ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 4 (2022). С. 73-79.

УДК 517.55

О КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В $\mathbb{R}^n$

А.В. ЛУЦЕНКО, И.Х. МУСИН, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. При помощи некоторого семейства $\mathcal{H}$ раздельно радиальных выпуклых в $\mathbb{R}^n$ функций определено пространство $G(\mathcal{H})$ 2π-периодических по каждой переменной бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций с заданными оценками на все частные производные. Получено описание пространства $G(\mathcal{H})$ в терминах коэффициентов Фурье. Найдены условия на семейство $\mathcal{H}$, при которых функции из $G(\mathcal{H})$ допускают продолжение до функций, голоморфных в трубчатой области в $\mathbb{C}^n$. Получено внутреннее описание пространства таких продолжений. Рассматриваемые нами задачи имеют прямое отношение к работам П.Л. Ульянова конца 1980-х годов, в которых ему удалось полностью охарактеризовать классы 2π-периодических функций типа Жевре на числовой прямой не только через скорость убывания коэффициентов Фурье, но и через наилучшие тригонометрические приближения. Полученные в работе результаты являются новыми как для случая многих переменных, так и для случая одной переменной. В частности, новизна достигается за счет наложения условия i_4) на семейство $\mathcal{H}$.

Ключевые слова: ряды Фурье, коэффициенты Фурье, наилучшее приближение тригонометрическими полиномами, целые функции, выпуклые функции.

Mathematics Subject Classification: 42B05, 42A10

1. Введение

Пусть $C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ — пространство 2π-периодических по каждой переменной непрерывных в $\mathbb{R}^n$ функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in[0,2\pi]^n} |f(x)|$. Пусть $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = C_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Каждой функции $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ ставим в соответствие ее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_\alpha e^{i\langle\alpha,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где коэффициент Фурье $\hat{f}_\alpha$ задается формулой

$$\hat{f}_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} f(x) e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\, dx.$$

Установление связей между разностными, дифференциальными свойствами функций из различных подпространств пространства $C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ и свойствами их коэффициентов Фурье — одна из основных задач в теории рядов Фурье. На этом ее направлении выделяются тонкие результаты П.Л. Ульянова [1]–[3], полученные им в конце 1980-х. В частности, ему удалось полностью охарактеризовать классы 2π-периодических функций типа Жевре на числовой прямой не только через скорость убывания коэффициентов Фурье, но и через наилучшие тригонометрические приближения (см., например, [3, Теорема 3, Теорема 4]). Эти исследования П.Л. Ульянова послужили мотивацией для рассмотрения в данной заметке

A.V. Lutsenko, I.Kh. Musin, R.S. Yulmukhametov, On a class of periodic functions in $\mathbb{R}^n$.

Работа первого и третьего авторов поддержана Российским научным фондом (проект 21-11-00168), работа второго автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-888).

Поступила 19 сентября 2022 г.

следующей основной задачи — выделить подпространства функций из $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ с оценками на частные производные, допускающие описание в терминах коэффициентов Фурье. С этой целью введем пространство $G(\mathcal{H})$ следующим образом. Пусть $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — семейство выпуклых функций $h_\nu : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ с $h_\nu(0) = 0$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$

i_1) $h_\nu(x) = h_\nu(|x_1|, \dots, |x_n|),\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

i_2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

i_3) $h_\nu(x) \geqslant h_{\nu+1}(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} (h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x)) = +\infty$;

i_4) сходится ряд

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} e^{h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|) - h_{\nu+1}^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)},$$

где

$$h_\nu^*(x) = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (\langle\alpha, x\rangle - h_\nu(\alpha)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

и, как обычно, $\ln^+ t = \ln t$ для $t \geqslant 1$, $\ln^+ t = 0$ для $0 \leqslant t < 1$. Далее, для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ введем нормированное пространство

$$G(h_\nu) = \{f \in C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_\nu = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{h_\nu(\alpha)}} < \infty\ \}.$$

В силу условия i_3) пространство $G(h_{\nu+1})$ вложено в $G(h_\nu)$ вполне непрерывно. Отметим, что $G(h_{\nu+1})$ — собственное подпространство пространства $G(h_\nu)$. Действительно, если предположить, что $G(h_{\nu+1}) = G(h_\nu)$, то при некотором $C_\nu > 0$ должно быть справедливо неравенство

$$\|f\|_{\nu+1} \leqslant C_\nu \|f\|_\nu, \quad f \in G(h_\nu).$$

В частности, для функций $e^{i\langle m,x\rangle}$ с $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ будем иметь

$$h_{\nu+1}^*(\ln^+|m_1|, \dots, \ln^+|m_n|) \leqslant h_\nu^*(\ln^+|m_1|, \dots, \ln^+|m_n|) + \ln C_\nu.$$

Но это неравенство невозможно ввиду условия i_4). Положим теперь $G(\mathcal{H}) = \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} G(h_\nu)$. Наделим $G(\mathcal{H})$ локально выпуклой топологией с помощью семейства норм $\|\cdot\|_\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}$). С этой топологией $G(\mathcal{H})$ является пространством Фреше.

В разделе 2 работы показано, что пространство функций $G(\mathcal{H})$ допускает описание в терминах оценок на коэффициенты Фурье (Теорема 2.1). Представляется интересным нахождение условий на семейство $\mathcal{H}$, при которых функции из $G(\mathcal{H})$ допускают продолжение до функций, голоморфных в трубчатой области в $\mathbb{C}^n$, и описание пространства таких продолжений. Эта задача рассматривается во втором разделе данной заметки (Теорема 3.1).

2. Эквивалентное описание пространства $G(\mathcal{H})$

В формулировке основного результата работы — Теоремы 2.1 — участвует пространство $C(\mathcal{H})$. Введем его следующим образом. Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ пусть $C(h_\nu)$ — пространство, состоящее из функций $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты Фурье которых $\hat{f}_\alpha$ при некотором $a_\nu(f) > 0$ удовлетворяют оценке

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant a_\nu(f) e^{-h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Так как (благодаря условию i_2)) для любого $\nu \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h_\nu^*(x)}{\|x\|} = +\infty,$$

то функции из $C(h_\nu)$ бесконечно дифференцируемы. Наделим $C(h_\nu)$ нормой

$$p_\nu(f) = \sup_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} (|\hat{f}_\alpha| e^{h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}).$$

Далее, поскольку $h_\nu^*(x) \leqslant h_{\nu+1}^*(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, то $p_\nu(f) \leqslant p_{\nu+1}(f)$ для произвольной функции $f \in C(h_{\nu+1})$. Значит, пространство $C(h_{\nu+1})$ вложено в $C(h_\nu)$ непрерывно. При этом, $C(h_{\nu+1})$ — собственное подпространство пространства $C(h_\nu)$. Действительно, имеются функции из $C(h_\nu)$, не принадлежащие $C(h_{\nu+1})$. Например, такова будет функция

$$f_\nu(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} e^{-h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)} e^{i\langle\alpha,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для нее $p_\nu(f_\nu) = 1$, а $p_{\nu+1}(f_\nu) = +\infty$, поскольку благодаря условиям i_2) и i_3)

$$\lim_{x\to\infty} (h_{\nu+1}^*(x) - h_\nu^*(x)) = +\infty. \tag{2.1}$$

Определим теперь пространство $C(\mathcal{H})$ как пересечение пространств $C(h_\nu)$. Наделим $C(\mathcal{H})$ локально выпуклой топологией с помощью семейства норм p_ν.

Напомним еще, что преобразование Юнга-Фенхеля функции $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле

$$\tilde{g}(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - g(y)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

При доказательстве Теоремы 2.1 понадобится следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Тогда $g(\alpha) = \widetilde{(g^*)}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

Доказательство. В силу условия на g выпуклые в $\mathbb{R}^n$ (по определению) функции g^* и $\widetilde{g}$ принимают конечные значения. Значит, g^* и $\widetilde{g}$ непрерывны в $\mathbb{R}^n$. Так как

$$g(\alpha) \geqslant \langle x, \alpha\rangle - g^*(x), \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то $g(\alpha) \geqslant \widetilde{(g^*)}(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Далее, напомним, что $g = \tilde{\tilde{g}}$ согласно формуле обращения преобразования Юнга-Фенхеля [4], то есть

$$g(x) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (\langle x, \xi\rangle - \tilde{g}(\xi)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Воспользовавшись условием на выпуклую функцию g и непрерывностью g, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ найдем точку $\xi(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ такую, что $g(\alpha) = \langle\alpha, \xi(\alpha)\rangle - \tilde{g}(\xi(\alpha))$. Теперь, пользуясь этим равенством и тем, что $g^*(x) \leqslant \widetilde{g}(x)$ для $x \in \mathbb{R}^n$, имеем

$$\widetilde{(g^*)}(\alpha) \leqslant g(\alpha) = \langle\alpha, \xi(\alpha)\rangle - \tilde{g}(\xi(\alpha)) \leqslant \langle\alpha, \xi(\alpha)\rangle - g^*(\xi(\alpha)) \leqslant \widetilde{(g^*)}(\alpha).$$

Следовательно, $g(\alpha) = \widetilde{(g^*)}(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. □

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пространства $G(\mathcal{H})$ и $C(\mathcal{H})$ совпадают.*

Доказательство. Пусть $f \in G(\mathcal{H})$. Покажем, что $f \in C(\mathcal{H})$. Так как $f \in G(h_\nu)$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$, то

$$|(D^\beta f)(x)| \leqslant \|f\|_\nu e^{h_\nu(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда и из представлений

$$\hat{f}_\alpha(i\alpha)^\beta = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} (D^\beta f)(x) e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{Z}^n, \quad \beta\in\mathbb{Z}_+^n,$$

получим, что для любых $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant \|f\|_\nu \frac{e^{h_\nu(\beta)}}{(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n}},$$

где для $t\geqslant 0$ $t^+=\max(t,1)$. Следовательно,

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant \|f\|_\nu \inf_{\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{e^{h_\nu(\beta)}}{(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n}}, \quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n.$$

То есть,

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant \|f\|_\nu e^{-h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}, \quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n.$$

Таким образом, $p_\nu(f)\leqslant\|f\|_\nu$, $f\in G(\mathcal{H})$. Ввиду произвольности ν делаем вывод, что $f\in C(\mathcal{H})$ и вложение $G(\mathcal{H})$ в $C(\mathcal{H})$ непрерывно.

Пусть теперь $f\in C(\mathcal{H})$. Тогда при любом $k\in\mathbb{N}$

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant p_k(f) e^{-h_k^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}, \quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n. \tag{2.2}$$

Следовательно, при любых $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant p_k(f) \frac{e^{h_k(\beta)}}{(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n}}.$$

Значит, $f\in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Покажем теперь, что $f\in G(\mathcal{H})$. Пусть $\nu\in\mathbb{N}$ произвольно. Для $x\in\mathbb{R}^n,\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ оценим сверху $|(D^\beta f)(x)|$, пользуясь неравенством (2.2) и условием i_3). Имеем

$$\begin{aligned}|(D^\beta f)(x)| &\leqslant \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}_\alpha|(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n} \\ &\leqslant p_{\nu+1}(f) \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} e^{-h_{\nu+1}^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n}, \quad x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Отсюда, полагая

$$\tau_\nu = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} e^{h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)-h_{\nu+1}^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)},$$

получим, что

$$|(D^\beta f)(x)| \leqslant \tau_\nu p_{\nu+1}(f) e^{\sup\limits_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n}(\beta_1\ln^+|\alpha_1|+\dots+\beta_n\ln^+|\alpha_n|-h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|))}.$$

Тем более, справедливо неравенство

$$|(D^\beta f)(x)| \leqslant \tau_\nu p_{\nu+1}(f) e^{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^n}(\langle\beta,t\rangle-h_\nu^*(t))}.$$

Отсюда, воспользовавшись Предложением 2.1, получим, что

$$|(D^\beta f)(x)| \leqslant \tau_\nu p_{\nu+1}(f) e^{h_\nu(\beta)}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \beta\in\mathbb{Z}_+^n.$$

Следовательно, при любом $\nu\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f\|_\nu \leqslant \tau_\nu p_{\nu+1}(f).$$

Таким образом, $f\in G(\mathcal{H})$ и вложение $C(\mathcal{H})$ в $G(\mathcal{H})$ непрерывно.

Из доказанных утверждений следует, что пространства $G(\mathcal{H})$ и $C(\mathcal{H})$ совпадают как топологические пространства. □

3. О продолжении функций из $G(\mathcal{H})$ до голоморфных в выпуклой трубчатой области

Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ определим функцию u_ν в $\mathbb{R}^n$, полагая

$$u_\nu(x) = h_\nu^*(\ln^+|x_1|, \ldots, \ln^+|x_n|), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, функция u_ν непрерывна, неотрицательна, причем $u_\nu(0) = 0$, и ее сужение на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной. Ввиду (2.1) имеем

$$\lim_{x\to\infty} (u_{\nu+1}(x) - u_\nu(x)) = +\infty. \tag{3.1}$$

Всюду далее предполагается, что функции u_ν удовлетворяют условию

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{u_\nu(x)}{\|x\|} > 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Определим теперь множество $B_\nu = \{y \in \mathbb{R}^n : \widetilde{u_\nu}(y) < \infty\}$. Очевидно, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

то $B_\nu = \mathbb{R}^n$. В силу (3.2) внутренность B_ν° множества B_ν непуста. Так как функция $\widetilde{u_\nu}$ — выпуклая в $\mathbb{R}^n$, то B_ν — выпуклое множество. Так как $\widetilde{u_{\nu+1}}(y) \leqslant \widetilde{u_\nu}(y)$ для любого $y \in \mathbb{R}^n$, то $B_\nu \subseteq B_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $B = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} B_\nu^\circ$. B — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что каждая функция $f \in G(\mathcal{H})$ допускает продолжение до 2π-периодической по каждой переменной голоморфной в трубчатой области $T_B = \mathbb{R}^n + iB$ функции F_f, определяемой по правилу:

$$F_f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_\alpha e^{i\langle\alpha,z\rangle}, \quad z \in T_B. \tag{3.3}$$

Действительно, каково бы ни было $\nu \in \mathbb{N}$ для любого $z \in \mathbb{R}^n + iB_\nu^\circ$

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}_\alpha||e^{i\langle\alpha,z\rangle}| &\leqslant p_{\nu+1}(f) \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} e^{-u_\nu(\alpha)-\langle\alpha, Im\, z\rangle} \\ &\leqslant \tau_\nu p_{\nu+1}(f) e^{\sup\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(-u_\nu(\alpha)-\langle\alpha, Im\, z\rangle)} = \tau_\nu p_{\nu+1}(f) e^{\widetilde{u_\nu}(-Im\, z)} \\ &= \tau_\nu p_{\nu+1}(f) e^{\widetilde{u_\nu}(Im\, z)} < \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, ряд в правой части в (3.3) сходится абсолютно и равномерно в области $T_{B_\nu^\circ} = \mathbb{R}^n + iB_\nu^\circ$ при любом $\nu \in \mathbb{N}$. Значит, F_f голоморфна в T_B. Причем,

$$|F_f(z)| \leqslant \tau_\nu p_{\nu+1}(f) e^{\widetilde{u_\nu}(Im\, z)}, \quad z \in \mathbb{R}^n + iB_\nu^\circ. \tag{3.4}$$

Очевидно, указанное продолжение единственно.

Далее предполагаем, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$ функция u_ν — выпуклая в $\mathbb{R}^n$. Из этого предположения и того, что функция u_ν принимает конечные значения в $\mathbb{R}^n$ следует, что она будет непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Определим теперь пространство $H_{2\pi}(T_{B_\nu^\circ}, \tilde{u}_\nu)$, состоящее из 2π-периодических по каждой переменной голоморфных в $T_{B_\nu^\circ}$ функций F, для которых при некотором $c_\nu(F) > 0$

$$|F(z)| \leqslant c_\nu(F) e^{\tilde{u}_\nu(Im\, z)}, \quad z \in T_{B_\nu^\circ}.$$

Наделим $H_{2\pi}(T_{B_\nu^\circ}, \tilde{u}_\nu)$ нормой

$$n_\nu(F) = \sup_{z\in T_{B_\nu^\circ}} \frac{|F(z)|}{e^{\tilde{u}_\nu(Im\, z)}}, \quad F \in H_{2\pi}(T_{B_\nu^\circ}, \tilde{u}_\nu).$$

Так как $\widetilde{u_{\nu+1}}(y) \leqslant \widetilde{u_\nu}(y)$ для любого $y \in \mathbb{R}^n$, то

$$n_\nu(F) \leqslant n_{\nu+1}(F), \quad F \in H_{2\pi}(T_{B^\circ_{\nu+1}}, \tilde{u}_{\nu+1}).$$

Значит, пространство $H_{2\pi}(T_{B^\circ_{\nu+1}}, \tilde{u}_{\nu+1})$ вложено в $H_{2\pi}(T_{B^\circ_\nu}, \tilde{u}_\nu)$ непрерывно.

Отметим, что пространство $H_{2\pi}(T_{B^\circ_{\nu+1}}, \tilde{u}_{\nu+1})$ — собственное подпространство пространства $H_{2\pi}(T_{B^\circ_\nu}, \tilde{u}_\nu)$. Действительно, если предположить, что $H_{2\pi}(T_{B^\circ_{\nu+1}}, \tilde{u}_{\nu+1}) = H_{2\pi}(T_{B^\circ_\nu}, \tilde{u}_\nu)$, то при некотором $c_\nu > 0$ должно быть справедливо неравенство

$$n_{\nu+1}(F) \leqslant c_\nu n_\nu(F), \quad F \in H_{2\pi}(T_{B^\circ_\nu}, \tilde{u}_\nu).$$

В частности, из выполнения этого неравенства для функций $e^{-i\langle\alpha,z\rangle}$ с $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, будем иметь

$$\sup_{y \in B^\circ_{\nu+1}} (\langle\alpha, y\rangle - \tilde{u}_{\nu+1}(y)) \leqslant \ln c_\nu + \sup_{y \in B^\circ_\nu} (\langle\alpha, y\rangle - \tilde{u}_\nu(y)).$$

Это неравенство можно записать так:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle\alpha, y\rangle - \tilde{u}_{\nu+1}(y)) \leqslant \ln c_\nu + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle\alpha, y\rangle - \tilde{u}_\nu(y)).$$

Теперь примем во внимание то, что для каждого $\nu \in \mathbb{N}$

$$\sup_{y \in B^\circ_\nu} (\langle\alpha, y\rangle - \widetilde{u}_\nu(y)) = \sup_{y \in B_\nu} (\langle\alpha, y\rangle - \widetilde{u}_\nu(y)) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle\alpha, y\rangle - \widetilde{u}_\nu(y)) = u_\nu(\alpha). \tag{3.5}$$

Здесь на завершающем этапе использовалась формула обращения преобразования Юнга-Фенхеля [4]. С учетом этого равенства из предыдущего неравенства получим, что $u_{\nu+1}(\alpha) \leqslant \ln c_\nu + u_\nu(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, что противоречит (3.1).

Введем пространство $H_{2\pi}(T_B, \mathcal{H})$ как пересечение пространств $H_{2\pi}(T_{B^\circ_\nu}, \tilde{u}_\nu)$. Наделим $H_{2\pi}(T_B, \mathcal{H})$ локально выпуклой топологией, задаваемой системой норм n_ν.

Теорема 3.1. *Пространства $G(\mathcal{H})$ и $H_{2\pi}(T_B, \mathcal{H})$ изоморфны.*

Доказательство. Пользуясь оценкой (3.4), имеем $n_\nu(F_f) \leqslant \tau_\nu p_{\nu+1}(f)$ для любого $f \in G(\mathcal{H})$. Это означает, что линейное отображение A действует из $G(\mathcal{H})$ в $H_{2\pi}(T_B, \mathcal{H})$ и является непрерывным. Ясно, что отображение A инъективно.

Покажем, что отображение A сюръективно. Пусть $F \in H_{2\pi}(T_B, \mathcal{H})$. Тогда, в частности, $F \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно,

$$F(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{F}_\alpha e^{i\langle\alpha,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь аналитичностью и периодичностью F, представление коэффициента Фурье $\hat{F}_\alpha$ функции F можно записать так:

$$\hat{F}_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} F(x+iy) e^{-i\langle\alpha,x+iy\rangle}\, dx, \quad y \in B^\circ_\nu.$$

Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$

$$|\hat{F}_\alpha| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi]^n} |F(x+iy)| e^{\langle\alpha,y\rangle}\, dx, \quad y \in B^\circ_\nu.$$

Так как $F \in H_{2\pi}(T_{B^\circ_\nu}, \tilde{u}_\nu)$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$, то из этого неравенства получим, что

$$|\hat{F}_\alpha| \leqslant n_\nu(F) e^{\widetilde{u}_\nu(y)} e^{\langle\alpha,y\rangle}, \quad y \in B^\circ_\nu.$$

Следовательно,

$$|\hat{F}_\alpha| \leqslant n_\nu(F) e^{\inf\limits_{y \in B^\circ_\nu} (\widetilde{u}_\nu(y) + \langle\alpha,y\rangle)}.$$

С учетом (3.5) имеем

$$\inf_{y\in B_\nu^\circ}(\widetilde{u}_\nu(y)+\langle\alpha,y\rangle)=\inf_{y\in B_\nu^\circ}(\widetilde{u}_\nu(-y)+\langle\alpha,y\rangle)=-\sup_{y\in B_\nu^\circ}(\langle\alpha,y\rangle-\widetilde{u}_\nu(y))=-u_\nu(\alpha).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства получим, что

$$|\hat{F}_\alpha|\leqslant n_\nu(F)e^{-u_\nu(\alpha)}. \tag{3.6}$$

Значит, $F_{|\mathbb{R}^n}\in C(\mathcal{H})$. Но тогда по Теореме 2.1 $F_{|\mathbb{R}^n}\in G(\mathcal{H})$. Очевидно, $A(F_{|\mathbb{R}^n})=F$. Итак, отображение A сюръективно. Отметим еще, что в силу оценки (3.6) и Теоремы 2.1 линейное отображение $A^{-1}: F\in H_{2\pi}(T_B,\mathcal{H})\to F_{|\mathbb{R}^n}$ действует из $H_{2\pi}(T_B,\mathcal{H})$ в $G(\mathcal{H})$ непрерывно. Из доказанных утверждений следует, что отображение A осуществляет изоморфизм пространств $G(\mathcal{H})$ и $H_{2\pi}(T_B,\mathcal{H})$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П.Л. Ульянов. *О классах бесконечно дифференцируемых функций* // Докл. АН СССР. **305**:2, 287–290 (1989).
2. П.Л. Ульянов. *О свойствах функций из классов Жевре* // Докл. АН СССР. **314**:4, 793–797 (1989).
3. П.Л. Ульянов. *О классах бесконечно дифференцируемых функций* // Матем. сб. **181**:5, 589–609 (1989).
4. Р. Рокафеллар. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.

Анастасия Владимировна Луценко,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: Lutsenko.AV@yandex.ru

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru