ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 90-100.

УДК 519.837

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.М. МУХСИНОВ

Аннотация. В области теории дифференциальных игр, когда игра задается в конечномерном пространстве, фундаментальные работы выполнили академики Л.С. Понтрягин и Н.Н. Красовский. Работы Н.Н. Красовского и его учеников посвящены в основном позиционным играм. А в работах Л.С. Понтрягина и его учеников дифференциальная игра рассматривается отдельно с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего, что неизбежно связывает дифференциальную игру с двумя различными задачами. В дальнейшем актуально исследовать игры в бесконечномерных пространствах, ибо многие важные задачи об оптимальном управлении, в условиях конфликта или неопределенности, управляемые распределенными системами, движение которых описывается интегро-дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных, могут быть сформулированы и изучены как дифференциальные игры в подходящих банаховых пространствах. В данной работе в гильбертовом пространстве рассматривается задача преследования в смысле Л.С. Понтрягина для квазилинейной дифференциальной игры, когда динамика игры описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла с линейным замкнутым оператором, а на управления игроков наложены интегральные ограничения. Доказаны вспомогательная лемма и четыре теоремы о достаточных условиях разрешимости задачи преследования. В лемме показано, что соответствующая неоднородная задача Коши для рассматриваемой игры, имеет решение в смысле Дж. Хейла. В теоремах, используя конструкцию типа первого прямого метода Понтрягина и идею М.С. Никольского и Д. Зонневенда о растяжении времени $J(t)$, описаны множества начальных положений, из которых возможно завершение преследования.

Ключевые слова: задача преследования, дифференциальная игра нейтрального типа, интегральные ограничения на управления игроков, гильбертово пространство.

Mathematics Subject Classification: 91A24, 49N75

1. Введение. Постановка задачи преследования

Многие задачи из военной сферы, физики, экономики и биологии в условиях конфликта или неопределенности сводятся к дифференциальным играм. В области теории дифференциальных игр основополагающие работы выполнили академики Л.С. Понтрягин [13] и Н.Н. Красовский [6]. Работы Н.Н. Красовского и его учеников посвящены в основном позиционным дифференциальным играм. А в работах Л.С. Понтрягина принят другой подход к дифференциальным играм. В подходе Л.С. Понтрягина дифференциальная игра рассматривается отдельно с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего.

Y.M. Mukhsinov, About one differential game of neutral type with integral restrictions in Hilbert space.

Поступила 7 декабря 2021 г.

В работах [1], [3]–[10], [12]–[15], [17], [18], [20] исследованы дифференциальные игры, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями в конечномерных пространствах. В дальнейшем, актуально исследовать дифференциальные игры в бесконечномерных пространствах, когда динамика игры описывается, в частности, функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа, содержащими неизвестную функцию и ее производные в разные моменты времени, т.е., учитывается предыстория состояния системы, что позволяет более адекватно отображать динамику игры. В бесконечномерном пространстве отметим работы [11], [21] в которых динамика игры описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа.

В данной работе, в гильбертовом пространстве X, рассматривается задача преследования в смысле Л.С. Понтрягина для дифференциальной игры, описываемая уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}B_i\dot{x}\left(t-h_i\right)+Ax\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}A_ix\left(t-h_i\right)+f(u\left(t\right),v\left(t\right),t) \tag{1.1}$$

и терминальным множеством M, которое является замкнутым подпространством пространства X.

В игре (1.1) $t\geqslant 0$, $x\left(t\right)\in X$, $0<h_1<h_2<\dots<h_n=h$, операторы $A_i:X\rightarrow X$ и $B_i:X\rightarrow X$ линейны и ограниченны, а линейный замкнутый оператор $A:D\rightarrow X$, имеющий плотную в X область определения D, порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$ [2]. Далее, Y и Z — гильбертовы пространства, $U\left([0,\infty),Y\right)$ — множество всех измеримых отображений, действующих из $[0,\infty)$ в Y, $u\left(\cdot\right)\in U\left([0,\infty),Y\right)$ — управление преследования, $\vartheta\left(\cdot\right)\in U\left([0,\infty\right),Z$ — управление убегания, причем

$$\int_0^\infty \left\|u\left(s\right)\right\|^2ds\leqslant\rho^2 \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \left\|v\left(s\right)\right\|^2ds\leqslant\sigma^2. \tag{1.2}$$

Используя полугруппу $T(t)$, можно построить фундаментальное решение $\Phi\left(t\right)$, для которого справедливо равенство

$$\dot{\Phi}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}B_i\dot{\Phi}\left(t-h_i\right)+A\Phi\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}A_i\Phi\left(t-h_i\right) \tag{1.3}$$

и $\Phi\left(0\right)=I$ — единичный оператор, а $\Phi\left(t\right)=0$ при $t<0$.

Далее полагаем, что для любых допустимых отображений $u\left(\cdot\right)$, $\vartheta\left(\cdot\right)$ и начального положения $\varphi\left(\cdot\right)$ из класса непрерывных функций, отображающих$[-h,0]$ в X, задача Коши

$$\begin{cases}\dot{x}\left(t\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}B_i\dot{x}\left(t-h_i\right)+Ax\left(t\right)+\sum\limits_{i=1}^{n}A_ix\left(t-h_i\right)+f(u\left(t\right),v\left(t\right),t),\\ x\left(s\right)=\varphi\left(s\right), \quad -h\leqslant s\leqslant 0\end{cases} \tag{1.4}$$

имеет решение (см. лемму 2.1).

Для дифференциальной игры (1.1) рассмотрим следующее определение и задачу преследования в смысле Понтрягина.

Определение 1.1. *В игре* (1.1) *из начального положения* $\varphi\left(s\right)$, $-h\leqslant s\leqslant 0$, *возможно завершение преследования, если существует число* $T=T(\varphi)$ *такое, что для любого* $v\left(\cdot\right)\in U([0,\infty)\,Z)$, *в каждый момент* $t\in[0,T]$, *зная уравнение* (1.1) *и значения* $\varphi(s)$, $-h\leqslant s\leqslant 0$ *и* $v\left(\xi\right)$, $0\leqslant\xi\leqslant t$, *можно выбрать значение* $u\left(t\right)$ *таким образом, что* $u\left(\cdot\right)\in U([0,\infty),Y)$ *и* $x\left(T_1\right)\in M$ *при некотором* $T_1\in[0,T]$, *где* $x\left(\cdot\right)$ — *решение задачи* (1.1) *с начальным условием* φ, *соответствующее управлениям* $u\left(\cdot\right)$ *и* $v\left(\cdot\right)$. *Число* $T=T\left(\varphi\right)$ *называется гарантированным временем преследования.*

Задача преследования. Найти множество начальных положений, из которых в игре (1.1) возможно завершение преследования.

2. Основные результаты

Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Если начальное положение φ абсолютно непрерывно, а отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, то отображение*

$$\begin{aligned} x(t) = \left(\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i) B_i\right) \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-s-h_i)(A_i\varphi(s) \\ + B_i\dot{\varphi}(s))ds + \int_{0}^{t} \Phi(t-s) f(u(s), v(s), s)\, ds \end{aligned} \tag{2.1}$$

является решением задачи Коши (1.4)*, где интеграл понимается в смысле Бохнера* [16].

Доказательство. В начале докажем, что

$$y(t) = \int_{0}^{t} \Phi(t-s) f(u(s), v(s), s)\, ds$$

является частным решением неоднородной задачи (1.4). Действительно, в силу (1.3) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) =& f(u(t), v(t), t) + \int_{0}^{t} \dot{\Phi}(t-s) f(u(s), v(s), s)\, ds = f(u(t), v(t), t) \\ &+ \int_{0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} B_i \dot{\Phi}(t-s-h_i) + A\Phi(t-s) + \sum_{i=1}^{n} A_i \Phi(t-s-h_i) \right) f(u(s), v(s), s) ds \\ =& f(u(t), v(t), t) + \sum_{i=1}^{n} B_i \int_{0}^{t} \dot{\Phi}(t-s-h_i) f(u(s), v(s), s)\, ds \\ &+ A\int_{0}^{t} \Phi(t-s) f(u(s), v(s), s)\, ds + \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{0}^{t} \Phi(t-s-h_i) f(u(s), v(s), s)\, ds \\ =& \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{y}(t-h_i) + Ay(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i y(t-h_i) + f(u(t), v(t), t) \end{aligned}$$

ибо $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$ и

$$\begin{aligned} \dot{y}(t-h_i) =& \left(\int_{0}^{t} \Phi(t-s-h_i) f(u(s), v(s), s)\, ds \right)' \\ =& \Phi(-h_i) f(u(t), v(t), t) + \int_{0}^{t} \dot{\Phi}(t-s-h_i) f(u(s), v(s), s)\, ds \end{aligned}$$

$$= \int\limits_0^t \dot{\Phi}\left(t-s-h_i\right) f\left(u\left(s\right), v\left(s\right), s\right) ds.$$

С другой стороны, в силу [19], абсолютно непрерывное отображение

$$\tilde{x}\left(t\right) = \left(\Phi\left(t\right) - \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(t-h_i\right) B_i\right) \varphi\left(0\right) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi\left(t-s-h_i\right) \left(A_i \varphi\left(s\right) + B_i \dot{\varphi}\left(s\right)\right) ds$$

является единственным решением однородной задачи Коши (1.4). Поэтому, отображение

$$x\left(t\right) = \tilde{x}\left(t\right) + y\left(t\right) = \left(\Phi\left(t\right) - \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(t-h_i\right) B_i\right) \varphi\left(0\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \Phi\left(t-s-h_i\right) \left(A_i \varphi\left(s\right) + B_i \dot{\varphi}\left(s\right)\right) ds + \int\limits_0^t \Phi\left(t-s\right) f\left(u\left(s\right), v\left(s\right), s\right) ds$$

является решением неоднородной задачи Коши (1.4). Лемма 2.1 доказана. □

В дальнейшем, $M^{\perp}$ — ортогональное дополнение к M в X, π — оператор ортогонального проектирования из X на $M^{\perp}$. Ясно, что $x \in M$ тогда и только тогда, когда $\pi x = 0$.

В теоремах 2.1 и 2.2 предполагаем, что

$$f\left(u\left(t\right), v\left(t\right), t\right) = -Cu(t) + Dv(t),$$

где $C : Y \to X$ и $D : Z \to X$ — линейные ограниченные операторы.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция $J : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такая, что $J(0) = 0$, $J(t) \geqslant t$ при всех $t \geqslant 0$;*
2) *существует линейный оператор $L(t) : Z \to Y$, непрерывно зависящий от $t \geqslant 0$ и $\pi\Phi\left(J\left(t\right)\right) D = \pi\Phi\left(t\right) C L\left(t\right)$;*
3) *если функция $\lambda(t)$ задается равенством*

$$\lambda^2\left(t\right) = \sup\left\{ \int\limits_0^t \left\|L(s) v(J(t) - J(s)) \cdot J'(s)\right\|^2 ds : \int\limits_0^{J(t)} \left\|\vartheta\left(s\right)\right\|^2 ds \leqslant \sigma^2 \right\},$$

то числа $\tau \geqslant 0$, $T = T\left(\varphi\right)$ такие, что $J\left(T\right) = \tau + T$ и при всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство $\alpha \geqslant \lambda\left(t\right)$, где $\alpha^2 = \rho^2 - \int\limits_0^{\tau} \left\|\overline{u}\left(s\right)\right\|^2 ds$, $\overline{u}\left(\cdot\right)$ — некоторое допустимое управления преследования;

4) *начальное положение φ и число $T = T(\varphi)$ такие, что имеет место включение*

$$\left(\pi\Phi\left(\tau+T\right) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi\left(\tau+T-h_i\right) B_i\right) \varphi\left(0\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \pi\Phi\left(\tau+T-s-h_i\right)\left(A_i \varphi\left(s\right) + B_i \dot{\varphi}\left(s\right)\right) ds \tag{2.2}$$
$$\in \int\limits_0^{\tau} \pi\Phi\left(\tau+T-s\right) C \overline{u}\left(s\right) ds + \Omega\left(T\right),$$

где

$$\Omega\left(T\right)=\left\{\int\limits_0^T \pi\Phi\left(T-s\right)Cp\left(s\right)ds : \int\limits_0^T \|p(s)\|^2 ds \leqslant \left(\alpha-\lambda(T)\right)^2\right\}.$$

Тогда в игре (1.1), *из начального положения* φ, *возможно преследование за время* $\tau+T$.

Доказательство. Для доказательства теоремы для любого допустимого измеримого управления убегания $v\left(\cdot\right)$ выбираем такое допустимое измеримое управления преследования $u\left(\cdot\right)$, что для решения $x\left(\cdot\right)$ задачи Коши (1.4), соответствующего управлениям $u\left(\cdot\right)$, $v\left(\cdot\right)$, выполняется равенство $\pi x\left(\tau+T\right)=0$. В силу (2.2) существует такое интегрируемое отображение $p\left(\cdot\right)$, что имеет место равенство

$$\begin{gathered}\pi\left(\Phi\left(\tau+T\right)-\sum_{i=1}^{n}\Phi\left(\tau+T-h_i\right)B_i\right)\varphi\left(0\right)\\ +\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-h_i}^{0}\pi\Phi\left(T+\tau-s-h_i\right)\left(A_i\varphi\left(s\right)+B_i\dot{\varphi}\left(s\right)\right)ds\\ =\int\limits_0^{\tau}\pi\Phi\left(\tau+T-s\right)C\overline{u}\left(s\right)ds+\int\limits_0^{T}\pi\Phi\left(T-s\right)Cp\left(s\right)ds.\end{gathered}\tag{2.3}$$

Пусть $\vartheta\left(\cdot\right)$ — произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u\left(\cdot\right)$ выбираем по формуле:

$$u(t)=\begin{cases}\overline{u}(t), & \text{при} \quad t\in[0,\tau),\\ p(t-\tau)+L(\tau+T-t)\vartheta(J(T)-J(\tau+T-t)) & \\ \qquad\cdot J'(\tau+T-t), & \text{при} \quad t\in[\tau,\tau+T],\\ 0, & \text{при} \quad t>\tau+T.\end{cases}\tag{2.4}$$

Сперва докажем, что данное отображение $u\left(\cdot\right)$ удовлетворяет интегральному ограничению (1.2). Действительно, в силу 3), (2.4) и, используя неравенство Коши-Буняковского, имеем:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\infty}\|u(s)\|^2 ds &=\int\limits_0^{\tau}\|\overline{u}\left(s\right)\|^2 ds+\int\limits_{\tau}^{\tau+T}\|u(s)\|^2 ds+\int\limits_{\tau+T}^{\infty}\|u(s)\|^2 ds\\ &=\int\limits_0^{\tau}\|\overline{u}\left(s\right)\|^2 ds+\int\limits_0^{T}\|u\left(\tau+T-t\right)\|^2 dt\\ &=\int\limits_0^{\tau}\|\overline{u}\left(s\right)\|^2 ds+\int\limits_0^{T}\|p\left(T-t\right)+L(t)\vartheta\left(J\left(T\right)-J(t)\right)\cdot J'\left(t\right)\|^2 dt\\ &=\int\limits_0^{\tau}\|\overline{u}\left(s\right)\|^2 ds+\int\limits_0^{T}<p\left(T-t\right)+L\left(t\right)\vartheta\left(J\left(T\right)-J\left(t\right)\right)\cdot J'\left(t\right),p\left(T-t\right)\\ &\quad+L\left(t\right)\vartheta\left(J\left(T\right)-J\left(t\right)\right)\cdot J'\left(t\right)>dt\end{aligned}$$

$$= \int_0^\tau \|\overline{u}(s)\|^2 ds + \int_0^T \|p(T-t)\|^2 dt$$

$$+ 2 \cdot \int_0^T < p(T-t), L(t)\vartheta(J(T)-J(t))J'(t) > dt$$

$$+ \int_0^T \|L(t)\vartheta(J(T)-J(t)) \cdot J'(t)\|^2 dt$$

$$\leqslant \int_0^\tau \|\overline{u}(s)\|^2 ds + (\alpha - \lambda(T))^2 + 2(\alpha - \lambda(T))\lambda(T) + \lambda^2(T)$$

$$= \int_0^\tau \|\overline{u}(s)\|^2 ds + \alpha^2 = \rho^2,$$

т.е.

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leqslant \rho^2.$$

Теперь, учитывая 1), 2), (2.1), (2.3), (2.4), докажем, что $\pi x(\tau+T) = 0$. Действительно, для решения $x(\cdot)$ задачи (1.4) имеем:

$$\pi x(\tau+T) = \left(\pi\Phi(\tau+T) - \sum_{i=1}^n \pi\Phi(\tau+T-h_i)B_i\right)\varphi(0)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \pi\Phi(\tau+T-s-h_i)(A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s))ds$$

$$- \int_0^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)(Cu(s) - D\vartheta(s))ds$$

$$= \int_0^\tau \pi\Phi(\tau+T-s)C\overline{u}(s)\,ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)\,ds$$

$$- \int_0^\tau \pi\Phi(\tau+T-s)C\overline{u}(s)\,ds - \int_\tau^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)Cu(s)\,ds$$

$$+ \int_0^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)D\vartheta(s)\,ds$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)\,ds - \int_\tau^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)Cu(s)\,ds$$

$$+ \int_0^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)D\vartheta(s)\,ds$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)\,Cp(s)\,ds - \int_\tau^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)\,Cu(s)\,ds$$

$$+ \int_0^{\tau+T} \pi\Phi(t) D\vartheta(\tau+T-t)\,dt$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(T-t)\,Cp(t)\,dt - \int_0^T \pi\Phi(T-t)\,Cu(t+\tau)\,dt$$

$$+ \int_0^T \pi\Phi(J(s)) D\vartheta(J(T)-J(s))\,J'(s)\,ds$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(s)\,Cp(T-s)\,ds - \int_0^T \pi\Phi(s)\,Cu(\tau+T-s)\,ds$$

$$+ \int_0^T \pi\Phi(s) CL(s)\,\vartheta(J(T)-J(s))\,J'(s)\,ds$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(s)\,C\left(p(T-s) - u(\tau+T-s) + L(s)\,\vartheta(J(T)-J(s))\,J'(s)\right) ds$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(s)\,C(p(T-s) - p(T-s) - L(s)\,\vartheta(J(T)-J(s))\,J'(s)$$

$$+ L(s)\,\vartheta(J(T)-J(s))\,J'(s))ds = 0,$$

т.е., $x(\tau+T) \in M$. Следовательно, из начального положения $\varphi(s)$, $-h \leqslant s \leqslant 0$, возможно преследование за время $\tau+T$. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Следующая теорема является следствием теоремы 2.1, если положить $J(t) \equiv t$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *существует линейный оператор $L(t) : Z \to Y$, непрерывно зависящий от $t \geqslant 0$, такой, что $\pi\Phi(t)\,D = \pi\Phi(t)\,CL$;*
2) *если*

$$\lambda^2(t) = \sup\left\{ \int_0^t \|L(s)\,v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leqslant \sigma^2 \right\},$$

то при всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство $\rho \geqslant \lambda(t)$;

3) *начальное положение φ и число $T = T(\varphi)$ такие, что имеет место включение*

$$\left(\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^n \pi\Phi(T-h_i)\,B_i\right)\varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \pi\Phi(T-s-h_i)\left(A_i\varphi(s) + B_i\dot\varphi(s)\right) ds$$

$$\in \left\{ \int_0^T \pi\Phi(T-s)\,Cp(s)\,ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leqslant (\rho - \lambda(T))^2 \right\}.$$

Тогда в игре (1.1) *из начального положения* φ *возможно преследование за время* T.

Отметим, что в теореме 2.2, для любого допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$, соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)\vartheta(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

В теореме 2.3 предполагаем, что $f(u(t), v(t), t) = -Cu(t) + F(v(t), \mathrm{t})$, где $C: Y \to X$ — линейный ограниченный оператор, а $F(v(\cdot), \cdot)$ — такое локально интегрируемое отображение, что для любых допустимых отображений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и начального положения φ из класса абсолютно непрерывных функций, отображающих $[-h, 0]$ в X задача Коши (1.4) имеет решение вида (2.1).

Справедлива следующая

Теорема 2.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *существует линейный оператор* $L(t): Z \to Y$, *непрерывно зависящий от* $t \geqslant 0$, *такой, что* $\pi\Phi(t)F = \pi\Phi(t)CL$;
2) *если*

$$\lambda^2(t) = \sup\left\{\int\limits_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int\limits_0^t \|v(s)\|^2 ds \leqslant \sigma^2\right\},$$

то при всех $t \geqslant 0$ *имеет место неравенство* $\rho \geqslant \lambda(t)$;

3) *начальное положение* φ *и число* $T = T(\varphi)$ *такие, что имеет место включение*

$$\left(\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi(T-h_i)B_i\right)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T-s-h_i)(A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s))\,ds$$
$$\in \left\{\int\limits_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)\,ds : \int\limits_0^T \|p(s)\|^2 ds \leqslant (\rho - \lambda(T))^2\right\}.$$

Тогда в игре (1.1) *из начального положения* φ *возможно преследование за время* T.

Доказательство. В силу 3) существует такое отображение $p(\cdot)$, что выполняется равенство

$$\begin{aligned}\left(\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi(T-h_i)B_i\right)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T-s-h_i)(A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s))ds \\ = \int\limits_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)\,ds.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для любого допустимого измеримого управления убегания $\vartheta(\cdot)$ соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)\vartheta(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t > T. \end{cases} \tag{2.6}$$

Учитывая 2) и используя неравенство Коши-Буняковского, покажем, что выбранное по формуле (2.6) управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет интегральному ограничению (1.2). Действительно,

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds = \int_0^T \|u(s)\|^2 ds + \int_T^\infty \|u(s)\|^2 ds = \int_0^T \|u(s)\|^2 ds = \int_0^T \|p(s) + L(T-s)\vartheta(s)\|^2 ds$$

$$= \int_0^T < p(s) + L(T-s)\vartheta(s), p(s) + L(T-s)\vartheta(s) > ds$$

$$= \int_0^T \|p(s)\|^2 ds + 2\int_0^T < p(s), L(T-s)\vartheta(s) > ds + \int_0^T \|L(T-s)\vartheta(s)\|^2 ds$$

$$\leqslant (\rho - \lambda(T))^2 + 2\sqrt{\int_0^T \|p(s)\|^2 ds}\sqrt{\int_0^T \|L(T-s)\vartheta(s)\|^2 ds} + \lambda^2(T)$$

$$= \rho^2 - 2\rho\lambda(T) + \lambda^2(T) + 2(\rho - \lambda(T))\cdot\lambda(T) + \lambda^2(T) = \rho^2,$$

т.е. выбранное управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет ограничению (1.2).

Теперь, учитывая 1), (2.1), (2.5) и (2.6) докажем, что $\pi x(T) = 0$. Действительно, для решения $x(\cdot)$ задачи (1.4) имеем:

$$\pi x(T) = \left(\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^n \pi\Phi(T-h_i)B_i\right)\varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \pi\Phi(T-s-h_i)(A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s))ds$$

$$- \int_0^T \pi\Phi(T-s)(Cu(s) - F(v(s), s))\, ds$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)\,Cp(s)\,ds - \int_0^T \pi\Phi(T-s)\,Cu(s)\,ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)\,F(v(s), s)\,ds$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)\,Cp(T-t)\,dt - \int_0^T \pi\Phi(t)\,Cu(T-t)\,dt + \int_0^T \pi\Phi(t)\,CL(\mathrm{t})\vartheta(T-t)\,dt$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)\,C(p(T-t) - u(T-t) + L(t)\vartheta(T-t))\,dt$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)\,C(p(T-t) - p(T-t) - L(t)\vartheta(T-t) + L(t)\vartheta(T-t))\,dt = 0,$$

т.е. $\pi x(T) = 0$. А это, означает, что $x(T) \in M$. Теорема 2.3 доказана. □

Справедлива следующая

Теорема 2.4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) существуют непрерывно зависящий от $t \geqslant 0$ линейный оператор

$$L(t) : Z \to Y$$

и локально интегрируемое отображение $g : Y \to X$ *такие, что при всех* $T \geqslant 0$, $t \in [0, T]$ *имеет место равенство*

$$\pi\Phi(T-t)\, g(u(t) - L(T-t)\, v(t)) = -\pi\Phi(T-t)\, f(u(t), v(t), t);$$

2) $\rho \geqslant \lambda(t)$, $t \geqslant 0$, *где*

$$\lambda^2(t) = \sup\left\{ \int_0^t \|L(s)\, v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leqslant \sigma^2 \right\};$$

3) начальное положение φ *и число* $T = T(\varphi)$ *такие, что имеет место включение*

$$\left(\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi(T-h_i)\, B_i\right)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T-s-h_i)\,(A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s))\, ds$$
$$\in \left\{ \int_0^T \pi\Phi(T-s)\, g(p(s))\, ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leqslant (\rho - \lambda(t))^2 \right\}.$$

Тогда в игре (1.1) *из начального положения* φ, *возможно преследование за время* T.

Доказательство. В силу 3) существует такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$, что

$$\left(\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi(T-h_i)\, B_i\right)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T-s-h_i)\,(A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s))\, ds$$
$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)\, g(p(s))\, ds. \qquad (2.7)$$

Допустим, что $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле (2.6). В силу теоремы 2.3, выбранное управление удовлетворяет интегральному ограничению (1.2). Поэтому достаточно показать, что для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (1.4), соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $[0, T]$, имеет место $\pi x(T) = 0$.

Учитывая 1), (2.1) ,(2.6) и (2.7), имеем:

$$\pi x(T) = \left(\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi(T-h_i)\, B_i\right)\varphi(0)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T-s-h_i)\,(A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s))\, ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)\, ds$$
$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)\, g(\rho(s))\, ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)\, ds$$
$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)\, g(u(s) - L(T-s)\, v(s))\, ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)\, ds$$
$$= -\int_0^T \pi\Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)\, ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)\, ds = 0,$$

т.е. $\pi x\left(T\right)=0$, что эквивалентно тому, что $x\left(T\right)\in M$. Следовательно, в игре (1.1) из начального положения $\varphi\left(s\right), -h\leqslant s\leqslant 0$, возможно преследование за время T. Теорема 2.4 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Я. Азимов. *Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями* // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 2, 31–35 (1974).
2. А.В. Балакришнан. *Прикладной функциональный анализ.* М.: Наука. 1980.
3. Л.В. Барановская. *Метод разрешающих функций для одного класса задач преследования* // Восточно-Европейский журнал передовых технологий: Математика и кибернетика – прикладные аспекты. **2/4**:74, 4–8 (2015).
4. П.Б. Гусятников, М.С. Никольский. *Об оптимальности времени преследования* // Докл. АН СССР. **184**:3, 518–521 (1969).
5. Д. Зонневенд. *Об одном методе преследования* // Докл. АН СССР. **204**:6, 1296–1299 (1972).
6. Н.Н. Красовский. *Управление динамической системой*, М.: Наука. 1985.
7. А.Б. Куржанский. *Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах* // Докл. АН СССР. **192**:3, 491–494 (1970).
8. Н.Ю. Лукоянов, А.Р. Плаксин. *К теории позиционных дифференциальных игр для систем нейтрального типа* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. **25**:3, 118–128 (2019).
9. Н. Мамадалиев. *Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков* // Сиб. матем. журн. **56**:1, 129–148 (2015).
10. Е.Ф. Мищенко. *О некоторых игровых задачах преследования и уклонения от встречи* // Автоматика и телемеханика. 9, 20–24 (1972).
11. Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова. *Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний в гильбертовом пространстве* // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. **192**:1/1, 233–236 (2016).
12. М.С. Никольский. *Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями* // Дифф. уравнения. **8**:6, 964–971 (1972).
13. Л.С. Понтрягин. *Линейные дифференциальные игры преследования* // Матем. сб. **112 (154)**:3, 307–331 (1980).
14. Н. Сатимов. *К задаче преследования в линейных дифференциальных играх* // Дифф. уравнения. **9**:11, 2000–2009 (1973).
15. В.Н. Ушаков. *Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями* // Прикладная математика и механика. **36**:1, 15–23 (1972).
16. Э. Хилле, Р. Филлипс. *Функциональный анализ и полугруппы*, Москва: ИИЛ. 1962.
17. А.А. Чикрий, А.А. Белоусов. *О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. **15**:4, 290–301 (2009).
18. А.А. Чикрий, И.И. Матичин. *О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. **17**:2, 256–270 (2011).
19. R. Datko. *Linear Autonomous Neutral Differential Equations in Banach Space* // J. differential equations. **25**, 258–274 (1977).
20. N.F. Kyrychenko, L.V. Baranovskaya, A.A. Chycrij. *On the class of linear differential–defference games of pursuit* // Dopov. Akad. Nauk Ukr. 6, 24–26 (1997).
21. L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, A.A. Chikrii. *On a differential game in an abstract parabolic system* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. **203**:2, 254–269 (2016).

Едгор Мирзоевич Мухсинов,
Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
мкр. 17, дом 1, корпус 2,
735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан
E-mail: `yodgor.mukhsinov@gmail.com`