ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 4 (2022). С. 46-59.

О (k_0)-ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ И (k_0)-ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Ж.Д. ДЕХКОНОВ

Аннотация. Решение задач, возникающих при исследовании термодинамических свойств физических и биологических систем, как правило, проводится в рамках теории мер Гиббса. Мера Гиббса — это фундаментальное понятие, определяющее вероятность микроскопического состояния данной физической системы (определенной конкретным гамильтонианом). Известно, что каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы, и, если мера Гиббса не единственна, то говорят, что существует фазовый переход. В связи с этим особый интерес представляет изучение мер Гиббса. В рассматриваемой статье изучается (k_0)-трансляционно-инвариантные и (k_0)-периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. (k_0)-трансляционно-инвариантные и (k_0)-периодические меры Гиббса строятся с помощью трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса. Для ферромагнитной модели Поттса, в случае $k_0 = 3$, доказано существование (k_0)-трансляционно-инвариантных (т.е. (3)-трансляционно-инвариантных) мер Гиббса. Для антиферромагнитной модели Поттса, также в случае $k_0 = 3$, доказано существование (k_0)-периодических ((3)-периодических) мер Гиббса на дереве Кэли.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Поттса, (k_0)-трансляционно-инвариантная мера Гиббса, (k_0)-периодическая мера Гиббса

Mathematics Subject Classification: 82B26, 60K35

1. Введение

Понятие меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли вводится стандартным образом (см. [1]–[4]). В работе [5] изучена ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и показано существование критической температуры T_c такой, что при $T < T_c$ существуют три трансляционно-инвариантные меры Гиббса и несчетное число мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными. В работе [6] обобщены результаты работы [5] для модели Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка.

В работе [7] доказано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [8] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса.

В работе [9] была изучена модель Поттса ($q = 3$) на треугольной решетке с учетом взаимодействия вторых ближайших соседей. В данной работе изучены эффекты фрустрации в различных магнитных системах. Для выяснения наличия фрустраций в трехвершинной

J.D. Dekhkonov, On (k_0)-translation-invariant and (k_0)-periodic Gibbs measures for Potts model on Cayley tree.

Поступила 10 ноября 2021 г.

антиферромагнитной модели Поттса на треугольной решетке исследование проводилось на основе алгоритма Ванга-Ландау методом Монте-Карло.

В работе [10] показано, что переход из антиферромагнитной и коллинеарной фаз в парамагнитную является фазовым переходом первого рода, в то время как переход из фрустрированной области в парамагнитную фазовым переходом второго рода.

В работе [11] изучена модель ферромагнетика Поттса на квадратичной решетке со спиновым значение $(1, q)$ также использован метод Монте-Карло.

В работе [12] изучена векторная модель Поттса со спиновым значением $q = 3, q = 4$ и было рассмотрено одно основное состояние модели Поттса в магнитном поле. Также показано, что магнетизация ферромагнетика прямо пропорционально зависит от температуры.

В работе [13] исследованы фазовые переходы в трехмерной слабо разбавленной ферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина $q = 5$ на простой кубической решетке.

В работе [15] на дереве Кэли для модели Поттса найдены все трансляционно-инвариантные расщепленные меры Гиббса (ТИРМГ), в частности, показано, что при достаточно низких температурах их количество равно $2^q - 1$. Доказано, что существуют $[q/2]$ критические температуры и дано точное количество ТИРМГ для каждой промежуточной температуры.

В работе [18] получены явные формулы для трансляционно-инвариантных мер Гиббса ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 3$. Кроме того, доказано, что на некотором инварианте при некоторых условиях на параметры антиферромагнитной модели Поттса с q-состояниями с нулевым внешним полем на дереве Кэли $k \geqslant 3$ существуют ровно две периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса с периодом два.

В работе [19] вводится слабо периодическая мера Гиббса и для модели Изинга найдены некоторые такие меры, а в работе [20] для модели Поттса изучены слабо периодические основные состояния и слабо периодические меры Гиббса. В работах [26], [27] изучены слабо периодические меры Гиббса для модели Поттса с внешним полем.

В недавной работе [16] дан обширный анализ единственности и неединственности ТИРМГ модели Поттса со случайным и постоянным внешним полем. В некоторых частных случаях доказано, что верхняя граница количества таких мер равна $2^q - 1$.

Детальный обзор результатов и применение модели Поттса можно найти в [17].

В работе [21] авторы построили некоторые меры Гиббса (далее называются меры Гиббса, полученные ART-конструкцией) для модели Изинга на дереве Кэли. В работах [22], [23] для модели Изинга с помощью трансляционно-инвариантной меры Гиббса на дереве Кэли порядка k_0, построена новая мера Гиббса на дереве Кэли порядка $k, (k_0 < k)$ названная как (k_0)-трансляционно-инвариантная мера Гиббса.

В работе [24] доказано существование мер Гиббса, построенных аналогичным методом из [21] (далее называются мерой, полученной ART-конструкцией) и в случае $k_0 = 2$, (k_0)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли.

Целью данной статьи является построение (k_0)-трансляционно-инвариантных и (k_0)-периодических мер Гиббса для модели Поттса в случае $k_0 = 3$. Работа имеет следующую структуру: в разделе 2 вводятся основные определения и известные факты; в разделе 3 приведены результаты, полученные для (k_0)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса в случае $k_0 = 3$; в разделе 4 приведены результаты, полученные для (k_0)-периодических мер Гиббса в случае $k_0 = 3$.

2. Определения и известные факты

Дерево Кэли T^k порядка $k \geqslant 1$ — бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребро. Пусть $T^k = (V, L, i)$, где V — есть множество вершин T^k, L — его множество ребер, i — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершин* и обозначаются $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y) = \min\{d | \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V \quad \text{такой, что} \quad \langle x_0, x_1\rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим $W_n = \{x \in V \quad | \quad d(x, x^0) = n\}$,

$$V_n = \{x \in V \quad | \quad d(x, x^0) \leqslant n\}, \quad L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \quad | \quad x, y \in V_n\}.$$

Для $x \in W_n$ положим $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geqslant 1$ и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, соответственно (см. [4]).

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$, $q \geqslant 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{2.1}$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle$ — ближайшие соседи и δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j. \end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} \tilde{h}_{\sigma(x),x}\right\}, \tag{2.2}$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ — температура, Z_n^{-1} — нормирующий множитель, $\{h_x = (h_{1,x}, ..., h_{q,x}) \in \mathbb{R}^q, x \in V\}$ — совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

Говорят, что вероятностное распределение (2.2) согласованное, если для всех $n \geqslant 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \tag{2.3}$$

здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ — объединение конфигураций. В этом случае, существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной гиббсовской мерой, соответствующей гамильтониану (2.1) и векторнозначной функции h_x, $x \in V$.

Следующее утверждение описывает условие на h_x, обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 2.1 (см. [4]). *Вероятностное распределение $\mu(\sigma_n)$, $n = 1, 2, ...$ в (2.2) является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \tag{2.4}$$

где функция $F : h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \to F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ *определяется как:*

$$F_i = \ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right),$$

$\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)$ *— множество прямых потомков точки* x *и* $h_x = (h_{1,x}, ..., h_{q-1,x})$ *с условием*

$$h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x}, \qquad i = 1, ..., q-1.$$

Каждому решению h_x функционального уравнения (2.4) соответствует одна мера Гиббса и наоборот.

Пусть $\widehat{G}_k$ — подгруппа группы G_k.

Определение 2.1. *Совокупность векторов* $h = \{h_x, x \in G_k\}$ *называется* $\widehat{G}_k$*-периодической, если* $h_{yx} = h_x$ *для* $\forall x \in G_k$, $y \in \widehat{G}_k$.

G_k-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Определение 2.2. *Мера* μ *называется* $\widehat{G}_k$*-периодической, если она соответствует* $\widehat{G}_k$*-периодической совокупности векторов* h.

3. (k_0)-трансляционно-инвариантная мера Гиббса

Мы рассмотрим ферромагнитные модели Поттса, т.е. $J > 0$ $(\theta > 1)$. При любых k и q трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттса изучены в работе [18].

В случае $k = 3$, $q = 3$ для трансляционно-инвариантных совокупностей векторов $h_x = h = (h_1, h_2)$ из (2.4), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1 = 3\ln\dfrac{\theta e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}, \\ h_2 = 3\ln\dfrac{\theta e^{h_2} + e^{h_1} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}. \end{cases} \tag{3.1}$$

В работе [18] доказано, что эта система имеет следующие решения:

$$(h_1^{(i)}, 0), \quad (0, h_1^{(i)}), \quad (-h_1^{(i)}, -h_1^{(i)}), \quad (0,0), \quad i = 1, 2,$$

где

$$h_1^{(i)} = 3\ln x_i,$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\sqrt{\theta^2+\theta-2}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{3\sqrt{3\theta^4+24\theta^3+18\theta^2-120\theta-249}}{2\theta^3+3\theta^2-12\theta-47} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\theta-1}{3}, \\ x_2 &= \frac{2\sqrt{\theta^2+\theta-2}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{3\sqrt{3\theta^4+24\theta^3+18\theta^2-120\theta-249}}{2\theta^3+3\theta^2-12\theta-47} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\theta-1}{3}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В работах [22], [23] для модели Изинга с помощью трансляционно-инвариантных мер Гиббса на дереве Кэли порядка k_0 построена новая мера Гиббса на дереве Кэли порядка k $(k_0 < k)$, названная как (k_0)-трансляционно-инвариантная мера Гиббса. В этом пункте для модели Поттса с помощью трансляционно-инвариантной меры Гиббса на дереве Кэли порядка три $(k_0 = 3)$ как конструкции из [22], [23] докажем существование новых мер Гиббса на дереве Кэли седьмого порядка, которые также назовем (k_0)-трансляционно-инвариантными.

Пусть V^k — множество всех вершин T^k и $\theta_c = 2,809107468$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли седьмого порядка при $q = 3$ и $\theta = \theta_c$ существуют не менее шести (3)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса.*

Доказательство. Рассмотрим дерево Кэли седьмого порядка. Напомним, что для $x \in V^k$ через $S_{k_0}(x)$ обозначаются произвольные k_0 $(1 \leqslant k_0 \leqslant k)$ штук элементов $S(x)$. Сначала с помощью $(h_1^{(1)}, 0)$ и $(h_1^{(2)}, 0)$ построим совокупность векторов h_x на V^7, которые удовлетворяют функциональному уравнению (2.4). Эту совокупность векторов h_x определим следующим образом:

(l_1) Если на вершине $x \in V^7$ имеем $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$, то вершинам $S_6(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$, остальным вершинам $S_1(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$. Если на вершине $x \in V^7$ имеем $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$, то вершинам $S_3(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$, остальным вершинам $S_4(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$. В результате из (2.4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1^{(1)} = 6\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + \ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}}, \\ h_1^{(2)} = 3\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + 4\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Учитывая

$$h_1^{(i)} = 3\ln\frac{\theta e^{h_1^{(i)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(i)}}}, \qquad i = 1, 2, \tag{3.4}$$

из (3.3) имеем

$$3\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + \ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} = 0. \tag{3.5}$$

Отметим, что $h_1^{(i)} = h_1^{(i)}(\theta)$, $i = 1, 2$, следовательно, имеем, что левая часть (3.5) зависит только от θ. При значениях θ, удовлетворяющих (3.5) и

$$\theta > \theta_{cr} = \sqrt{9 + 6\sqrt{3}} - 2 \approx 2,403669476,$$

совокупность векторов h_x на V^7, построенных по правилам (l_1), удовлетворяет функциональному уравнению (2.4). Из (3.5) и (3.4) получим следующее:

$$h_1^{(1)} + \frac{h_1^{(2)}}{3} = 0. \tag{3.6}$$

Следовательно из (3.6) и (3.2) имеем следующее уравнение:

$$x_1^3 \cdot x_2 = 1.$$

Решение этого уравнения есть $\theta = \theta_c$, т.е. при $\theta = \theta_c$ совокупность векторов построенная по правилам (l_1), удовлетворяет функциональному уравнению (2.4). Следуя работам [22], [23] для модели Поттса, меру, соответствующую совокупности векторов построенную по правилам (l_1), назовем (3)-трансляционно-инвариантной мерой Гиббса. Аналогичным образом для векторов $h_x = (0, h_1^{(i)})$, $i = 1, 2$, доказывается существование еще одной (3)-трансляционно-инвариантной меры Гиббса при $\theta = \theta_c$.

Теперь с помощью $(h_1^{(1)}, 0)$, $(h_1^{(2)}, 0)$ и $(-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)})$ построим совокупность векторов h_x на V^7, которые удовлетворяют функциональному уравнению (2.4). Эту совокупность векторов h_x определим следующим образом:

(l_2) Если на вершине $x \in V^7$ имеем $h_x = (-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)})$, то вершинам $S_3(x)$ сопоставим вектор $h_x = (-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)})$, вершинам $S_3(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$, остальным вершинам $S_1(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$. Если на вершине $x \in V^7$ имеем $(h_1^{(1)}, 0)$ или $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$, то вершинам $S(x)$ сопоставим векторы $(h_1^{(1)}, 0)$ и $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$ по правилам (l_1). В результате из (2.4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -h_1^{(1)} = 3\ln\dfrac{(\theta+1)e^{-h_1^{(1)}}+1}{\theta+2e^{-h_1^{(1)}}} + 3\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + \ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}, \\ -h_1^{(1)} = 3\ln\dfrac{(\theta+1)e^{-h_1^{(1)}}+1}{\theta+2e^{-h_1^{(1)}}}, \\ h_1^{(1)} = 6\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + \ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}, \\ h_1^{(2)} = 3\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + 4\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Учитывая (3.4), из (3.7) получим уравнение (3.5), а уравнение (3.5) имеет решение $\theta = \theta_c$, т.е. при $\theta = \theta_c$ совокупность векторов, построенная по правилам (l_2), удовлетворяет функциональному уравнению (2.4). Аналогичном образом для множества векторов $\{(0, h_1^{(1)}), (0, h_1^{(2)}), (-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)})\}$, $\{(0, h_1^{(1)}), (0, h_1^{(2)}), (-h_1^{(2)}, -h_1^{(2)})\}$, $\{(h_1^{(1)}, 0), (h_1^{(2)}, 0), (-h_1^{(2)}, -h_1^{(2)})\}$ можно показать существование еще трех совокупностей векторов, удовлетворяющих функциональному уравнению (2.4).

Из всего сказанного следует, что при $\theta = \theta_c$ существуют шесть (3)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса. □

Введем обозначения

$$\widetilde{h}_1 = (h_1^{(1)}; 0), \quad \widetilde{h}_2 = (h_1^{(2)}; 0).$$

Совокупность векторов h_x-построенных по правилам (l_1) на дереве Кэли порядка семь изображено на (Рис. 1).

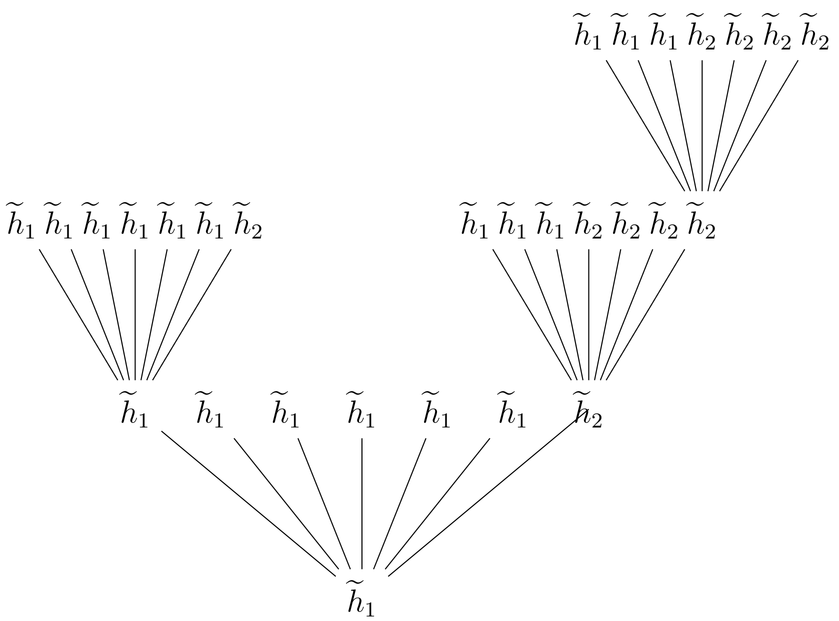

Рис. 1. Совокупность векторов h_x, построенных по правилам (l_1) на дереве Кэли порядка $k = 7$.

Замечание 3.1. *Отметим, что в работе [31] с помощью известных мер Гиббса построена мера Гиббса, полученная ART-конструкцией. На дереве Кэли порядка $k, k \geqslant 8$ при $\theta = \theta_c$ с помощью (3)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса, описанных в Теореме 3.1, можно построить меру Гиббса, полученную ART-конструкцией.*

Рассмотрим дерево Кэли порядка $k = a+b+3$, $a, b \in N$. Введем следующие обозначения:

$$B(a,b) = \{\theta \in \mathbb{R}_+ : \theta > \sqrt{9+6\sqrt{3}} - 2 \approx 2.403669476, \quad ah_1^{(1)} + bh_1^{(2)} = 0\}.$$

Теорема 3.2. *Для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли порядка $k = a + b + 3$, $a, b \in N$ при $q = 3$ и $\theta \in B(a,b)$ существуют не менее шести (3)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса.*

Доказательство. С помощью $(h_1^{(1)}, 0)$ и $(h_1^{(2)}, 0)$ построим совокупность векторов h_x на V^k, $k = a + b + 3$, $a, b \in N$, которые удовлетворяют функциональному уравнению (2.4). Эту совокупность векторов h_x определим следующим образом:

(l_3) Пусть $k = a + b + 3$, $a, b \in N$. Если на вершине $x \in V^k$ имеем $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$, то вершинам $S_{a+3}(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$, остальным вершинам $S_b(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$. Если на вершине $x \in V^k$ имеем $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$, то вершинам $S_{b+3}(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$, остальным вершинам $S_a(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$. В результате из (2.4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1^{(1)} = (a+3)\ln \dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + b \ln \dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}}, \\ h_1^{(2)} = a \ln \dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + (b+3)\ln \dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Учитывая (3.4), из (3.8) получим

$$a \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + b \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} = 0. \tag{3.9}$$

Отметим, что $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ зависят от θ и они вещественны при $\theta > \theta_{cr} = \sqrt{9+6\sqrt{3}} - 2$ (см. [18]). Уравнение (3.9) перепишем в следующем виде:

$$ah_1^{(1)} + bh_1^{(2)} = 0. \tag{3.10}$$

Следовательно, совокупность векторов, построенных по правилам (l_2) при

$$\theta \in B(a,b) = \{\theta \in \mathbb{R}_+ : \theta > \sqrt{9+6\sqrt{3}} - 2 \approx 2.403669476, \quad ah_1^{(1)} + bh_1^{(2)} = 0\},$$

удовлетворяет функциональному уравнению (2.4).

Подобно предыдущему случаю для модели Поттса меру, соответствующую совокупности векторов, построенных по правилам (l_3), назовем как (3)-трансляционно-инвариантная мера Гиббса. Аналогичным образом для векторов $h_x = (0, h_1^{(i)})$, $i = 1, 2$ доказывается существование еще одной (3)-трансляционно-инвариантной меры Гиббса при $\theta \in B(a,b)$.

Теперь с помощью $(h_1^{(1)}, 0)$, $(h_1^{(2)}, 0)$ и $(-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)})$ построим совокупность векторов h_x на V^k, которые удовлетворяют функциональному уравнению (2.4). Эту совокупность векторов h_x определим следующим образом:

(l_4) Если на вершине $x \in V^k$ имеем $h_x = (-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)})$, то вершинам $S_2(x)$ сопоставим вектор $h_x = (-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)})$, вершинам $S_a(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$, остальным вершинам $S_b(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$. Если на вершине $x \in V^k$ имеем $(h_1^{(1)}, 0)$

или $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$, то вершинам $S(x)$ сопоставим векторы $(h_1^{(1)}, 0)$ и $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$ по правилам (l_3). В результате из (2.4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -h_1^{(1)} = 3\ln\dfrac{(\theta+1)e^{-h_1^{(1)}}+1}{\theta+2e^{-h_1^{(1)}}} + a\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + b\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}, \\ -h_1^{(1)} = 3\ln\dfrac{(\theta+1)e^{-h_1^{(1)}}+1}{\theta+2e^{-h_1^{(1)}}}, \\ h_1^{(1)} = (a+3)\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + b\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}, \\ h_1^{(2)} = a\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + (b+3)\ln\dfrac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Учитывая (3.4), из (3.11) получим уравнение (3.10), что эквивалентно (3.9). Следовательно, при $\theta \in B(a,b)$ совокупность векторов h_x, построенная по правилам (l_4), удовлетворяет функциональному уравнению (2.4). Аналогичным образом для множества векторов $\{(0,h_1^{(1)}),(0,h_1^{(2)}),(-h_1^{(1)},-h_1^{(1)})\}$, $\{(0,h_1^{(1)}),(0,h_1^{(2)}),(-h_1^{(2)},-h_1^{(2)})\}$, $\{(h_1^{(1)},0),(h_1^{(2)},0),(-h_1^{(2)},-h_1^{(2)})\}$ можно показать существование еще трех совокупностей векторов, удовлетворяющих функциональному уравнению (2.4).

В результате получим, что при $\theta \in B(a,b)$ на дереве Кэли порядка $k = a+b+3$, $a,b \in N$ существуют шесть (3)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса. $\square$

Замечание 3.2. *1. Заметим, что множество $B(a,b)$ – не пустое, так как случай $a=3, b=1$ в Теореме 3.1, доказано, что $\theta = \theta_c \in B(3,1)$.*

2. Отметим, что построенные по правилам (l_i), $i=1,2,3,4$ меры Гиббса отличаются от ранее известных мер (см. [15], [29], [30], [24]*).*

4. (k_0)-периодические меры Гиббса

В этом пункте рассмотрим антиферромагнитную модель Поттса, с помощью периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка три доказывается существование новых мер Гиббса (далее назовем (k_0)-периодическими).

Следующая теорема характеризует периодические меры Гиббса.

Теорема 4.1 ([14]). *K — нормальный делитель конечного индекса в G_k. Тогда для модели Поттса все K-периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$-периодическими, либо трансляционно-инвариантными, где $G_k^{(2)} = \{x : |x| - \text{четная}\}$.*

При любых $k \geqslant 3$ и $q \geqslant 3$, $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса для модели Поттса изучены в работе [18].

В случае $k=3$, $q=3$, т.е. $\sigma : V \to \Phi = \{1,2,3\}$, в силу Теоремы 4.1 имеются только $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса, которые соответствуют совокупности векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^2 : x \in G_k\}$ вида

$$h_x = \begin{cases} h, \text{если} |x| - \text{четно}, \\ l, \text{если} |x| - \text{нечетно}. \end{cases}$$

Здесь $h=(h_1,h_2)$, $l=(l_1,l_2)$. Тогда в силу (2.4) имеем:

$$\begin{cases} h_1 = 3\ln\dfrac{\theta\exp(l_1)+\exp(l_2)+1}{\exp(l_1)+\exp(l_2)+\theta}, \\ h_2 = 3\ln\dfrac{\theta\exp(l_2)+\exp(l_1)+1}{\exp(l_1)+\exp(l_2)+\theta}, \\ l_1 = 3\ln\dfrac{\theta\exp(h_1)+\exp(h_2)+1}{\exp(h_1)+\exp(h_2)+\theta}, \\ l_2 = 3\ln\dfrac{\theta\exp(h_2)+\exp(h_1)+1}{\exp(h_1)+\exp(h_2)+\theta}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Введем следующие обозначения: $\exp(h_1)=z_1$, $\exp(h_2)=z_2$, $\exp(l_1)=z_3$, $\exp(l_2)=z_4$. Тогда последнюю систему уравнений можно переписать

$$\begin{cases} z_1 = \Big(\dfrac{\theta z_3+z_4+1}{z_3+z_4+\theta}\Big)^3, \\ z_2 = \Big(\dfrac{\theta z_4+z_3+1}{z_3+z_4+\theta}\Big)^3, \\ z_3 = \Big(\dfrac{\theta z_1+z_2+1}{z_1+z_2+\theta}\Big)^3, \\ z_4 = \Big(\dfrac{\theta z_2+z_1+1}{z_1+z_2+\theta}\Big)^3. \end{cases} \tag{4.2}$$

Рассмотрим отображение $W:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, определенное в следующем виде:

$$\begin{cases} z_1' = \Big(\dfrac{\theta z_3+z_4+1}{z_3+z_4+\theta}\Big)^3, \\ z_2' = \Big(\dfrac{\theta z_4+z_3+1}{z_3+z_4+\theta}\Big)^3, \\ z_3' = \Big(\dfrac{\theta z_1+z_2+1}{z_1+z_2+\theta}\Big)^3, \\ z_4' = \Big(\dfrac{\theta z_2+z_1+1}{z_1+z_2+\theta}\Big)^3. \end{cases} \tag{4.3}$$

Система (4.2) эквивалентна система уравнений $z=W(z)$.

Лемма 4.1 (см. [18])**.** *Отображение W имеет инвариантные множества следующих видов:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \{z=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_1=z_2=z_3=z_4\}, \\ I_2 &= \{z=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_1=z_2, z_3=z_4\}, \\ I_3 &= \{z=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_1=z_3=1\}, \\ I_4 &= \{z=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_2=z_4=1\}. \end{aligned}$$

i) Система уравнений (4.2) на I_2 имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z_1 = \Big(\dfrac{\theta z_3+z_3+1}{2z_3+\theta}\Big)^3, \\ z_3 = \Big(\dfrac{\theta z_1+z_1+1}{2z_1+\theta}\Big)^3. \end{cases} \tag{4.4}$$

Введя обозначения $\sqrt[3]{z_1} = x$, $\sqrt[3]{z_3} = y$, перепишем (4.4):

$$\begin{cases} x = f(y), \\ y = f(x), \end{cases} \tag{4.5}$$

где $f(x) = \frac{(\theta+1)x^3+1}{2x^3+\theta}$.

Из (4.5) получим

$$x = f(f(x)). \tag{4.6}$$

Ясно, что корни уравнения $x = f(x)$ также являются корнями уравнения (4.6). Поэтому, чтобы найти корни (4.6), отличные от корней уравнения $x = f(x)$, рассмотрим уравнение

$$\frac{f(f(x)) - x}{f(x) - x} = 0.$$

Разделив числитель на знаменатель левой части этого уравнения, получим уравнение:

$$\begin{split}(\theta^3 + 3\theta^2 + 7\theta + 1)x^6 + (2\theta^2 + 2\theta - 4)x^5 + (\theta^3 + 2\theta^2 - \theta - 2)x^4 + (6\theta^2 + 4\theta + 2)x^3 \\ + (\theta^3 + \theta^2 - 2\theta)x^2 + (\theta^2 + \theta - 2)x + \theta^3 + \theta + 1 = 0.\end{split} \tag{4.7}$$

Если $0 < \theta < \frac{1}{4}$, то легко видеть, что уравнение (4.7) имеет по крайней мере два положительных корня (см. [18]). Обозначая эти корни через x_1 и x_2, получаем, что решения системы (4.1) имеют следующий вид:

$$(h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, l_1^{(1)}, l_2^{(1)}), \quad (h_1^{(2)}, h_2^{(2)}, l_1^{(2)}, l_2^{(2)}),$$

здесь

$$h_1^{(i)} = h_2^{(i)} = 3\ln x_i, \quad l_1^{(i)} = l_2^{(i)} = 3\ln\Big(\frac{(\theta+1)x_i^3 + 1}{2x_i^3 + \theta}\Big), \quad i = 1, 2. \tag{4.8}$$

Напомним, что каждому из совокупности векторов вида:

$$h_x = \begin{cases} (h_1^{(1)}, h_2^{(1)}), & x \in G_k^{(2)}, \\ (l_1^{(1)}, l_2^{(1)}), & x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

удовлетворяющие функциональному уравнению (2.4), соответствует $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса.

Мы будем строить k_0-периодические решения с помощью этих решений. С помощью $(h_1^{(1)}, h_2^{(1)})$ и $(l_1^{(1)}, l_2^{(1)})$ построим совокупность векторов h_x на V^k, $k = c + d + 3$, $c, d \in N$, которые удовлетворяют функциональному уравнению (2.4). Эту совокупность векторов h_x определим следующим образом:

(l_5) Пусть $k = c + d + 3$, $c, d \in N$. Если на вершине $x \in V$ имеем $h_x = (h_1^{(1)}, h_2^{(1)})$, то вершинам $S_c(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(1)}, h_2^{(1)})$, остальным вершинам $S_{d+3}(x)$ сопоставим вектор $h_x = (l_1^{(1)}, l_2^{(1)})$. Если на вершине $x \in V$ имеем $h_x = (l_1^{(1)}, l_2^{(1)})$, то вершинам $S_{c+3}(x)$ сопоставим вектор $h_x = (h_1^{(1)}, h_2^{(1)})$, остальным вершинам $S_d(x)$ сопоставим вектор $h_x = (l_1^{(1)}, l_2^{(1)})$. В результате (2.4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1^{(1)} = c\ln\dfrac{(\theta+1)\exp(h_1^{(1)}) + 1}{2\exp(h_1^{(1)}) + \theta} + (d+3)\ln\dfrac{(\theta+1)\exp(l_1^{(1)}) + 1}{2\exp(l_1^{(1)}) + \theta}, \\ l_1^{(1)} = (c+3)\ln\dfrac{(\theta+1)\exp(h_1^{(1)}) + 1}{2\exp(h_1^{(1)}) + \theta} + d\ln\dfrac{(\theta+1)\exp(l_1^{(1)}) + 1}{2\exp(l_1^{(1)}) + \theta}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Учитывая

$$h_1^{(1)} = 3\ln\frac{(\theta+1)\exp(l_1^{(1)}) + 1}{2\exp(l_1^{(1)}) + \theta}, \qquad l_1^{(1)} = 3\ln\frac{(\theta+1)\exp(h_1^{(1)}) + 1}{2\exp(h_1^{(1)}) + \theta},$$

из (4.9) имеем

$$c\ln\frac{(\theta+1)\exp(h_1^{(1)})+1}{2\exp(h_1^{(1)})+\theta}+d\ln\frac{(\theta+1)\exp(l_1^{(1)})+1}{2\exp(l_1^{(1)})+\theta}=0. \tag{4.10}$$

Отметим, что $h_1^{(1)}$ и $l_1^{(1)}$ зависят от θ и они вещественны при $0<\theta<\frac{1}{4}$ (см. [18]). Уравнение (4.10) перепишем в следующем виде:

$$cl_1^{(1)}+dh_1^{(1)}=0. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.8) в (4.11), получаем

$$\left(\frac{(\theta+1)x_1^3+1}{2x_1^3+\theta}\right)^c\cdot x_1^d=1.$$

Следовательно, совокупность векторов, построенных по правилам (l_4) при

$$\theta\in B(c,d)=\left\{\theta\in\mathbb{R}_+:0<\theta<\frac{1}{4},\quad\left(\frac{(\theta+1)x_1^3+1}{2x_1^3+\theta}\right)^c\cdot x_1^d=1\right\},$$

удовлетворяет функциональному уравнению (2.4).

Аналогичным образом для множества векторов $\{(h_1^{(1)},h_2^{(1)}),(l_1^{(2)},l_2^{(2)})\}$, $\{(h_1^{(2)},h_2^{(2)}),(l_1^{(1)},l_2^{(1)})\}$, $\{(h_1^{(2)},h_2^{(2)}),(l_1^{(2)},l_2^{(2)})\}$ можно показать существование еще трех совокупностей векторов, удовлетворяющих функциональному уравнению (2.4).

В результате получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Для антиферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли порядка $k=c+d+3$, $c,d\in N$ при $q=3$ и $\theta\in B(c,d)$ существуют не менее четырех (3)-периодических мер Гиббса.*

Теперь систему уравнений (4.2) рассмотрим на инвариантном множестве I_3.

ii) Система уравнений (4.2) на I_3 имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z_1=\left(\dfrac{\theta z_3+2}{z_3+\theta+1}\right)^3,\\ z_3=\left(\dfrac{\theta z_1+2}{z_1+\theta+1}\right)^3. \end{cases} \tag{4.12}$$

Введя обозначения $\sqrt[3]{z_1}=x$, $\sqrt[3]{z_3}=y$, перепишем (4.12):

$$\begin{cases} x=f(y),\\ y=f(x), \end{cases} \tag{4.13}$$

где $f(x)=\frac{\theta x^3+2}{x^3+\theta+1}$.

Из (4.13) получим

$$x=f(f(x)). \tag{4.14}$$

Ясно, что корни уравнения $x=f(x)$ также являются корнями уравнения (4.14). Поэтому, чтобы найти корни (4.14), отличные от корней уравнения $x=f(x)$, рассмотрим уравнение

$$\frac{f(f(x))-x}{f(x)-x}=0.$$

Разделив числитель на знаменатель левой части этого уравнения, получим уравнение:

$$\begin{aligned}(\theta^3+\theta+1)x^6+(\theta^2+\theta-2)x^5+(\theta^3+\theta^2-2\theta)x^4+(6\theta^2+4\theta+2)x^3\\ +(\theta^3+2\theta^2-\theta-2)x^2+(2\theta^2+2\theta-4)x+\theta^3+3\theta^2+7\theta+1=0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Если $0<\theta<\frac{1}{4}$, то легко видеть, что уравнение (4.15) имеет по крайней мере два положительных корня (см. [18]). Обозначая эти корни через x_1 и x_2, получаем, что решения системы (4.1) имеют следующий вид:

$$(h_1^{(1)},0,l_1^{(1)},0),\quad (h_1^{(2)},0,l_1^{(2)},0).$$

Здесь

$$h_1^{(i)}=3\ln x_i,\quad l_1^{(i)}=3\ln\Big(\frac{\theta x_i^3+2}{x_i^3+\theta+1}\Big),\quad h_2^{(i)}=l_2^{(i)}=0,\quad i=1,2. \tag{4.16}$$

Напомним, что каждому из совокупности векторов вида

$$h_x=\begin{cases}(h_1^{(1)},0), & x\in G_k^{(2)},\\ (l_1^{(1)},0), & x\in G_k\setminus G_k^{(2)},\end{cases}$$

удовлетворяющих функциональному уравнению (2.4), соответствует $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса.

Мы будем строить k_0-периодические решения через эти решения. С помощью $(h_1^{(1)},0)$ и $(l_1^{(1)},0)$ построим совокупность векторов h_x на V^k, $k=c+d+3$, $c,d\in N$, которые удовлетворяют функциональному уравнению (2.4). Эту совокупность векторов h_x определим следующим образом:

(l_6) Пусть $k=c+d+3$, $c,d\in N$. Если на вершине $x\in V$ имеем $h_x=(h_1^{(1)},0)$, то вершинам $S_c(x)$ сопоставим вектор $h_x=(h_1^{(1)},0)$, остальным вершинам $S_{d+3}(x)$ сопоставим вектор $h_x=(l_1^{(1)},0)$. Если на вершине $x\in V$ имеем $h_x=(l_1^{(1)},0)$, то вершинам $S_{c+3}(x)$ сопоставим вектор $h_x=(h_1^{(1)},0)$, остальным вершинам $S_d(x)$ сопоставим вектор $h_x=(l_1^{(1)},0)$. В результате (2.4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1^{(1)}=c\ln\dfrac{\theta\exp(h_1^{(1)})+2}{\exp(h_1^{(1)})+\theta+1}+(d+3)\ln\dfrac{\theta\exp(l_1^{(1)})+2}{\exp(l_1^{(1)})+\theta+1},\\[2ex] l_1^{(1)}=(c+3)\ln\dfrac{\theta\exp(h_1^{(1)})+2}{\exp(h_1^{(1)})+\theta+1}+d\ln\dfrac{\theta\exp(l_1^{(1)})+2}{\exp(l_1^{(1)})+\theta+1}.\end{cases} \tag{4.17}$$

Учитывая

$$h_1^{(1)}=3\ln\frac{\theta\exp(l_1^{(1)})+2}{\exp(l_1^{(1)})+\theta+1},\qquad l_1^{(1)}=3\ln\frac{\theta\exp(h_1^{(1)})+2}{\exp(h_1^{(1)})+\theta+1},$$

из (4.17) имеем

$$c\ln\frac{\theta\exp(h_1^{(1)})+2}{\exp(h_1^{(1)})+\theta+1}+d\ln\frac{\theta\exp(l_1^{(1)})+2}{\exp(l_1^{(1)})+\theta+1}=0. \tag{4.18}$$

Отметим, что $h_1^{(1)}$ и $l_1^{(1)}$ зависят от θ и они вещественны при $0<\theta<\frac{1}{4}$ (см. [18]). Уравнение (4.18) перепишем в следующем виде:

$$cl_1^{(1)}+dh_1^{(1)}=0. \tag{4.19}$$

Подставляя (4.16) в (4.19), получаем

$$\left(\frac{\theta x_1^3+2}{x_1^3+\theta+1}\right)^c\cdot x_1^d=1.$$

Следовательно, совокупность векторов, построенных по правилам (l_4) при

$$\theta\in B(c,d)=\left\{\theta\in\mathbb{R}_+: 0<\theta<\frac{1}{4},\quad \left(\frac{\theta x_1^3+2}{x_1^3+\theta+1}\right)^c\cdot x_1^d=1\right\},$$

удовлетворяет функциональному уравнению (2.4). Аналогичным образом для множества векторов $\{(0,h_1^{(1)}),(0,l_1^{(1)})\}$, $\{(h_1^{(2)},0),(l_1^{(2)},0)\}$, $\{(0,h_1^{(2)}),(0,l_1^{(2)})\}$ можно показать существование еще трех совокупностей векторов, удовлетворяющих функциональному уравнению (2.4).

В результате получаем следующую теорему.

Теорема 4.3. *Для антиферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли порядка* $k=c+d+3$, $c,d\in N$ *при* $q=3$ *и* $\theta\in B(c,d)$ *существуют не менее четырех* (3)*-периодических мер Гиббса.*

Замечание 4.1. *1) Отметим, что для модели Поттса на дереве Кэли порядка два не существуют периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса (см.* [31]*). Поэтому для антиферромагнитной модели Поттса также не существуют* (2)*-периодические меры Гиббса.*

2) Отметим, что (3)*-периодические меры Гиббса отличаются от ранее известных мер (см.* [15], [29], [30], [24]*).*

5. Заключение

В статье изучаются (k_0)-трансляционно-инвариантные и (k_0)-периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. Для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли седьмого порядка при $q=3$ и $\theta=\theta_c$ доказано существование не менее шести (3)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса; для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли порядка $k=a+b+3$, $a,b\in N$ при $q=3$ и $\theta\in B(a,b)$ доказано существование не менее шести (3)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса; для антиферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли порядка $k=c+d+3$, $c,d\in N$ при $q=3$ и $\theta\in B(c,d)$ на инвариантных множествах I_2,I_3 и I_4 доказано существование не менее четырех (3)-периодических мер Гиббса.

Все эти результаты можно применить как к экспериментальной проверке свойств магнитных материалов, соответствующих рассмотренным моделям Поттса, так и к тестированию алгоритмов вычислительной физики на суперкомпьютерах (см. [9]–[13]).

Благодарность.

Автор выражает глубокую признательность профессору М.М. Рахматуллаеву за постановку задачи и полезные советы по работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Х.О. Георги. *Гиббсовские меры и фазовые переходы.* М.: Мир. 1992.
2. C.J. Preston. *Gibbs States on Countable Sets.* Cambridge Tracts Math., 68. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1974.
3. Я.Г. Синай. *Теория фазовых переходов. Строгие результаты.* М.: Наука. 1980.
4. U.A. Rozikov. *Gibbs measures on Cayley trees.* World scientific. 2013.
5. N.N. Ganikhodzhaev. *Pure phases of the ferromagnetic Potts model with three states on a second-order Bethe lattice* // Theor. Math. Phys. **85**:2, 1125–1134 (1990).
6. N.N. Ganikhodzhaev. *Pure phases of the ferromagnetic Potts model on the Bethe lattice* // Dokl. AN RUz. **6** , 4–7 (1992).
7. Н.Н. Ганиходжаев, У.А. Розиков. *Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли* // ТМФ. **111**:1, 109–117 (1997).
8. N.N. Ganikhodjaev, U.A. Rozikov. *On Potts model with countable set of spin values on Cayley tree* // Letters in Math. Phys. **75**:1, 99–109 (2006).
9. А.Б. Бабаев, М.А. Магомедов, А.К. Муртазаев, Ф.А. Кассан-Оглы, А.И. Прошкин. *Фазовые Переходы в двумерной Антиферромагнитной модели Поттса на треугольной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей* // ЖЭТФ. **149**:2, 357–366 (2016).

10. М.А. Магомедов, А.К. Муртазаев, Л.К. Магомедова. *Фазовые переходы в модели Поттса на треугольной решетке* // Вестник ДГУ. Серия 1: Естественные науки. **32**:4, 14–23 (2017).
11. Л.Н. Щур, Л.В. Щур. *Масштабное моделирование – алгоритм параллельного отжига* // Proceedings of the VIII International Conference «Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education» (GRID 2018), Dubna, Moscow region, Russia, September 10-14, 2018.
12. F.A. Kassan-Ogly. *One-dimensional 3-state and 4-state standard Potts models in magnetic field* // Phase Transitions. **71**:1, 39–55 (2000).
13. А.К. Муртазаев, А.Б. Бабаев. *Фазовые переходы в трехмерной слабо разбавленной модели Поттса с $q = 5$* // Физика твердого тела. **63**:10, 1644–1647 (2021).
14. У.А. Розиков, Р.М. Хакимов. *Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли* // ТМФ. **175**:2, 300–312 (2013).
15. C. Külske, U.A. Rozikov, R.M. Khakimov. *Description of translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree* // Jour. Stat. Phys. **156**:1, 189–200 (2014).
16. L.V. Bogachev, U.A. Rozikov. *On the uniqueness of Gibbs measure in the Potts model on a Cayley tree with external field* // J. Stat. Mech. Theory Exp. **7**:073205, pp. 76 (2019).
17. U.A. Rozikov. *Gibbs measures of Potts model on Cayley trees: a survey and applications* // Rev. Math. Phys. **33**:2130007, pp. 58 (2021).
18. Р.М. Хакимов, Ф.Х. Хайдаров. *Трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли* // ТМФ. **189**:2, 286–295 (2016).
19. У.А. Розиков, М.М. Рахматуллаев. *Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли* // ТМФ. **160**:3, 507–516 (2009).
20. М.М. Рахматуллаев. *Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли* // ТМФ. **176**:3, 477–493 (2013).
21. H. Akin, U.A. Rozikov, S. Temir. *A new set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree* // Jour. Stat. Phys. **142**:2, 314–321 (2011).
22. М.М. Рахматуллаев. *(k_0)-периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли* // Доклады АН РУз. **3**, 9–12 (2016).
23. M.M. Rahmatullaev. *Ising model on trees: (k_0)-non translation-invariant Gibbs measures* // Journal of Physics: Conference Series. 819, 012019 (2017).
24. M.M. Rahmatullaev, F.K. Rafikov , Sh.Kh. Azamov. *On constructive description of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree* // Ukr. Mat. Zh. **73**:7, 938–950 (2021).
25. U.A. Rozikov, M.M. Rahmatullaev. *On free energies of the Potts model on the Cayley tree* // Theor. Math. Phys. **190**:1, 98–108 (2017).
26. M.M. Rahmatullaev. *On weakly periodic Gibbs measures for the Potts model with external field on the Cayley tree* // Ukr. Mat. Zh. **68**:4, 529–541 (2016).
27. M.M. Rahmatullaev. *Weakly Periodic Gibbs Measures of the Potts Model with a Special External Field on a Cayley Tree* // J. Math. Phys. Analysis, Geometry. **12**:4, 302–314 (2016).
28. M.M. Rahmatullaev, D. Gandolfo, U. A. Rozikov, J. Ruiz. *On free energies of the Ising model on the Cayley tree* // J. Stat. Phys. **150**:6, 1201–1217 (2013).
29. У.А. Розиков, Р.М. Хакимов. *Периодические меры Гиббса для модели Поттса на де-реве Кэли* // ТМФ. **175**:2, 300–312 (2013).
30. M.M. Rahmatullaev. *The existence of weakly periodic Gibbs measures for the Potts model on the Cayley tree* // Theor. Math. Phys. **180**:3, 1019–1029 (2014).
31. Р.М. Хакимов, М. Т. Махаммадалиев. *Трансляционная инвариантность периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли* // ТМФ. **199**:2, 291–301 (2019).

Жасурбек Дилмурод угли Дехконов,
Андижанский государственный университет,
ул. Университетская, 129,
170100, Андижан, Узбекистан
E-mail: `dehqonov.jasur@bk.ru`