122 (2010).
25. D.B. Bazarkhanov, V.N. Temlyakov. *Nonlinear tensor product approximation of functions* // J. Complexity. **31**:6, 867-–884 (2015).
26. Д.Б. Базарханов. *Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных* // Труды математического института РАН. **293**, 8–42 (2016).
27. Dũng Dinh, V.N. Temlyakov, T. Ullrich. *Hyperbolic Cross Approximation.* Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhüser/Springer, Basel/Berlin. 2018.
28. Г. Акишев. *О порядках M–членного приближения классов периодических функций* // Матем. жур. **6**:4, 5–14 (2006).
29. Г. Акишев. *О порядках M–членного приближения классов функций в пространстве Лебега со смешанной нормой* // Матем. жур. **7**:1, 5–14 (2007).
30. Г. Акишев. *О точности оценок наилучшего M–членного приближения класса Бесова* // Сиб. электрон. матем. изв. **7**, 255–274 (2010).
31. Г. Акишев. *О порядках M–членного приближения классов в пространстве Лоренца* // Матем. жур. **11**:1, 5–29 (2011).

32. Г. Акишев. *Тригонометрические поперечники классов Никольского–Бесова в пространстве Лебега со смешанной нормой* // Укр. мат. жур. **66**:6, 723–732 (2014).
33. G. Akishev. *On M–term approximations of the Nikol'skii-Besov class* // Hacet. J. Math. Stat. **45**:2, 297–310 (2016).
34. G. Akishev. *Estimations of the best M–term approximationsof functions in the Lorentz space with constructive methods* // Bull. Karaganda Univer. Math. ser. **3**, 13–26 (2017).
35. G. Akishev. *Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space* // Preprint: arXiv: 2105.14810v1 (2021).
36. G. Akishev. *On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz-Zygmund space* // Preprint: arXiv: 2106.07188v2 (2021).
37. G. Akishev. *On estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz - Karamata space* // Preprint: arXiv: 2106.1276v2 (2021).

Габдолла Акишевич Акишев,
Казахстанский филиал
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова,
ул. Кажымукана, 11,
100008, г. Астана, Казахстан

Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125,
050010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: akishev_g@mail.ru