ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 4 (2022). С. 29-45.

УДК 517.956

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ: СЛУЧАЙ СТРАННОГО ЧЛЕНА

Д.И. БОРИСОВ

Аннотация. Рассматривается эллиптический оператор в многомерном пространстве, периодически перфорированном близко расположенными малыми полостями. Коэффициенты дифференциального выражения переменные, комплекснозначные, бесконечно дифференцируемые и равномерно ограниченные вместе со всеми своими производными. Для коэффициентов при старших производных предполагается выполнение равномерного условия эллиптичности. На границах полостей задается краевое условие Дирихле. Размеры полостей и расстояния между ними характеризуются двумя малыми параметрами. Эти параметры выбираются так, чтобы гарантировать возникновение странного члена при усреднении — дополнительного потенциала в усредненном операторе. Основной результат работы — схема построения двупараметрической асимптотики резольвенты рассматриваемого оператора и ее применение для определения первых членов асимптотик. Схема основана на комбинации метода многих масштабов и метода согласования асимптотических разложений. Первый используется для учета распределения полостей, второй — для учета геометрии отверстия и краевого условия Дирихле на границах полостей.

Ключевые слова: перфорированная область, эллиптический оператор, асимптотическое разложение, странный член.

Mathematics Subject Classification: 34B27, 35C20

1. Введение

Эллиптические задачи в перфорированных областях — одна из классических моделей в современной теории усреднения. Вопросы сходимости решений таких задач весьма активно исследовались, мы отметим лишь классические монографии [4], [8]. Классические результаты о сходимости формулируются в терминах сильной и слабой сходимости решений возмущенных задач к усредненным для заданных правых частей рассматриваемых уравнений. В последние годы интерес к этим задачам вновь усилился в связи с доказательством для них операторных оценок, в которых L_2- или W_2^1-норма разности решений возмущенной и усредненных задач оценивается через L_2-норму правой части, умноженную на малую функцию, вид которой определяется геометрией и параметрами перфорации. Такого сорта оценки были установлены в серии недавних работ [2], [10]–[16], [22] для различных геометрий перфорации.

Помимо вопросов о сходимости, отдельное интересное направление исследований — это построение асимптотических разложений решений, включая случай полных асимптотических разложений. Для случая перфорации вдоль заданного многообразия полные асимптотические разложения были построены в совсем недавних работах [2], [3]. В книге [4,

D.I. Borisov, Asymptotic expansion of Dirichlet problem in perforated domain: strange term case.

Исследование частично поддержано Грантовым агенством Чешской Республики (проект 22-18739S).
Поступила 31 августа 2022 г.

Гл. III, §6.5], а также в статьях [17], [19]–[21] рассматривался случай строго периодической перфорации по всему пространству, причем размеры отверстий и расстояния между ними были пропорциональны одному и тому же малому параметру. Построение асимптотических разложений было основано на использовании метода многих масштабов.

В настоящей работе мы вновь рассматриваем задачу о построении асимптотического разложения для резольвенты эллиптического оператора второго порядка общего вида в периодически перфорированной области. Однако мы считаем, что размеры отверстий и расстояния между ними описываются двумя малыми положительными параметрами ε и η. Расстояния между отверстиями описываются параметром ε, а отверстия имеют размер $\varepsilon\eta$. Параметр η считается зависящим от ε и на него налагается условие $\varepsilon^{-2}\eta^{n-2}(\varepsilon)\to a$ с некоторой константой a. Это условие описывает критический размер отверстий, при которых гарантируется возникновение странного члена при усреднении — так называют дополнительный потенциал, возникающий в усредненном операторе. Условие на η не является жестким в том плане, что оно не фиксирует вид этой функции, а лишь ее поведение при $\varepsilon\to+0$. Поэтому фактически мы имеем дело с задачей, описываемой двумя малыми параметрами. Основной результат работы — это схема формального построения асимптотического разложения действия резольвенты рассматриваемого оператора на функцию из пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Разложение строится по двум малым параметрам, ε и η, и является двупараметрической. Указанная схема применяется для определения первых нескольких членов асимптотики. Обсуждаются также вопросы, связанные с построением полного асимптотического разложения и возникающие на этом пути трудности.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $A_{ij}=A_{ij}(x)$, $A_j=A_j(x)$, $A_0=A_0(x)$ — некоторые функции, заданные на $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered}
A_{ij},A_j,A_0\in C^\infty(\mathbb{R}^n),\qquad \frac{\partial^\alpha A_{ij}}{\partial x^\alpha},\ \frac{\partial^\alpha A_j}{\partial x^\alpha},\ \frac{\partial^\alpha A_0}{\partial x^\alpha}\in L_\infty(\mathbb{R}^n),\qquad \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\\
A_{ji}=A_{ij},\qquad \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j}\geqslant c_0\sum_{j=1}^n|\xi_j|^2,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\quad \xi_i\in\mathbb{C},
\end{gathered}\tag{2.1}$$

где c_0 — некоторая положительная константа, не зависящая от x и ξ_i. Функции A_{ij} — вещественные, а функции A_j, A_0 — комплекснозначные.

Пусть $\omega\subset\mathbb{R}^n$ — некоторая ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей. В пространстве $\mathbb{R}^n$ устроим мелкую периодическую перфорацию следующим образом:

$$\Omega^\varepsilon:=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\theta^\varepsilon},\qquad \theta^\varepsilon:=\bigcup_{z\in\mathbb{Z}^n}(\varepsilon z+\varepsilon\eta\omega).$$

Здесь ε — малый положительный параметр, а $\eta=\eta(\varepsilon)$ — положительная функция, такая что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-2}\eta^{n-2}(\varepsilon)=a,\tag{2.2}$$

где $a\geqslant 0$ — некоторая фиксированная константа.

В перфорированной области Ω^ε определим оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ с дифференциальным выражением

$$\hat{\mathcal{H}}:=-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial}{\partial x_j}+A_0$$

и краевым условием Дирихле на $\partial\theta^\varepsilon$. Строго его определим как m-секториальный оператор в пространстве $L_2(\Omega^\varepsilon)$, в силу первой теоремы о представлении [7, Гл. VI, §2.1], соответствующий замкнутой секториальной полуторалинейной форме

$$\mathfrak{h}^\varepsilon(u,v):=\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+\sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial u}{\partial x_j},v\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+(A_0u,v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

в пространстве $L_2(\Omega^\varepsilon)$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon):=\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon)$, где $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon)$ — подпространство пространства Соболева $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$, состоящее из функций с нулевым следом на границе. С помощью стандартных теорем о повышении гладкости эллиптических краевых задач несложно проверить, что область определения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ имеет вид $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon):=W_2^2(\Omega^\varepsilon)\cap\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon)$.

Основная цель настоящей работы — построить асимптотическое разложение резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при малых ε в случае, когда она действует на достаточно гладкие функции.

Сходимость резольвент операторов типа $\mathcal{H}^\varepsilon$ исследовалась в недавней работе [11] и применение основных теорем [11] к нашему случаю дает следующий результат. Пусть $\mathcal{H}^0$ — еще один m-секториальный оператор, но уже в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ с дифференциальным выражением $\hat{\mathcal{H}}$. Его также определим через соответствующую секториальную форму с помощью первой теоремы о представлении; областью определения этого оператора является пространство $W_2^2(\mathbb{R}^n)$.

Введем матрицу

$$\mathrm{A}(x):=\begin{pmatrix}A_{11}(x) & \ldots & A_{1n}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ A_{n1}(x) & \ldots & A_{nn}(x)\end{pmatrix}.$$

Через $X=X(\zeta,x)$ обозначим решение краевой задачи

$$\begin{gathered}\operatorname{div}_\zeta\mathrm{A}(x)\nabla_\zeta X=0\quad\text{в}\quad\mathbb{R}^n\setminus\overline{\omega},\qquad X=0\quad\text{на}\quad\partial\omega,\\ X(\zeta,x)=1+K(x)|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|^{-n+2}+O\big(|\zeta|^{-n+1}\big),\quad \xi\to\infty,\end{gathered}\tag{2.3}$$

где $K=K(x)$ — некоторая функция. В статье [11] было показано, что эта функция является равномерно ограниченной и неположительной. Обозначим:

$$V_0(x):=(2-n)\operatorname{mes}_{n-1}\mathbb{S}^{n-1}\sqrt{\det\mathrm{A}(x)}K(x),$$

где $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^n$, а mes_{n-1} — мера на поверхностях в $\mathbb{R}^n$ коразмерности один. Далее в работе мы покажем, что функция V_0 бесконечно дифференцируема по $x\in\mathbb{R}^d$ и вместе со всеми своими производными принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Согласно основным результатам статьи [11], существует фиксированное число λ_0, не зависящее от $\varepsilon>0$, такое что полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda<\lambda_0$ попадает в резольвентные множества операторов $\mathcal{H}^\varepsilon$ и $\mathcal{H}^0$ и для всех $f\in L_2(\mathbb{R}^d)$ верна оценка

$$\|(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)^{-1}f-(\mathcal{H}^0+aV_0-\lambda)^{-1}f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\Omega)},\tag{2.4}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ε, η и f.

Наш основной результат звучит следующим образом.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда первые члены асимптотического разложения действия резольвенты $u_\varepsilon = (\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1} f$ имеют вид:*

$$u_\varepsilon(x) = U_{ex}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right)\big(1 - \chi_\varepsilon(x)\big) + U_{in}\left(\frac{x}{\varepsilon\eta}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right)\chi_\varepsilon(x) + O(\varepsilon\eta^{1+\frac{2}{n}}) \tag{2.5}$$

в норме $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$u_\varepsilon(x) = U_{ex}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right)\big(1 - \chi_\varepsilon(x)\big) + U_{in}\left(\frac{x}{\varepsilon\eta}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right)\chi_\varepsilon(x) + O(\varepsilon^2\eta^{1+\frac{2}{n}}) \tag{2.6}$$

в норме $L_2(\mathbb{R}^n)$, где обозначено

$$\begin{aligned}
&U_{ex}(x,\xi,\eta,\mu) := u_0(x,\mu) + \varepsilon\sum_{j=0}^{n-1}\eta^j u_{1,j}(x,\mu) + \varepsilon^2 u_{2,0}(\xi,x,\mu) + \varepsilon^2\eta u_{2,1}(\xi,x,\mu),\\
&U_{in}(\zeta,x,\varepsilon,\eta\mu) := v_{0,0}(\zeta^{(z)},x,\mu) + \varepsilon\sum_{j=0}^{n-1}\eta^j v_{1,j}(\zeta^{(z)},x,\mu)\\
&\qquad\qquad + \varepsilon^2 v_{2,0}(\zeta^{(z)},x,\mu) + \varepsilon^2\eta v_{2,1}(\zeta^{(z)},x,\mu),\\
&\chi_\varepsilon(x) := \sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\chi(|x\varepsilon^{-1} - z|\eta^{-\frac{2}{n}}), \qquad \mu := \varepsilon^{-2}\eta^{n-2},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

а $\chi = \chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|t| < 1$ и нулю при $|t| > 2$. Функция $u_0(x,\mu) := (\mathcal{H}^0 + \mu V_0 - \lambda)^{-1} f$ является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ и голоморфна по μ в норме этого пространства. Функция v_0 имеет вид $v_0(\zeta,\mu) := u_0(x,\mu)X(\zeta,x)$. Остальные функции в (2.7) определены в параграфе 3.2.

Обсудим кратко основные результаты статьи. Рассматриваемая модель — это эллиптический оператор в периодически перфорированной области, причем полости имеют критический размер. А именно, соотношение между расстоянием между отверстием и их линейным размером, описываемое равенством (2.2), приводит к возникновению странного члена — это название используется для потенциала aV_0, возникающего в усредненном операторе, см. (2.4). Для этого важного случая строится асимптотическое разложение резольвенты, а именно, первые члены такого разложения. Для возможности построения асимптотики приходится предполагать, что правая часть f, на которую действует резольвента, достаточно гладкая, а именно, является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Фактически наш основной результат — это формальная схема построения асимптотического разложения, представленная в разделе 3.2. Эта схема основана на комбинации метода многих масштабов [1] и метода согласования асимптотических разложений [6]. При этом метод многих масштабов используется для учета периодической структуры распределения отверстий и он применяется для построения внешнего разложения U_{ex}, а метод согласования дает внутреннее разложение U_{in} и используется для учета геометрии полостей и краевого условия на их границах.

В настоящей работе эта схема использована для определения первых членов асимптотики, которые представлены в теореме 2.1. Она же может быть применена и для построения полного асимптотического разложения в предположениях теоремы 2.1. Вместе с тем, вопрос об определении структуры этого разложения оказался неожиданно сложным. А именно, первая проблема связана с наличием двух малых параметров ε и η, пусть и связанных условием (2.2). Ясно, что асимптотика будет включать в себя степенные члены по ε и η и по всей видимости она будет состоять из членов вида $\varepsilon^p\eta^q$ с $q = 0, \ldots, n-1$. Другой момент связан с тем, что в процессе согласования внешнего и внутреннего разложения приходится использовать как фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$, см. (3.3), так и решения цепочки уравнений (3.4). Эта цепочка фактически означает, что фундаментальное решение используется как правая часть в уравнении Пуассона, затем решение такого уравнения вновь подставляется в правую часть нового уравнения Пуассона и т.д. Как показывают формулы (3.5), на таком в нечетных размерностях возникают только степенные функции, а вот в четных возникают и логарифмы. Именно эти логарифмы в процессе согласования при формальном построении асимптотик порождают необходимость введения в формальные асимптотики дополнительных членов вида $\varepsilon^p\eta^q \ln^k \eta$. И выяснение зависимости асимптотики от $\ln\eta$ в четных размерностях — отдельная нетривиальная задача. Один из возможных ответов — это простая полиномиальная зависимость от $\ln\eta$, то есть, когда для заданных p и q степень логарифма меняется от нулевой до некоторой конечной, зависящей от p и q. Другой вариант, по аналогии с асимптотическими конструкциями для размерности два, это асимптотики с членами вида $\varepsilon^p\eta^q u_{p,q}$, где коэффициенты $u_{p,q}$ мероморфно зависят от $\ln^{-1}\eta$. Третий аспект связан с наличием дополнительного параметра μ. Как оказалось, уже первый член внешнего разложения u_0 нетривиально зависит от μ, а именно — голоморфен по этому параметру. Поэтому в процессе построения полного разложения необходимо еще отслеживать зависимость от этого параметра μ и по всей видимости, факт голоморфной зависимости от параметра μ будет оставаться справедливым и для остальных членов полного асимптотического разложения. Ввиду сказанного выше, задача о построении полного асимптотического разложения должна отдельно рассматриваться для четных и нечетных размерностей, причем вполне может оказаться, что случай размерности $n = 2$ является выделенным и требует отдельного исследования. Отдельная трудность, в первую очередь технического характера — это отследить структуру асимптотик в нуле для функций внешнего разложения и асимптотик на бесконечности для функций внутреннего разложения. Исследование этих вопросов о полном асимптотическом разложении мы оставляем на будущие работы, а в настоящей статье, как уже было сказано выше, демонстрируем саму схему формального построения.

3. Построение асимптотики

Для заданной функции $f \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ действие на нее резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ дает функцию $u_\varepsilon(x) := (\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1} f$, которая является решением краевой задачи

$$(\mathcal{L} - \lambda)u^\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \qquad u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon. \tag{3.1}$$

В данном параграфе мы строим формальное асимптотическое разложение для решения этой задачи в условиях теоремы 2.1. При этом выбор числа λ гарантирует однозначную разрешимость этой задачи согласно результатам работы [11].

Схема построения асимптотики основана на применении комбинации метода согласования асимптотических разложений [6] и метода многих масштабов [1]. Предварительно мы докажем две важные вспомогательные леммы, которые будут использоваться в формальном построении асимптотик.

3.1. Вспомогательные леммы. Приводимые здесь вспомогательные леммы будут использоваться для исследования задач на коэффициенты формальных асимптотических разложений, которые строятся в следующих разделах. Фактически мы рассматриваем две модельные вспомогательные задачи. Первая из них ставится в ячейке $\square := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$:

$$-\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}(x)\nabla_\xi u = h \quad \text{в} \quad \square \setminus \{0\} \tag{3.2}$$

с периодическими краевыми условиями на $\partial\square$. В точке $\xi = 0$ функция h имеет особенность, которая будет описана ниже, что порождает особенность у решения задачи данной задачи.

Обозначим:

$$E_0(t) := \frac{1}{(2-n)t^{n-2}\operatorname{mes}_{n-1}\mathbb{S}^{n-1}}. \tag{3.3}$$

Через $E_j = E_j(t)$, $t \geqslant 1$, обозначим последовательность решений рекуррентной системы уравнений

$$\frac{1}{t^{n-1}}\frac{d}{dt}t^{n-1}\frac{dE_j}{dt} = E_{j-1}. \tag{3.4}$$

Эту последовательность можно отыскать явно:

$$E_j(t) = c_j t^{-n+2+2j}$$

для нечетных n и

$$\begin{aligned} &E_j(t) = c_j t^{-n+2+2j}, \quad j < \frac{n}{2}-1, \qquad E_{\frac{n}{2}-1}(t) = c_{\frac{n}{2}-1}\ln t,\\ &E_j(t) = t^{-n+2+2j}c_j(\ln t), \quad j \geqslant \frac{n}{2}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

для четных n. Здесь c_j — некоторые ненулевые константы для всех j при нечетных n и $j \leqslant \frac{n}{2}-1$ при четных n. Для $j \geqslant \frac{n}{2}$ при четных n символы c_j обозначают некоторые полиномы первой степени.

Опишем теперь гладкость функции h. Мы предполагаем, что это бесконечно дифференцируемая в $\overline{\square}\setminus\{0\}$ функция, удовлетворяющая периодическим краевым условиям вместе со всеми своими производными и имеющая в нуле асимптотическое разложение

$$h(\xi,x) = F_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi,x) + F_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi,x) + O\big(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|^{-n+M+3}\big), \qquad \xi\to 0, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &F_0(\varsigma,x) = \sum_{j=0}^{m}\mathcal{L}_p(x)E_j(|\varsigma|), \qquad \mathcal{L}_p(x) := \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{Z}_+^n\\ |\gamma|\leqslant M_j}}\alpha_{j,\gamma}(x)\frac{\partial^\gamma}{\partial\varsigma^\gamma},\\ &M := \min\{2j-M_j,\, j=0,\dots,m\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где M_j — порядки дифференциальных выражений $\mathcal{L}_p(x)$, коэффициенты $\alpha_{j,\gamma}(x)$ которых принадлежат пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, а m — некоторое заданное натуральное число; дополнительно считаем, что $M \geqslant n-2$. Функция $F_1 = F_1(\varsigma,x)$ является полиномом по ς степени не выше $2M-n+2$ с коэффициентами, зависящими от x и принадлежащими пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Асимптотику (3.6) мы считаем бесконечно дифференцируемой по ξ и x.

Функцию $h(\xi,x) - F_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi,x)$ мы рассматриваем как отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $W_2^{M-n+3}(\square)$, действующее по правилу

$$x \mapsto h(\xi,x) - F_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi,x), \tag{3.8}$$

и предполагаем, что оно попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $W_2^{M-n+3}(\square)$-значных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.1. *Задача (3.2) имеет единственное решение, бесконечно дифференцируемое по $\xi \in (\overline{\square}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^n$ с асимптотикой*

$$\begin{aligned} u(\xi,x) =& U_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi,x) + U_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi,x)\\ &+ b(x)G(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|) + O\big(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|^{M-n+5}\big), \qquad \xi\to 0,\\ U_0(\varsigma,x) :=& \sum_{j=1}^{m+1}\mathcal{L}_p(x)E_j(|\varsigma|), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $U_1 = U_1(\varsigma, x)$ — полином по ς степени не выше $M - n + 4$ с коэффициентами, зависящими от x и принадлежащими пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, и удовлетворяющий условиям

$$-\Delta_\varsigma U_1 = F_1. \tag{3.10}$$

Функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\det \mathrm{A}(x)}}\int\limits_{\square\setminus\{\xi:\,|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|<r\}} f(\xi, x)\,d\xi + \int\limits_{\{\varsigma:\,|\varsigma|=r\}} \frac{\partial U_0}{\partial|\varsigma|}(\varsigma, x)\,ds\right), \tag{3.11}$$

где предел существует и верна принадлежность $b \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Функция

$$u(\xi, x) - U_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) - b(x)E_0(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|),$$

рассматриваемая как отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $W_2^{M-2}(\square)$, действующее по правилу

$$x \mapsto u(\xi, x) - U_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) - b(x)E_0(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|) \tag{3.12}$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $W_2^{M-n+5}(\square)$-значных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$. Общее решение задачи (3.2) отличается от описанного на произвольную функцию, зависящую только от x.

Доказательство. Так как F_1 — полином по переменной ς, то полином U_1, удовлетворяющий условиям (3.10) строится элементарно. Пусть $\chi_1 = \chi_1(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|\xi| < \frac{1}{5}$ и нулю при $|\xi| > \frac{2}{5}$. Решение задачи (3.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} &u(\xi, x) = \big(\tilde{U}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x) + b(x)E_0(|\varsigma|)\big)\chi_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi) + \tilde{u}(\xi, x),\\ &\tilde{U}(\varsigma, x) := U_0(\varsigma, x) + U_1(\varsigma, x), \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $b(x)$ — некоторая функция. Так как по построению функция $U(x, \varsigma)$ бесконечно дифференцируемая по $(\xi, x) \in (\overline{\square} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$, то для функции $\tilde{u}$ возникает краевая задача

$$-\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}\nabla_\xi \tilde{u} = \tilde{h} \quad \text{в} \quad \square, \qquad \tilde{h} := h - \chi_1 F + 2\nabla_\xi\chi_1 \cdot \mathrm{A}\nabla_\xi \tilde{U} + \tilde{U}\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}\nabla_\xi \chi_1, \tag{3.14}$$

с периодическими краевыми условиями и правой частью, попадающей по меньшей в пространство $W_2^{M-n+3}(\square)$ в силу асимптотики (3.6). Условие разрешимости такой задачи выглядит стандартным образом:

$$
\begin{aligned}
0=\int\limits_{\square} \tilde{h}\,d\xi &= \lim_{r\to 0} \int\limits_{\square\setminus\{\xi\colon |\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|<r\}} \big(h+\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}\nabla_\xi \chi_1 \tilde{U} + b(x)\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}\nabla_\xi E_0\chi_1\big)\,d\xi\\
&=\lim_{r\to 0}\Bigg(\int\limits_{\square\setminus\{\xi\colon |\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|<r\}} h\,d\xi + \sqrt{\det \mathrm{A}} \int\limits_{\left\{\varsigma\colon r<|\varsigma|<\frac{2}{5}\right\}} \Delta_\varsigma \big(\tilde{U}(x,\varsigma)+b(x)E_0(|\varsigma|)\big)\,d\varsigma\Bigg)\\
&=\lim_{r\to 0}\Bigg(\int\limits_{\square\setminus\{\xi\colon |\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|<r\}} h\,d\xi - \sqrt{\det \mathrm{A}} \int\limits_{\{\varsigma\colon |\varsigma|=r\}} \frac{\partial U_0}{\partial|\varsigma|}(x,\varsigma)\,ds\Bigg)\\
&\quad - b(x)\sqrt{\det \mathrm{A}(x)}\lim_{r\to 0}\int\limits_{\{\varsigma\colon |\varsigma|=r\}} \frac{\partial G}{\partial|\varsigma|}(\varsigma)\,ds\\
&=\lim_{r\to 0}\Bigg(\int\limits_{\square\setminus\{\xi\colon |\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|<r\}} h\,d\xi + \sqrt{\det \mathrm{A}} \int\limits_{\{\varsigma\colon |\varsigma|=r\}} \frac{\partial U_0}{\partial|\varsigma|}(x,\varsigma)\,ds\Bigg) - b(x)\sqrt{\det \mathrm{A}(x)},
\end{aligned}
$$

откуда следует формула (3.11). Аналогично выводится еще одна формула для b:

$$
\begin{aligned}
0&=\int\limits_{\square}\tilde{h}\,d\xi\\
&=\int\limits_{\square}\big(h-\chi_1 F + 2\nabla_\xi\chi_1\cdot \mathrm{A}\nabla_\xi\tilde{U} + \tilde{U}\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}\nabla_\xi\chi_1\big)\,d\xi + b(x)\sqrt{\det\mathrm{A}}\int\limits_{\left\{\varsigma\colon r<|\varsigma|<\frac{2}{5}\right\}}\Delta_\varsigma E_0(|\varsigma|)\,d\varsigma\\
&=\int\limits_{\square}\big(h-\chi_1 F + 2\nabla_\xi\chi_1\cdot \mathrm{A}\nabla_\xi\tilde{U} + \tilde{U}\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}\nabla_\xi\chi_1\big)\,d\xi - b(x)\sqrt{\det\mathrm{A}(x)},
\end{aligned}
$$

откуда следует

$$
b(x)=\frac{1}{\sqrt{\det\mathrm{A}(x)}}\int\limits_{\square}\big(h-\chi_1 F + 2\nabla_\xi\chi_1\cdot \mathrm{A}\nabla_\xi\tilde{U} + \tilde{U}\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}\nabla_\xi\chi_1\big)\,d\xi.
$$

Из этой формулы, явного вида функции F_1 и предполагаемой гладкости функции h как отображения (3.8) сразу следует, что функция b попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Для функций $u\in W_2^1(\square)$ с нулевым средним по $\square$ верна очевидная оценка

$$
\frac{(\mathrm{A}(x)\nabla_\xi u,\nabla_\xi u)_{L_2(\square)}}{\|u\|^2_{L_2(\square)}}\geqslant c_0\frac{\|\nabla_\xi u\|^2_{L_2(\square)}}{\|u\|^2_{L_2(\square)}}\geqslant c_1,
$$

где c_1 — некоторая константа, не зависящая от x и u. Эта оценка гарантирует однозначную разрешимость задачи (3.14) для всех $\tilde{f}\in L_2(\square)$ с нулевым средним в подпространстве функций из $W_2^2(\square)$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям и имеющим нулевое среднее. При этом оператор, отображающий $\tilde{f}$ в указанное решение, ограничен равномерно по $x\in\mathbb{R}^n$. Стандартные теоремы о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач затем сразу гарантируют, что данный оператор ограничен равномерно по $x\in\mathbb{R}^n$ и как действующий в пространство $W_2^{M-n+5}(\square)$. Этот факт позволяет нам дифференцировать задачу (3.14) по x, получая тем самым аналогичные задачи для производных решения по x и оценивая их затем в нормах пространства $W_2^{M-n+5}(\square)$. Возвращаясь затем к функции u, немедленно получаем требуемую ее гладкость как отображения (3.12). Так как общее решение однородной задачи (3.2) (с $f=0$) постоянно по переменной ξ, то утверждение об общем решении неоднородной задачи очевидно. Лемма доказана. $\square$

Вторая модельная вспомогательная задача является внешней в области $\mathbb{R}^n\setminus\overline{\omega}$:

$$-\operatorname{div}_\zeta \mathrm{A}(x)\nabla_\zeta u = g \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n\setminus\overline{\omega}, \qquad u=0 \quad \text{на} \quad \partial\omega. \tag{3.15}$$

Здесь $g=g(\zeta,x)$ — бесконечно дифференцируемая по $(\zeta,x)\in(\mathbb{R}^n\setminus\omega)\times\mathbb{R}^n$ функция со следующей асимптотикой на бесконечности:

$$g(\zeta,x)=F_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+F_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+O(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|^{M-n+1}),$$

где функции F_0, F_1 и число M — те же, что и в (3.7), а число M здесь считаем удовлетворяющим неравенству $M\leqslant -2$. Данная асимптотика предполагается бесконечно дифференцируемой по $(\zeta,x)\in(\mathbb{R}^n\setminus\omega)\times\mathbb{R}^n$.

Для заданных чисел $k\in\mathbb{Z}$ и $p\in\mathbb{Z}_+$ через $\mathfrak{C}^{p,k}$ обозначим подпространства функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus)$, для которых конечны следующие нормы:

$$\|u\|_{\mathfrak{C}^{p,k}}:=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\\|\alpha|\leqslant p}}\sup_{\mathbb{R}^n\setminus\omega}(|\zeta|+1)^{k+p}\left|\frac{\partial^\alpha u}{\partial\zeta^\alpha}(\zeta)\right|.$$

Пусть $\chi_2=\chi_2(\zeta)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю на некотором фиксированном шаре, содержащем область ω и начало координат, и единице вне некоторого большего шара. Относительно функции g дополнительно предполагаем, что отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{C}^{p,n-M-1+p}$, действующее по правилу

$$x\mapsto g(\zeta,x)-\Big(F_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+F_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\zeta,x)\Big)\chi_2(\zeta),$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n-M-1+p}$-значных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, для всех $p\in\mathbb{Z}_+$.

Лемма 3.2. *Задача (3.15) имеет единственное решение, бесконечно дифференцируемое по $(\zeta,x)\in(\mathbb{R}^n\setminus\omega)\times\mathbb{R}^n$ с асимптотикой*

$$\begin{aligned}u(\zeta,x)=&U_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+U_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)\\&+U_2(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|)+O\big(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|^{M-n+3}\big),\qquad \xi\to 0,\end{aligned}$$

где U_0, U_1 — те же, что и в (3.9), а функция $U_2(\varsigma,x)$ имеет вид

$$U_2(\varsigma,x)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\\|\alpha|\leqslant|M|-1}}b_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial\varsigma^\alpha}E_0(|\varsigma|),\tag{3.16}$$

где b_α — некоторые функции из $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Функция

$$u(\zeta,x)-\Big(U_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+U_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+U_2(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)\Big)\chi_1(\zeta),$$

рассматриваемая как отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{C}^{p,n-M-3+p}(\mathbb{R}^n\setminus\omega)$, действующее по правилу

$$x\mapsto u(\zeta,x)-\Big(U_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+U_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+U_2(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)\Big)\chi_1(\zeta),$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n-M-3+p}(\mathbb{R}^n\setminus\omega)$-значных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, для всех $p\in\mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Решение задачи (3.15) будем искать в виде

$$u(\zeta,x)=\tilde{u}(\zeta,x)+\tilde{U}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)\chi_2(\zeta),$$

где $\tilde{U}$ – из (3.13). Тогда для функции $\tilde{u}$ получим задачу

$$-\operatorname{div}_\zeta \mathrm{A}(x)\nabla_\zeta\tilde{u}=\tilde{g}\quad\text{в}\quad \mathbb{R}^n\setminus\overline{\tilde{\omega}},\qquad \hat{u}=0\quad\text{на}\quad\partial\omega, \tag{3.17}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\zeta,x):=&g-\Big(F_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta,x)+F_1(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\zeta,x)\Big)\chi_2(\zeta)\\&+2\nabla_\zeta\chi_2(\zeta)\cdot\mathrm{A}(x)\nabla_\zeta\tilde{U}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta)+\tilde{U}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\zeta,x)\operatorname{div}_\xi\mathrm{A}\nabla_\xi\chi_1(\zeta).\end{aligned}$$

Основой дальнейшего доказательства является использование преобразования Кельвина. А именно, пусть ζ_0 — некоторая внутренняя точка множества ω. Преобразование Кельвина введем следующим образом:

$$\hat{u}(\hat{\zeta}):=|\hat{\zeta}|^{-n+2}\tilde{u}\big(\zeta_0+\hat{\zeta}|\hat{\zeta}|^{-2}\big),\qquad \hat{\zeta}:=|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)(\zeta-\zeta_0)|^{-2}\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)(\zeta-\zeta_0).$$

При такой замене область ω переходит в некоторую неограниченную область $\hat{\omega}$, зависящую от x и содержащую окрестность бесконечности, а задача (3.15) переходит в краевую задачу в ограниченной области $\mathbb{R}^n\setminus\hat{\omega}$:

$$-\Delta_{\hat{\zeta}}\hat{u}=\hat{g}\quad\text{в}\quad\mathbb{R}^n\setminus\overline{\hat{\omega}},\qquad\hat{u}=0\quad\text{на}\quad\partial\omega,\qquad \hat{g}(\hat{\zeta}):=|\hat{\zeta}|^{-n-2}\tilde{g}\big(\zeta_0+\hat{\zeta}|\hat{\zeta}|^{-2}\big). \tag{3.18}$$

Из указанных выше условий на функцию g сразу следует, что функция g бесконечно дифференцируема всюду $\mathbb{R}^n\setminus\overline{\hat{\omega}}$ за исключением начала координат, а в начале координат она имеет гладкость как минимум $C^{|M|-2+\vartheta}$ с произвольным $\vartheta>0$.

Хотя область $\tilde{\omega}$ зависит от переменной x, данная зависимость гладкая и регулярная. А именно, эта область по сути получается в результате замены переменной $\zeta\mapsto|\zeta|^{-2}\zeta$ из области, полученной из ω линейной заменой $\zeta\to\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)(\zeta-\zeta_0)$. Условия (2.1) гарантируют гладкость, равномерную положительность и ограниченность матрицы А. Поэтому кривизны границы области $\tilde{\omega}$ равномерно ограничены и зависимость данной границы от x также гладкая. В результате этой дает возможность воспроизвести доказательство стандартных оценок Шаудера для задачи (3.18), отслеживая зависимость от параметра x. В результате мы получаем равномерные оценки следующего вида:

$$\begin{aligned}&\|\hat{u}\|_{C^{|M|}(\mathbb{R}^n\setminus\hat{\omega})}\leqslant C\|\hat{g}\|_{C^{|M|-2+\vartheta}(\mathbb{R}^n\setminus\hat{\omega})}\leqslant C\|\tilde{g}\|_{\mathfrak{C}^{|M|-1,n+|M|+1}},\\&\|\hat{u}\|_{C^k(\Omega)}\leqslant C\big(\|\hat{g}\|_{C^{k+2+\vartheta}(\hat{\Omega})}+\|\hat{g}\|_{C^{\vartheta}(\mathbb{R}^n\setminus\hat{\omega})}\big)\leqslant C\Big(\|\tilde{g}\|_{C^{k+3}(\overline{\tilde{\Omega}})}+\|\tilde{g}\|_{\mathfrak{C}^{1,n+3}}\Big),\end{aligned}$$

где C — некоторые константы, не зависящие от x, $\hat{g}$ и $\tilde{g}$, а $\Omega\subset\hat{\Omega}\subset\mathbb{R}^n\setminus\hat{\omega}$ — некоторые подобласти в $\mathbb{R}^n\setminus\hat{\omega}$, замыкания которых могут содержать границу множества $\hat{\omega}$, но при этом должны быть отделены от нуля на положительное расстояние. Символ $\tilde{\Omega}$ обозначает образ области $\hat{\Omega}$ при указанном выше преобразовании Кельвина; область $\tilde{\Omega}$ ограничена.

Так как $\hat{u}$ принадлежит по меньшей мере пространству $C^{|M|}(\mathbb{R}^n\setminus\hat{\omega})$, ее асимптотика в нуле дается формулой Тейлора с остатком порядка $O(|\hat{\zeta}|^{|M|})$. При возвращении к функции $\tilde{u}$ данная асимптотика переходит в функцию U_2, заданную формулой (3.16). Учитывая этот факт и возвращаясь теперь к функции $\tilde{u}$, сразу видим, что она бесконечно дифференцируема по ξ на каждом компакте в $\mathbb{R}^n\setminus\omega$, который может содержать всю или часть границы $\partial\omega$, причем C^k-нормы функции $\tilde{u}$ на этом компакте оцениваются через норму $\|\tilde{g}\|_{\mathfrak{C}^{1,n+3}}$ и C^{k+3}-нормы функции $\tilde{g}$ на большем компакте. Это позволяет нам сколько угодно раз дифференцировать задачу (3.17) по ξ, получая аналогичные задачи для производных функции $\tilde{u}$, но уже с неоднородными краевыми условиями Дирихле. Применяя затем преобразование Кельвина и указанные выше оценки Шаудера для полученных задач, мы можем последовательно оценить $\mathfrak{C}^{p,n-M-1+p}(\mathbb{R}^n\setminus\omega)$-нормы для функции

$\tilde{u} - U_2(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x)\chi_1(\zeta)$. Указанные априорные оценки затем позволяют дифференцировать задачу (3.17) по x и получать аналогичные оценки для производных функции $\tilde{u}$ по x. Это завершает доказательство леммы. □

Замечание 3.1. *Отметим, что единственным условием на выбор полинома U_2 в условии доказанной леммы является уравнение (3.10). Это равенство фиксирует выбор данного полинома с точностью до произвольного гармонического полинома. Лемма 3.2 верна для каждого возможного выбора полинома U_2.*

3.2. Формальное построение. Формальное асимптотическое разложение решения задачи (3.1) будем строить в виде комбинации внешнего и внутреннего разложений. Внешнее разложение используется для приближения решения вне малых окрестностей полостей из множества θ^ε, внутреннее применяется в малых окрестностях этих полостей. В переходной зоне возле каждой полости эти разложения согласовываются на основе метода согласования асимптотических разложений.

Внешнее разложение будем строить, дополнительно применяя метод многих масштабов, в виде

$$u_{ex}^\varepsilon(x) = u_0(x,\mu) + \varepsilon\sum_{j=0}^{n-1}\eta^j u_{1,j}(x,\mu) + \varepsilon^2 u_{2,0}(\xi,x,\mu) + \varepsilon^2\eta u_{2,1}(\xi,x,\mu) + \ldots. \tag{3.19}$$

Переменная $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ здесь учитывает микроструктуру в виде наличия полостей, переменная x играет роль медленной. Поэтому функции $u_{k,p}$ ищем 1-периодическими по каждой из переменной ξ_j. Зависимость от медленной переменной x должна быть такова, чтобы обеспечить попадание этих функций в пространство W_2^2 и это фактически условие на поведение на бесконечности. Одновременно с этим, коэффициенты внешнего разложения будут иметь нарастающие особенности в точках $z \in \mathbb{Z}^n$, а потому мы будем искать попадающими в пространство W_2^2 на $\mathbb{R}^n$ за вычетом малых окрестностей таких точек, включающих в себя полости из θ^ε.

Подставим разложение (3.19) в задачу (3.1), учитывая наличие быстрой переменной $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ в функциях u_j, соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε и η и заменим полости θ^ε на их точки сжатия. Тогда получим уравнения:

$$-\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}(x)\nabla_\xi u_{2,0} = f_{2,0}, \quad -\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}(x)\nabla_\xi u_{2,1} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n\setminus\mathbb{Z}^n, \tag{3.20}$$

где функция $f_{2,0} = f_{2,0}(x)$ имеет вид

$$f_{2,0}(x) := \operatorname{div}_x \mathrm{A}(x)\nabla_x u_0(x) - \sum_{j=1}^n A_j(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) + (\lambda - A_0(x))u_0(x) + f(x). \tag{3.21}$$

В силу сходимости (2.4) мы можем утверждать, что должно быть выполнено равенство

$$u_0(\,\cdot\,,a) := (\mathcal{H}^0 + aV_0 - \lambda)^{-1}f.$$

С учетом предполагаемой гладкости функции f, коэффициентов A_{ij}, A_j, A_0 и V_0, согласно теоремам о повышении гладкости эллиптических краевых задач легко выводим, что $u_0(\,\cdot\,,0) \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, в силу стандартных теорем вложения, функция $u_0(\,\cdot\,,a)$ бесконечно дифференцируема и равномерно ограничена вместе со всеми своими производными на $\mathbb{R}^n$. Далее, получив уравнение для функции u_0, мы покажем, что указанная гладкость имеет место и для μ из малой окрестности точки a.

Для определения функций $u_{2,0}$ и $u_{2,1}$ необходимо дополнить уравнения (3.20) условиями, определяющими их поведение в целочисленных точках из $\mathbb{Z}^n$. Это будет сделано ниже в процессе согласования с внутренним разложением. Данное внутреннее разложение в окрестности каждой целочисленной точки $z \in \mathbb{Z}^n$ будем строить в виде

$$\begin{aligned} u_{in}^{\varepsilon}(x) =& v_{0,0}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \eta^j v_{1,j}(\zeta^{(z)}, x, \mu) \\ &+ \varepsilon^2 v_{2,0}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \varepsilon^2 \eta v_{2,1}(\zeta^{(z)}, x, \mu) + \ldots, \end{aligned} \tag{3.22}$$

где $v_{k,j}$ — некоторые функции, а $\zeta^{(z)} := (\xi - \zeta)\eta^{-1}$ — еще одна растянутая переменная. В окрестности каждой точки $z \in \mathbb{Z}^n$ перейдем к переменным $\zeta = \zeta^{(z)}$ в производных и подставим внутреннее разложение в краевую задачу (3.1). В коэффициентах уравнения и в правой части к переменным ζ переходить не будем. Тогда внешние краевые задачи для функций $v_{k,j}$:

$$-\operatorname{div}_{\zeta} \mathrm{A}(x) \nabla_{\zeta} v_{k,j} = F_{k,j} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \omega, \qquad v_k = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega, \tag{3.23}$$

где правые части $F_k = F_k(x, \zeta, \mu)$ даются формулами:

$$\begin{aligned} &F_{0,0}(\zeta, x, \mu) := 0, \qquad F_{1,j}(\zeta, x, \mu) := 0, \qquad j \neq 1, \\ &F_{2,0}(\zeta, x, \mu) := 0, \qquad F_{2,1}(\zeta, x, \mu) := 0, \\ &F_{1,1}(\zeta, x, \mu) := \mathcal{L}_1 v_{0,0}, \qquad \mathcal{L}_1 := \big(\operatorname{div}_x \mathrm{A}(x) \nabla_{\zeta} + \operatorname{div}_{\zeta} \mathrm{A}(x) \nabla_x\big) - \sum_{j=1}^{n} A_j(x) \frac{\partial}{\partial \zeta_j}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Полученные уравнения следует еще дополнить условиями поведения функций v_k на бесконечности, что будет сделано в результате согласования внешнего и внутреннего разложений.

При проведении согласования мы должны определить поведение коэффициентов внешнего разложения в окрестности точек сжатия полостей и коэффициентов внутреннего разложения на бесконечности. При этом указанное поведение будет выясняться при $\xi \to z$, $z \in \mathbb{Z}^n$ для функций внешнего разложения и при $\zeta \to \infty$ для функций внутреннего разложения. Переменная x в этих функциях будет играть роль параметра и по ней никаких асимптотических формул выписываться не будет.

С учетом сказанного выше и в силу метода согласования асимптотических разложений, для функции v_0 сразу получаем условие поведение на бесконечности:

$$v_{0,0}(\zeta, x, \mu) = u_0(x, \mu) + \ldots, \qquad \zeta \to \infty.$$

Ввиду однородного уравнения (3.23), (3.24) для этой функции, немедленно заключаем, что она имеет следующий вид:

$$v_0(\zeta, x, \mu) = u_0(x, \mu) X(\zeta, x), \tag{3.25}$$

где X — решение задачи (2.3). Свойства функции X, которые нам понадобятся в дальнейшем, описаны в следующей вспомогательной лемме.

Лемма 3.3. *Функция X бесконечно дифференцируема по $(\zeta, x) \in (\mathbb{R}^n \setminus \omega) \times \mathbb{R}^n$. Ее асимптотическое разложение при $\zeta \to \infty$ имеет вид*

$$X(\zeta, x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha| = k}} K_{\alpha}(x) \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \zeta^{\alpha}} E_0(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|), \qquad n \geqslant 3, \tag{3.26}$$

где $K_\alpha = K_\alpha(x)$ — некоторые функции, принадлежащие пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, действующее по правилу

$$x \mapsto X(\zeta, x) - \left(1 + \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial\zeta^\alpha} E_0(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|)\right) \chi_1(\zeta),$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$-значных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, для всех $p, m \in \mathbb{Z}_+$.

Утверждение этой леммы является прямым следствием леммы 3.2 и замечания 3.1: достаточно выбрать полином U_2 в виде $U_2 = 1$.

Перепишем асимптотику (3.26) функции X в переменных $\xi = \zeta\eta + z$ и подставим ее в формулу (3.25). Затем сравним внешнее и внутреннее разложения (3.19), (3.22) и в силу метода согласования асимптотических разложений сразу заключаем, что функции внешнего разложения должны иметь следующее поведение вблизи точек $z \in \mathbb{Z}^n$:

$$u_{2,0}(\xi, x, \mu) = \mu u_0(x, \mu) K_0(x) E_0\big(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)(\xi - z)|\big) + o(|\xi - z|^{-n+2}), \qquad \xi \to z, \quad (3.27)$$

$$u_{2,1}(\xi, x, \mu) = \mu u_0(x, \mu) \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=1}} K_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha} E_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)(\xi - z)) + o(|\xi - z|^{-n+1}), \quad \xi \to z. \quad (3.28)$$

Существование решения задачи (3.20) с асимптотикой (3.27) обеспечивается леммой 3.1. При этом в роли функции $b(x)$ выступает функция $\mu K_0(x)$ и равенство (3.11) следует трактовать как условие разрешимости. А именно, в данном случае функция U_0 из (3.9) отсутствует, то есть, $U_0 = 0$, а функция $f_{2,0}$ не зависит от ξ. Поэтому равенство (3.11) переписывается к виду

$$\mu\sqrt{\det \mathrm{A}} K_0 u_0 = f_{2,0},$$

что с учетом определения (3.21) дает уравнение для u_0:

$$(\mathcal{H}^0 + \mu V_0 - \lambda) u_0 = f.$$

При μ из малой окрестности a потенциал μV_0 представляет собой аналитическое возмущение потенциала aV_0, а потому резольвента $(\mathcal{H}^0 + \mu V_0 - \lambda)^{-1}$ голоморфна по μ из малой окрестности точки a и верна очевидная формула

$$u_0 = \big(\mathcal{I} + (\mu - a)(\mathcal{H}^0 + aV_0 - \lambda)^{-1} V_0\big)^{-1} (\mathcal{H}^0 + aV_0 - \lambda)^{-1} f.$$

Из этой формулы и стандартных теорем о повышении гладкости эллиптических краевых задач уже легко следует, что функция u_0 голоморфна по μ в окрестности точки в смысле нормы пространства $W_2^p(\mathbb{R}^n)$ для всех $p > 0$.

Указанный выбор функции u_0 обеспечивает разрешимость задачи (3.20), (3.27). Согласно лемме 3.1, решение $u_{2,0}$ представляется в виде

$$u_{2,0}(\xi, x, \mu) = \mu u_0(x, \mu) K_0(x) \tilde{u}_{2,0}(\xi, x),$$

где $\tilde{u}_{2,0}$ — периодическое решение задачи

$$-\operatorname{div}_\xi \mathrm{A}(x) \nabla_\xi \tilde{u}_{2,0} = \sqrt{\det \mathrm{A}} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n,$$

$$\tilde{u}_{2,0}(\xi, x, \mu) = E_0\big(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)(\xi - z)|\big) + \ldots, \quad \xi \to z.$$

Применив лемму 3.1 с произвольным достаточно большим M, мы можем уточнить асимптотику функции $\tilde{u}_{2,0}$ в нуле:

$$\tilde{u}_{2,0}(\xi, x) = E_0\big(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|\big) + \frac{\sqrt{\det \mathrm{A}(x)}}{2n} |\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|^2 + \sum_{p=0}^{\infty} U_{2,0,p}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x), \qquad \xi \to 0, \quad (3.29)$$

где $U_{2,0,p}(\varsigma, x)$ — однородные степени p гармонические полиномы с бесконечно дифференцируемыми по $x \in \mathbb{R}^d$ коэффициентами, принадлежащими пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$. При этом функция $U_{2,0,0}(\varsigma, x) = U_{2,0,0}(x)$ может быть выбрана произвольно, мы априорно считаем ее принадлежащей пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение

$$x \mapsto \tilde{u}_{2,0}(\xi, x) - E_0\big(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi|\big)$$

пространства $\mathbb{R}^n$ в $W_2^q(\square)$ является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ для любого $q > 0$.

Аналогично исследуется и разрешимость задачи (3.20), (3.28) для функции $u_{2,1}$. А именно, существует решение данной задачи вида

$$u_{2,1}(\xi, x, \mu) = \mu u_0(x, \mu)\tilde{u}_{2,1}(\xi, x, \mu),$$

где $\tilde{u}_{2,1}$ — периодическое решение уравнения (3.20) с асимптотикой в нуле

$$\tilde{u}_{2,1}(\xi, x, \mu) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\\ |\alpha|=1}} K_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}E_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi) + \sum_{p=0}^{\infty} U_{2,1,p}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi, x), \qquad \xi \to 0, \tag{3.30}$$

где $U_{2,1,p}(\varsigma, x)$ — однородные степени p гармонические полиномы с бесконечно дифференцируемыми по $x \in \mathbb{R}^d$ коэффициентами, принадлежащими пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^d)$. Функция $U_{2,1,0}(\varsigma, x) = U_{2,1,0}(x)$ может быть выбрана произвольно, мы априорно считаем ее принадлежащей пространству $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение

$$x \mapsto \tilde{u}_{2,1}(\xi, x) - \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\\ |\alpha|=1}} K_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}E_0(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\xi)$$

пространства $\mathbb{R}^n$ в $W_2^q(\square)$ является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ для любого $q > 0$.

Перепишем теперь асимптотики (3.29), (3.30) в переменных ζ и проведем согласование с внутренним разложением (3.22). Тогда получим, что коэффициенты внутреннего разложения должны обладать следующим поведением на бесконечности:

$$\begin{aligned}
v_{1,j}(\zeta, x, \mu) &= u_{1,j}(x, \mu) + \ldots,\\
v_{2,0}(\zeta, x, \mu) &= \mu K_0(x)u_0(x, \mu)U_{2,0,0}(x) + \ldots,\\
v_{2,1}(\zeta, x, \mu) &= \mu u_0(x, \mu)\big(U_{2,0,1}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_{2,1,0}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x)\big) + \ldots,
\end{aligned}$$

при $\zeta \to \infty$. Существование решений у задач (3.23) с указанными выше асимптотиками обеспечивается леммой 3.2. А именно, функции $v_{1,j}$ и $v_{2,0}$ можно найти явно:

$$v_{1,j}(\zeta, x, \mu) = u_{1,j}(x, \mu)X(\xi, x), \qquad j \neq 1, \qquad v_{2,0} = \mu K_0(x)u_0(x, \mu)U_{2,0,0}(x)X(\xi, x).$$

В случае функции $v_{1,1}$ наличие правой части в уравнении для нее не дает найти решения явно, однако применение леммы 3.2 гарантирует существование частного решения вида $u_0(x, \mu)\tilde{v}_{1,1}(\xi, x, \mu)$, где функция $\tilde{v}_{1,1}$ является решением задачи для $v_{1,1}$, но с заменой $F_{1,1}$ на $\mathcal{L}_1 X$. Функция $\tilde{v}_{1,1}$ бесконечно дифференцируема по $(\xi, x) \in (\mathbb{R}^n \setminus \omega) \times \mathbb{R}^n$ и обладает следующим поведением на бесконечности:

$$\tilde{v}_{1,1}(\zeta, x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\\ |\alpha|=k}} K_\alpha(x)\mathcal{L}_1\frac{\partial^\alpha}{\partial\zeta^\alpha}E_1(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\\ |\alpha|=k}} K_{1,1,\alpha}(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial\zeta^\alpha}E_0(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|),$$

где $K_{1,1,\alpha}$ — некоторые функции из $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, действующее по правилу

$$x \mapsto \tilde{v}_{1,1}(\zeta, x) - \chi_1(\zeta) \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_\alpha(x) \mathcal{L}_1 \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_1(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|)$$
$$- \chi_1(\zeta) \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_{1,1,\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|),$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$-значных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, для всех $p, m \in \mathbb{Z}_+$. Решение задачи (3.23), (3.24) имеет вид:

$$v_{1,1}(\zeta, x, \mu) = u_0(x, \mu)\tilde{v}_{1,1}(\zeta, x) + u_{1,1}(x, \mu) X(\zeta, x).$$

Задача для функции $v_{2,1}$ также разрешима и ее решение имеет вид $\mu u_0(x, \mu)\tilde{v}_{2,1}(\zeta, x)$, где функция $\tilde{v}_{2,1}$ решает ту же задачу, но имеет следующее асимптотическое поведение на бесконечности:

$$\tilde{v}_{2,1}(\zeta, x) = U_{2,0,1}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_{2,1,0}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_{2,1,\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|),$$

где $K_{2,1,\alpha}$ — некоторые функции из $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, действующее по правилу

$$x \mapsto \tilde{v}_{1,1}(\zeta, x) - \chi_1(\zeta) \Bigg(U_{2,0,1}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x) + U_{2,1,0}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta, x)$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|=k}} K_{2,1,\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha} E_0(|\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}(x)\zeta|) \Bigg)$$

попадает в пространство $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из $\mathfrak{C}^{p,n+m-2+p}(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$-значных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, для всех $p, m \in \mathbb{Z}_+$.

Описанная выше формальная схема позволяет построить и дальнейшие члены внешнего и внутреннего разложений. При этом для определения оставшихся пока произвольными функций $u_{1,j}$ следует провести построение членов порядка $O(\varepsilon^3)$ во внешнем разложении. Применение затем леммы 3.1 к этим функциям, а именно, равенства (3.11), позволит определить функции $u_{1,j}$. Аналогичная ситуация будет иметь место и далее — для полного определения коэффициентов при $\varepsilon^p \eta^q$ следует провести построение до $\varepsilon^{p+2}\eta^q$ и выписать затем равенство (3.11). Коэффициенты внешнего и внутреннего разложений будут бесконечно дифференцируемыми функциями по (ξ, x) и (ζ, x); дополнительно будет иметь место аналитичность по параметру μ. В нечетных размерностях внешнее и внутреннее разложение будут степенными по ε и η. В четных размерностях возникнет дополнительная зависимость от $\ln \eta$. Это связано с возникновением $\ln t$ в функциях E_j, см. (3.5). Исследование зависимости коэффициентов внешнего и внутреннего разложений от $\ln \eta$ — это отдельная задача.

3.3. Обоснование асимптотик. Строгое обоснование асимптотик и получение оценок остатков здесь проводится стандартным образом. Следует построить достаточное число следующих членов внутреннего и внешнего разложений так, чтобы они давали достаточно малую невязку при подстановке в уравнение для резольвенты. После этого вопрос об оценках остатков элементарно решается на основе имеющихся априорных оценок для резольвенты. А именно, пусть $Q_{ex}(\xi, x, \varepsilon, \mu)$ и $Q_{in}(\xi, x, \varepsilon, \mu)$ — дополнительные члены во внешнем и внутреннем разложениях. Тогда их можно построить достаточное количество так, что для функций

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon(x) &:= U_{ex}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right)\chi_\varepsilon(x) + U_{in}\left(\frac{x}{\varepsilon\eta}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right)\big(1-\chi_\varepsilon(x)\big),\\
Q_\varepsilon(x) &:= Q_{ex}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right)\chi_\varepsilon(x) + Q_{in}\left(\frac{x}{\varepsilon\eta}, x, \varepsilon, \eta, \mu\right)\big(1-\chi_\varepsilon(x)\big),
\end{aligned}$$

будет выполнено уравнение и оценки

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)(U_\varepsilon+Q_\varepsilon) = f + h_\varepsilon, && \|h_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon^2),\\
&\|Q_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon\eta^{1+\frac{2}{n}}), && \|Q_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon^2\eta^{1+\frac{2}{n}}).
\end{aligned}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\|(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)^{-1}f - U_\varepsilon - Q_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\|h_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где константа C не зависит от ε. Поэтому

$$\|(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)^{-1}f - U_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon\eta^{1+\frac{2}{n}}), \qquad \|(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)^{-1}f - U_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon^2\eta^{1+\frac{2}{n}}),$$

что и дает требуемые оценки остатков в (2.5), (2.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука. 1974.
2. Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова. *Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле* // Матем. сб. **212**:8, 33–88 (2021).
3. Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова. *Асимптотики для задач в перфорированных областях с третьим нелинейным краевым условием на границах полостей* // Матем. сб. **213**:10, 3–59 (2022).
4. В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. *Усреднение дифференциальных операторов.* М.: Физ.-мат. литература. 1993.
5. В.В. Жиков. *О спектральном методе в теории усреднения* // Труды МИАН. **250**, 95–104 (2005).
6. А.М. Ильин. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989.
7. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Наука. 1972.
8. В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов. *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.* Киев: Наукова Думка. 1974.
9. С.Е. Пастухова. *L_2-аппроксимации резольвенты эллиптического оператора в перфорированном пространстве* // Совр. матем. фунд. напр. **66**:2, 314–334 (2020).
10. C. Anné, O. Post. *Wildly perturbed manifolds: norm resolvent and spectral convergence* // J. Spectr. Theory. **11**:1, 229–279 (2021).
11. D.I. Borisov. *Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: strange term* // Preprint: arXiv:2205.09490.
12. D.I. Borisov, J. Kříž. *Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: vanishing limit* // Preprint: arXiv:2204.04829 (2022).
13. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante. *Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sec. A. Math. **146**:6, 1115–1158 (2016).

14. K. Cherednichenko, P. Dondl, and F. Rösler. *Norm-resolvent convergence in perforated domains* // Asymp. Anal. **110**:3-4, 163–184 (2018).
15. A. Khrabustovskyi, M. Plum. *Operator estimates for homogenization of the Robin Laplacian in a perforated domain* // J. Diff. Equat. **338**, 474–517 (2022).
16. A. Khrabustovskyi, O. Post. *Operator estimates for the crushed ice problem* // Asymp. Anal. **110**:3-4, 137–161 (2018).
17. J.L. Lions. *Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure* // Rocky Mountain J. Math. **10**:1, 125–140 (1980).
18. V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains.* V.I. Basel, Birkhäuser. 2000.
19. T.A. Mel'nyk. *Asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary-value problems with rapidly oscillating coefficients in a perforated cube* // J. Math. Sci. **75**:3, 1646–1671 (1995).
20. T.A. Mel'nyk, O.A. Shivak. *Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains* // Asymp. Anal. **75**:1-2, 79–92 (2011).
21. T.A. Mel'nyk, O.A. Shivak. *Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear parabolic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains* // J. Math. Sci. **177**:1, 50–70 (2011).
22. T.A. Suslina. *Spectral approach to homogenization of elliptic operators in a perforated space* // Rev. Math. Phys. **30**:08, 1840016 (2018).

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с вычислительным
центром Уфимского федерального
исследовательского центра РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Башкирский государственный
университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: BorisovDI@yandex.ru