ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 74-89.

УДК 517.547.3

О ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЙ С ЭЙЛЕРОВЫМ ЧИСЛОМ

А.Б. КОСТИН, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Рассматривается классическая конструкция «второго замечательного предела». Ставится вопрос об асимптотически точном описании характера такой аппроксимации числа e. В связи с этим требуется информация о поведении коэффициентов степенного разложения функции $f(x) = e^{-1}\,(1+x)^{1/x}$, сходящегося в интервале $-1 < x < 1$. Выведено рекуррентное правило, регулирующее формирование означенных коэффициентов. Показано, что коэффициенты образуют знакочередующуюся последовательность рациональных чисел $(-1)^n\,a_n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a_0 = 1$, модули которых строго убывают. На основе формулы Фаа ди Бруно для производных сложной функции предложен комбинаторный способ вычисления чисел a_n при $n \in \mathbb{N}$. Исходная функция $f(x)$ есть сужение на вещественный луч $x > -1$ функции $f(z)$, имеющей те же тейлоровские коэффициенты и аналитической в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty,\,-1]$. Методами комплексного анализа получено интегральное представление для a_n при любом значении параметра $n \in \mathbb{N}$. Доказано, что $a_n \to 1/e$ при $n \to \infty$, и найден порядок стремления к нулю разности $a_n - 1/e$. Затронут вопрос о выборе контура в интегральной формуле Коши для вычисления тейлоровских коэффициентов $(-1)^n\,a_n$ функции $f(z)$. Посчитаны точные значения возникающих по ходу дела специальных несобственных интегралов. Результаты проведенного исследования позволяют дать серию общих двусторонних оценок уклонения $e-(1+x)^{1/x}$, согласованных с асимптотикой $f(x)$ при $x \to 0$. Обсуждаются возможности применения полученных утверждений.

Ключевые слова: число e, аналитическая функция, тейлоровские коэффициенты, формула Фаа ди Бруно, интегральное представление, асимптотическое поведение.

Mathematics Subject Classification: 30B10

1. Введение

В стандартном курсе математического анализа доказывается базовое соотношение

$$\lim_{x\to 0}\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \tag{1.1}$$

формирующее привычный облик теории пределов. Гораздо реже обсуждается скорость такого приближения (укажем на известные задачники [1, отдел первый, гл. 4, § 2, номера 170, 171], [2, номера 2.16, 2.17] и недавнюю публикацию [3]). По понятным причинам вопрос о характере аппроксимации числа e посредством (1.1) вызывает естественный интерес. В то же время, в литературе не удалось отыскать полного описания картины приближения, включающего, например, асимптотические формулы для уклонения $e-(1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$, подкрепленные качественными двусторонними оценками. Проведенное авторами небольшое исследование показало, что ситуация весьма любопытна. В заметке мы коснемся некоторых возникающих здесь задач.

A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, On Taylor coefficients of analytic function related with Euler number.

© Костин А.Б., Шерстюков В.Б. 2022.

Поступила 12 апреля 2022 г.

Формула (1.1) сохраняет свою силу при переходе к комплексным значениям переменной. В самом деле, используя стандартное обозначение для главной ветви логарифма

$$\ln\zeta = \ln|\zeta| + i\arg\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,\,-0], \quad \arg\zeta \in (-\pi,\,\pi),$$

получим, что функция

$$f(z) \equiv \exp\left\{\frac{\ln(1+z)}{z} - 1\right\}, \tag{1.2}$$

при вещественных $z = x > -1$ очевидно совпадает с функцией $e^{-1}(1+x)^{1/x}$ и выполнено предельное соотношение

$$\lim_{z\to 0} f(z) = 1. \tag{1.3}$$

Формула (1.2) с соглашением $f(0) = 1$ задает аналитическую в области $D \equiv \mathbb{C}\setminus(-\infty,\,-1]$ функцию, которая является суперпозицией целой функции

$$\exp w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \qquad w \in \mathbb{C},$$

и аналитической в области D функции

$$g(z) \equiv \frac{\ln(1+z)}{z} - 1.$$

Последняя допускает в единичном круге разложение

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, z^n, \qquad |z| < 1. \tag{1.4}$$

Функция (1.2) также аналитична в единичном круге, и поэтому

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a_n\, z^n, \qquad |z| < 1. \tag{1.5}$$

С учетом (1.3) при вещественных значениях переменной имеем

$$f(x) = e^{-1}\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n\, x^n, \qquad -1 < x < 1, \tag{1.6}$$

где $a_n \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как мы увидим ниже, все числа a_n положительны. Этим объясняется форма записи коэффициентов в (1.5), (1.6), подчеркивающая их знакочередование.

Отметим, что степенной ряд в (1.4) сходится всюду на единичной окружности, кроме точки $z = -1$. Это свойство не наследуется степенным рядом (1.5): выясняется (см. § 2), что для него множеством сходимости будет открытый круг $|z| < 1$.

Исследование тейлоровских коэффициентов функции (1.2) составляет основное содержание работы. В следующем параграфе предложен рекуррентный способ вычисления коэффициентов в (1.5) и с его помощью доказано убывание последовательности a_n. Затем, в § 3, указано явное комбинаторное представление чисел a_n, возникающее из формулы Фаа ди Бруно для производных сложной функции. Четвертый параграф посвящен обоснованию неочевидного свойства $a_n \to 1/e$ при $n \to \infty$. Для этого используется формула Коши вычисления тейлоровских коэффициентов аналитической функции со специально подобранным контуром интегрирования. Предлагаются другие варианты выбора контура, приводящие к различным интегральным представлениям чисел a_n при всех $n \in \mathbb{N}$. Возможные приложения полученных результатов обсуждаются в заключительном § 5.

2. Рекуррентная формула для коэффициентов

Начнем с вывода полезного рекуррентного соотношения для чисел a_n.

Предложение 2.1. *Коэффициенты степенного ряда* (1.5) *образуют знакочередующуюся последовательность рациональных чисел, причем*

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Согласно (1.2) имеем

$$f'(z) = f(z) \left(\frac{\ln(1+z)}{z} - 1 \right)', \qquad z \in D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]. \tag{2.2}$$

Поскольку (ввиду (1.4), (1.5)) в круге $|z| < 1$ справедливы представления

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_{n+1}\, z^n,$$

$$\left(\frac{\ln(1+z)}{z} - 1 \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{n+1}{n+2}\, z^n,$$

то связь (2.2) дает тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_{n+1}\, z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a_n\, z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{n+1}{n+2}\, z^n \right), \qquad |z| < 1.$$

Произведение записанных степенных рядов есть снова степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\, \frac{k+1}{k+2}\, (-1)^{n-k}\, a_{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n-k} \right) z^n, \qquad |z| < 1.$$

Таким образом, в единичном круге имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_{n+1}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n-k} \right) z^n,$$

откуда, с учетом (1.3), извлекается рекуррентное правило (2.1) для нахождения коэффициентов разложения (1.5). Это правило показывает, что все числа a_n являются рациональными. Предложение доказано. □

Вычисления по формуле (2.1) дают несколько первых коэффициентов

$$a_1 = \frac{1}{2}\, a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\, a_1 + \frac{2}{3}\, a_0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{11}{24},$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\, a_2 + \frac{2}{3}\, a_1 + \frac{3}{4}\, a_0 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{11}{48} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{16},$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\, a_3 + \frac{2}{3}\, a_2 + \frac{3}{4}\, a_1 + \frac{4}{5}\, a_0 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{7}{32} + \frac{11}{36} + \frac{3}{8} + \frac{4}{5} \right) = \frac{2447}{5760},$$

$$a_5 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\, a_4 + \frac{2}{3}\, a_3 + \frac{3}{4}\, a_2 + \frac{4}{5}\, a_1 + \frac{5}{6}\, a_0 \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{2447}{11520} + \frac{7}{24} + \frac{11}{32} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \right) = \frac{959}{2304}.$$

Тем самым,

$$f(z) \equiv \exp\left\{ \frac{\ln(1+z)}{z} - 1 \right\} = 1 - \frac{1}{2}\, z + \frac{11}{24}\, z^2 - \frac{7}{16}\, z^3 + \frac{2447}{5760}\, z^4 - \frac{959}{2304}\, z^5 + \ldots, \qquad |z| < 1.$$

На примере первых коэффициентов видим, что $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$, поскольку

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = \frac{1}{2} = 0,5, \qquad a_2 = \frac{11}{24} = 0,458(3), \qquad a_3 = \frac{7}{16} = 0,4375,$$
$$a_4 = \frac{2447}{5760} = 0,4248263(8), \qquad a_5 = \frac{959}{2304} = 0,41623263(8).$$

Сохранится ли при дальнейшем увеличении номера явно наблюдаемая тенденция к медленному уменьшению возникающих чисел? Ответ заключен в следующем утверждении.

Предложение 2.2. *Числа a_n, заданные рекуррентным правилом* (2.1), *образуют убывающую последовательность, т.е.*

$$d_n \equiv a_n - a_{n+1} > 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для накопления фактического материала вычислим несколько первых членов последовательности, определенной в (2.3). Получим

$$d_0 = a_0 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad d_1 = a_1 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{11}{24} = \frac{1}{24}, \quad d_2 = a_2 - a_3 = \frac{11}{24} - \frac{7}{16} = \frac{1}{48},$$
$$d_3 = a_3 - a_4 = \frac{7}{16} - \frac{2447}{5760} = \frac{73}{5760}, \qquad d_4 = a_4 - a_5 = \frac{2447}{5760} - \frac{959}{2304} = \frac{11}{1280}.$$

Начальные числа (2.3) — первые разности чисел (2.1) — положительны и убывают:

$$d_0 > d_1 > d_2 > d_3 > d_4.$$

Действительно,

$$d_0 = \frac{1}{2} = 0,5, \qquad d_1 = \frac{1}{24} = 0,041(6), \qquad d_2 = \frac{1}{48} = 0,0208(3),$$
$$d_3 = \frac{73}{5760} = 0,0126736(1), \qquad d_4 = \frac{11}{1280} = 0,00859375.$$

Выведем рекуррентный закон формирования чисел d_n. Из (2.1) при $n \in \mathbb{N}_0$ находим

$$\begin{aligned}
d_{n+1} = a_{n+1} - a_{n+2} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n-k} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n+1-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n-k} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n+1-k} - \frac{1}{n+3} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2} \left(a_{n-k} - a_{n+1-k}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n+1-k} - \frac{1}{n+3} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, d_{n-k} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k+1}{k+2}\, a_{n+1-k} - \frac{1}{n+3} \right) - \frac{1}{n+3} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2}\, d_{n-k} + \frac{1}{n+1}\, a_{n+2} - \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} d_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, d_{n-k} \right) + \frac{1}{n+1}\, a_{n+2} - \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}.
\end{aligned}$$

Учтем очевидное равенство

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n-k} = a_0 - a_{n+1} = 1 - a_{n+1}$$

и продолжим выкладку:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\left(1 - a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, d_{n-k}\right) + \frac{1}{n+1}\, a_{n+2} - \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n+1}\left(a_{n+1} - a_{n+2}\right) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, d_{n-k} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n+1}\, d_{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, d_{n-k}. \end{aligned}$$

В результате

$$\frac{n+2}{n+1}\, d_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, d_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Итак, для числовой последовательности, заданной в (2.3), получено рекуррентное правило

$$d_0 = \frac{1}{2}, \qquad d_{n+1} = \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{n+3} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+2-k}\, d_k\right), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

Например, согласно (2.4),

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\, d_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}, \\ d_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\, d_0 - \frac{1}{2}\, d_1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{48}\right) = \frac{1}{48}, \end{aligned}$$

что подтверждается предыдущими прямыми вычислениями.

Рекуррентную формулу (2.4) перепишем в эквивалентном виде

$$d_0 = \frac{1}{2}, \quad d_1 = \frac{1}{24}, \quad d_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)} - \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+2-k}\, d_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Форма записи (2.5) лучше, чем (2.4), приспособлена к доказательству свойства (2.3).

При $n = 1$ формула (2.5) дает

$$d_2 = \frac{1}{36} - \frac{1}{6}\, d_1 = \frac{1}{36} - \frac{1}{144} = \frac{1}{48},$$

что совпадает со значением, дважды вычисленным разными способами ранее. Докажем положительность разностей (2.3) индукцией по номеру $n \in \mathbb{N}_0$. При $n = 0$ и $n = 1$ имеем соответственно $d_0 = 1/2 > 0$ и $d_1 = 1/24 > 0$. Предположим, что

$$d_k > 0, \qquad k = 2, \ldots, n, \tag{2.6}$$

для какого-то $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда, как показывает (2.5), выполнена оценка

$$d_k < \frac{1}{2(k+1)(k+2)}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Действительно, (2.7) при $k = 1$ превращается в верное числовое неравенство $1/24 < 1/12$, а для последующих $k = 2, \ldots, n$ из (2.5) с учетом (2.6) имеем

$$d_k = \frac{k}{2(k+1)^2(k+2)} - \frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{k+1-m}\, d_m < \frac{k}{2(k+1)^2(k+2)} < \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

Нужно доказать, что $d_{n+1} > 0$. Применив (2.7) в (2.5), получим

$$d_{n+1} > \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)} - \frac{1}{2(n+2)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2-k)(k+1)(k+2)}. \tag{2.8}$$

Используем стандартное обозначение для гармонических чисел

$$H_m \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Разложение на простые дроби

$$\frac{1}{(n+2-k)(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+4)} \frac{1}{n+2-k} + \frac{1}{n+3} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+4} \frac{1}{k+2}$$

показывает, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2-k)(k+1)(k+2)} = \frac{2H_{n+1}}{(n+3)(n+4)} + \frac{n^2-n-8}{2(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Подставив это соотношение в (2.8), запишем оценку

$$d_{n+1} > \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)} - \frac{H_{n+1}}{(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{n^2-n-8}{4(n+2)^2(n+3)(n+4)},$$

откуда

$$4(n+2)^2(n+3)(n+4)\, d_{n+1} > n^2 + 11n + 16 - 4(n+2)H_{n+1}.$$

Положительность правой части последнего неравенства при $n \geqslant 2$ следует из оценки сверху для гармонических чисел

$$H_m < \frac{m^2+9m+6}{4(m+1)}, \qquad m \geqslant 3.$$

Проверка такой, довольно грубой оценки элементарна (например, индукцией по m).

В итоге выяснили, что предположение (2.6) влечет $d_{n+1} > 0$. Значит, выполнено (2.3). Это показывает убывание последовательности a_n при $n \in \mathbb{N}_0$. Доказательство завершено. □

Предложение 2.2 указывает на наличие у последовательности (2.1) предела

$$\lim_{n\to\infty} a_n \equiv a \geqslant 0.$$

Несколько неожиданным выглядит то обстоятельство, что этот предел отличен от нуля. Терпеливый расчет приводит к двусторонней оценке

$$0,3433 < a < 0,3985. \tag{2.9}$$

Действительно, ввиду убывания последовательности a_n, на основании имеющихся данных можем сразу записать $a < a_n < a_5 < 0,4163$, где $n > 5$. Попробуем снизить «верхнюю планку», преодолев отметку $0,4$. Благодаря свойству монотонности, доказанному в предложении 2.2, найденную верхнюю границу можно последовательно уточнять, продолжая вычисления значений a_n по формуле (2.1) для номеров $n \geqslant 6$. Так, дойдя до номера $n = 9$, обнаружим, что

$$a_9 = \frac{123377159}{309657600} < 0,3985,$$

откуда следует правое неравенство в (2.9). С другой стороны, при всех $n \in \mathbb{N}$ рекуррентное соотношение (2.5) с учетом начального условия $d_1 = 1/24$ дает

$$d_{n+1} \leqslant \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)} - \frac{1}{24(n+1)(n+2)} = \frac{11n^2+19n+6}{24(n+1)(n+2)^2(n+3)}.$$

Тем самым,

$$d_m \leqslant \frac{11m^2 - 3m - 2}{24m(m+1)^2(m+2)}, \qquad m \geqslant 2.$$

Но тогда для номеров $n \geqslant 2$ получим

$$a_{n+1} = 1 - \sum_{m=0}^{n} d_m = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \sum_{m=2}^{n} d_m\right) > \frac{11}{24} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{11m^2 - 3m - 2}{24m(m+1)^2(m+2)} = \frac{4\pi^2 - 23}{48}.$$

Сумма ряда посчитана с помощью знаменитого результата Эйлера

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

примененного после преобразования

$$\frac{11m^2 - 3m - 2}{24m(m+1)^2(m+2)} = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(m+1)^2}.$$

Найденная оценка

$$a_n > \frac{4\pi^2 - 23}{48} > 0,3433, \qquad n \geqslant 3,$$

(верная при всех $n \in \mathbb{N}_0$) демонстрирует справедливость левого неравенства в (2.9).

Как будет показано ниже, истинное значение предела a есть число $1/e = 0,3678\ldots$, попадающее, конечно, в обозначенный диапазон (2.9). На наш взгляд, вывести заявленное точное утверждение из рекуррентной формулы (2.1) проблематично. По крайней мере, инструменты комплексного анализа оказываются более эффективными при решении данной задачи. Впрочем, и приближенный результат (2.9) весьма полезен для понимания ситуации в целом. Например, из него следует расходимость степенного ряда в (1.5) на окружности $|z| = 1$, несмотря на то, что f есть композиция двух аналитических (во всей плоскости $\mathbb{C}$ и в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ соответственно) функций, степенные разложения которых заведомо сходятся в точках $z \neq -1$ указанной окружности.

В § 4 мы вернемся к вопросу о вычислении величины $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, а сейчас обсудим альтернативный способ задания последовательности a_n, носящий комбинаторный характер.

3. Формула Фаа ди Бруно

Генезис функции (1.2) подсказывает идею применить для нахождения коэффициентов разложения (1.5) один общий результат, известный как формула Фаа ди Бруно (см., например, [4, гл. 2, § 8]). Речь идет о правиле вычисления производных сложной функции. Воспользуемся следующим вариантом его записи

$$\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\,h\big(g(z)\big) = \sum \frac{1}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!}\,h^{(m_1+\,\ldots\,+m_n)}\big(g(z)\big)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{g^{(j)}(z)}{j!}\right)^{m_j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ чисел из $\mathbb{N}_0$, связанных при заданном, фиксированном значении n (порядок производной) условием

$$m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n. \quad (3.2)$$

Много интересных сведений о формуле Фаа ди Бруно можно почерпнуть из ретроспективной подборки российских публикаций [5]–[7] и обстоятельного обзора [8].

В нашем случае

$$h(w) = \exp w, \qquad g(z) = \frac{\ln(1+z)}{z} - 1, \qquad f(z) = h\big(g(z)\big), \qquad h^{(m_1+\,\ldots\,+m_n)}\big(g(z)\big) = f(z).$$

Из (1.3), (1.4) имеем

$$f(0) = 1, \qquad \frac{g^{(j)}(0)}{j!} = \frac{(-1)^j}{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Учитывая эти простые соображения, подставим в (3.1) точку $z = 0$ и получим для коэффициентов тейлоровского разложения (1.5) формулу

$$(-1)^n\, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum \frac{1}{m_1!\, m_2!\, \ldots\, m_n!} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{(-1)^j}{j+1}\right)^{m_j}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что соотношение (3.2) позволяет при любом $n \in \mathbb{N}$ записать

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{(-1)^j}{j+1}\right)^{m_j} = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)^{m_j}}.$$

Следовательно, верен такой результат.

Предложение 3.1. *Для коэффициентов из тейлоровского разложения* (1.5) *справедливо представление*

$$a_n = \sum \frac{1}{m_1!\, m_2!\, \ldots\, m_n!\; 2^{m_1}\, 3^{m_2}\, \ldots\, (n+1)^{m_n}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

с суммированием по правилу (3.2).

Протестируем формулу (3.3), выбрав номер $n = 4$. В таком случае согласно предыдущим расчетам, основанным на рекуррентной формуле (2.1), мы должны получить для a_4 значение 2447/5760. В самом деле, уравнение

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 4$$

имеет ровно пять решений (m_1, m_2, m_3, m_4) с компонентами из множества $\mathbb{N}_0$, а именно,

$$(0,\, 0,\, 0,\, 1), \qquad (1,\, 0,\, 1,\, 0), \qquad (0,\, 2,\, 0,\, 0), \qquad (2,\, 1,\, 0,\, 0), \qquad (4,\, 0,\, 0,\, 0).$$

Соответственно, сумма

$$\sum \frac{1}{m_1!\, m_2!\, m_3!\, m_4!\; 2^{m_1}\, 3^{m_2}\, 4^{m_3}\, 5^{m_4}}$$

состоит из пяти слагаемых, каждое из которых вычисляется по своему набору целочисленных компонент:

$$(0,\, 0,\, 0,\, 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{0!\,0!\,0!\,1!\; 2^0\, 3^0\, 4^0\, 5^1} = \frac{1}{5},$$

$$(1,\, 0,\, 1,\, 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{1!\,0!\,1!\,0!\; 2^1\, 3^0\, 4^1\, 5^0} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8},$$

$$(0,\, 2,\, 0,\, 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{0!\,2!\,0!\,0!\; 2^0\, 3^2\, 4^0\, 5^0} = \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{18},$$

$$(2,\, 1,\, 0,\, 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2!\,1!\,0!\,0!\; 2^2\, 3^1\, 4^0\, 5^0} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{24},$$

$$(4,\, 0,\, 0,\, 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{4!\,0!\,0!\,0!\; 2^4\, 3^0\, 4^0\, 5^0} = \frac{1}{24 \cdot 16} = \frac{1}{384}.$$

В результате

$$a_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{384} = \frac{2447}{5760},$$

что и требовалось подтвердить.

Как видим, практическое применение «явной» формулы (3.3) осложняется нетривиальным способом суммирования — по целым неотрицательным решениям диофантова уравнения (3.2) с n неизвестными и натуральным параметром n. При увеличении параметра количество таких решений растет, делая представление (3.3) труднообозримым. Безусловно, предложение 3.1 обладает своеобразной комбинаторной эстетикой, но не ясно, как извлекать из (3.3) информацию об асимптотическом поведении чисел a_n. Именно поэтому будем искать «рабочую» формулу для a_n, лишенную указанных недостатков. С этой целью используем аппарат контурного интегрирования, который часто бывает полезен в таких задачах [9, гл. I, § 1.3].

4. Интегральные представления коэффициентов

Ключевым результатом параграфа и всей работы является следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Для чисел a_n, фигурирующих в разложении* (1.5), *справедливо интегральное представление*

$$a_n = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^{\tau}}\,\tau^n\,d\tau\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Выберем числа r, R так, чтобы $0 < r < 1 < 1+r < R$. В плоскости $\mathbb{C}$ сделаем разрез по лучу $(-\infty,\,-1]$ и построим контур $\Gamma_{r,\,R}$, состоящий из следующих четырех частей, выписанных в порядке их обхода:

- окружность (против часовой стрелки) $\gamma_R:\ z = Re^{i\theta},\ \theta \in [-\pi,\,\pi]$;
- отрезок $l_{r,\,R}$ от точки $z_1 = -R$ до точки $z_2 = -(1+r)$, проходимый по верхнему берегу разреза;
- окружность (по часовой стрелке) γ_r^-, где $\gamma_r:\ z = -1 + re^{i\theta},\ \theta \in [-\pi,\,\pi]$;
- отрезок $l^-_{r,\,R}$ от точки $z_2 = -(1+r)$ до точки $z_1 = -R$, проходимый по нижнему берегу разреза.

Любой тейлоровский коэффициент разложения (1.5) выражается через контурный интеграл по формуле Коши

$$(-1)^n\,a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r,\,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и вычислим интеграл в (4.2) как сумму

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r,\,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = I_{1,\,n}(R) + I_{2,\,n}(r,\,R) + I_{3,\,n}(r) + I_{4,\,n}(r,\,R), \tag{4.3}$$

где

$$I_{1,\,n}(R) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \qquad I_{2,\,n}(r,\,R) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{r,\,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

$$I_{3,\,n}(r) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \qquad I_{4,\,n}(r,\,R) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l^-_{r,\,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Интеграл по окружности γ_R запишем в виде

$$I_{1,\,n}(R) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi R^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\,f\big(Re^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Поскольку для функции (1.2) верна оценка

$$\Big|f\big(Re^{i\theta}\big)\Big| = \left|\exp\left\{\frac{\ln(1+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}-1\right\}\right| \leqslant \exp\left\{\frac{\big|\ln(1+Re^{i\theta})\big|}{R}-1\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{\ln(1+R)+\pi}{R}-1\right\}$$

при всех $\theta\in[-\pi,\,\pi]$, то

$$\frac{1}{2\pi R^n}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, f\big(Re^{i\theta}\big)\,d\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi R^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|f\big(Re^{i\theta}\big)\Big|\,d\theta \leqslant \frac{1}{eR^n}\,e^{\pi/R}\,(1+R)^{1/R}.$$

Поэтому для произвольно заданного $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$I_{1,\,n}(R) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \to 0, \qquad R\to+\infty. \tag{4.4}$$

Переходя ко второму интегралу в сумме (4.3), заметим, что в точках $z=x$ отрезка $l_{r,\,R}$ функция $g(z)$ определена по закону

$$g(z) \equiv \frac{\ln(1+z)}{z}-1 = \frac{1}{x}\Big(\ln(-1-x)+\pi i\Big)-1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{2,\,n}(r,\,R) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{r,\,R}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi e i}\int\limits_{-R}^{-(1+r)}\frac{1}{x^{n+1}}\,(-1-x)^{1/x}\,e^{\pi i/x}\,dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi e i}\int\limits_{1/R}^{1/(1+r)}\tau^{n+1}\left(\frac{1}{\tau}-1\right)^{-\tau}e^{-\pi\tau i}\,\frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi e i}\int\limits_{1/R}^{1/(1+r)}\frac{\tau^{\,\tau+n-1}}{(1-\tau)^{\tau}}\,e^{-\pi\tau i}\,d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, при фиксированном $n\in\mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$I_{2,\,n}(r,\,R) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{r,\,R}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \;\to\; \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi e i}\int\limits_{0}^{1}\frac{\tau^{\,\tau+n-1}}{(1-\tau)^{\tau}}\,e^{-\pi\tau i}\,d\tau, \quad r\to 0+, \quad R\to+\infty. \tag{4.5}$$

Интеграл по окружности γ_r^- запишем в виде

$$I_{3,\,n}(r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^-}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f\big(-1+re^{i\theta}\big)\,re^{i\theta}}{\big(-1+re^{i\theta}\big)^{n+1}}\,d\theta.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} f\big(-1+re^{i\theta}\big)\,re^{i\theta} &= \frac{re^{i\theta}}{e}\,\exp\frac{\ln(re^{i\theta})}{-1+re^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{e}\,\exp\left\{\frac{\ln r+i\theta}{-1+re^{i\theta}}+\ln r+i\theta\right\} = \frac{1}{e}\,\exp\frac{re^{i\theta}(\ln r+i\theta)}{-1+re^{i\theta}} \end{aligned}$$

для всех $\theta\in[-\pi,\,\pi]$, то при $r\to 0+$ подынтегральное выражение

$$\frac{f\big(-1+re^{i\theta}\big)\,re^{i\theta}}{\big(-1+re^{i\theta}\big)^{n+1}}$$

стремится к $(-1)^{n+1}\,(1/e)$ равномерно по $\theta \in [-\pi,\, \pi]$. Применив известный результат относительно интеграла, зависящего от параметра (см., например, [10, гл. I, § 6]), для любого $n \in \mathbb{N}$ получим, что

$$I_{3,\,n}(r) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \;\to\; \frac{(-1)^n}{e}, \qquad r \to 0+\,. \tag{4.6}$$

Наконец, учтем, что в точках $z = x$ отрезка $l_{r,\,R}^-$ функция $g(z)$ определена по закону

$$g(z) \equiv \frac{\ln(1+z)}{z} - 1 = \frac{1}{x}\Big(\ln(-1-x) - \pi i\Big) - 1.$$

Поэтому

$$I_{4,\,n}(r,\,R) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_{r,\,R}^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = -\frac{1}{2\pi e i} \int\limits_{-R}^{-(1+r)} \frac{1}{x^{n+1}}\,(-1-x)^{1/x}\, e^{-\pi i/x}\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi e i} \int\limits_{1/R}^{1/(1+r)} \tau^{n+1} \Big(\frac{1}{\tau} - 1\Big)^{-\tau} e^{\pi\tau i}\, \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{(-1)^n}{2\pi e i} \int\limits_{1/R}^{1/(1+r)} \frac{\tau^{\,\tau+n-1}}{(1-\tau)^{\tau}}\, e^{\pi\tau i}\, d\tau.$$

Следовательно, при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$I_{4,\,n}(r,\,R) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_{r,\,R}^-} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \;\to\; \frac{(-1)^n}{2\pi e i} \int\limits_0^1 \frac{\tau^{\,\tau+n-1}}{(1-\tau)^{\tau}}\, e^{\pi\tau i}\, d\tau, \quad r \to 0+, \quad R \to +\infty. \tag{4.7}$$

Применив в (4.3) предельные соотношения (4.4)–(4.7), получим, что для произвольно заданного номера $n \in \mathbb{N}$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r,\,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

стремится к величине

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi e i} \int\limits_0^1 \frac{\tau^{\,\tau+n-1}}{(1-\tau)^{\tau}}\, e^{-\pi\tau i}\, d\tau + \frac{(-1)^n}{e} + \frac{(-1)^n}{2\pi e i} \int\limits_0^1 \frac{\tau^{\,\tau+n-1}}{(1-\tau)^{\tau}}\, e^{\pi\tau i}\, d\tau,$$

очевидно равной

$$\frac{(-1)^n}{e} \left(1 + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^{\tau}}\, \tau^n\, d\tau\right),$$

если $r \to 0+$ и $R \to +\infty$. Осуществив указанный предельный переход в (4.2), убедимся в справедливости формулы (4.1). Предложение доказано. □

Взяв точные значения для первых четырех чисел a_n, начиная с a_1 (см. § 2), получим из (4.1) серию «изысканных» равенств

$$\int\limits_0^1 \frac{\tau^{\tau}}{(1-\tau)^{\tau}} \sin(\pi\tau)\, d\tau = \frac{\pi(e-2)}{2}, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\tau^{\,1+\tau}}{(1-\tau)^{\tau}} \sin(\pi\tau)\, d\tau = \frac{\pi(11e-24)}{24},$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\tau^{\,2+\tau}}{(1-\tau)^{\tau}} \sin(\pi\tau)\, d\tau = \frac{\pi(7e-16)}{16}, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\tau^{\,3+\tau}}{(1-\tau)^{\tau}} \sin(\pi\tau)\, d\tau = \frac{\pi(2447e-5760)}{5760},$$

которую при необходимости можно продолжить. Но основное предназначение предложения 4.1 в другом: теперь уже несложно получить общее представление об асимптотическом поведении тейлоровских коэффициентов функции (1.2).

Предложение 4.2. *Справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{\pi(n+1)}\right) < a_n < \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n+1}\right), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4.8}$$

влекущая порядковое соотношение

$$a_n-\frac{1}{e}\asymp\frac{1}{n}, \qquad n\to\infty. \tag{4.9}$$

Доказательство. Запишем интегральное представление (4.1) в компактной форме

$$a_n=\frac{1}{e}\left(1+\int\limits_0^1\varphi(\tau)\,\tau^n\,d\tau\right), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4.10}$$

где

$$\varphi(\tau)\equiv\frac{\sin(\pi\tau)}{\pi}\,\frac{1}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^{\tau}}, \qquad \tau\in(0,\,1). \tag{4.11}$$

Функция (4.11) при естественном соглашении

$$\varphi(0)\equiv\lim_{\tau\to0+}\varphi(\tau)=1, \quad \varphi(1)\equiv\lim_{\tau\to1-0}\varphi(\tau)=1$$

непрерывна на $[0,\,1]$ и обладает свойствами:

1) $\varphi(\tau)=\varphi(1-\tau), \quad \tau\in[0,\,1]$,
2) $\varphi(\tau)$ убывает на $[0,\,1/2]$ и возрастает на $[1/2,\,1]$,
3) $\min\limits_{0\leqslant\tau\leqslant1}\varphi(\tau)=\varphi(1/2)=2/\pi, \quad \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant1}\varphi(\tau)=\varphi(0)=\varphi(1)=1.$

Первое свойство очевидно, третье вытекает из второго. Поэтому достаточно проверить убывание функции $\varphi(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant1/2$. Это делается стандартными средствами анализа на основе соотношений

$$\begin{aligned}
&\eta(\tau)\equiv\ln\varphi(\tau)=\ln\sin(\pi\tau)-\ln\pi-(1-\tau)\ln\tau-\tau\ln(1-\tau), && \tau\in(0,\,1/2], \quad \eta(0)=0,\\
&\eta'(\tau)=\pi\operatorname{ctg}(\pi\tau)+\ln\tau-\frac{1-\tau}{\tau}-\ln(1-\tau)+\frac{\tau}{1-\tau}, && \tau\in(0,\,1/2], \quad \eta'(0+)=-\infty,\\
&\eta''(\tau)=-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)}+\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{1-\tau}+\frac{1}{(1-\tau)^2}, && \tau\in(0,\,1/2], \quad \eta''(0+)=+\infty.
\end{aligned}$$

Точнее говоря, с помощью оценки

$$\sin s > s-\frac{s^3}{6}, \qquad s>0,$$

доказывается неравенство $\eta''(\tau)>0$ при всех $\tau\in(0,\,1/2]$, влекущее возрастание η' на промежутке $(0,\,1/2]$ от $\eta'(0+)=-\infty$ до $\eta'(1/2)=0$, а значит — убывание η на $[0,\,1/2]$ от $\eta(0)=0$ до $\eta(1/2)=-\ln(\pi/2)$.

В результате для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем двустороннюю оценку

$$\frac{2}{\pi(n+1)}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\tau^n\,d\tau<\int\limits_0^1\varphi(\tau)\,\tau^n\,d\tau<\int\limits_0^1\tau^n\,d\tau=\frac{1}{n+1}.$$

Применив ее в (4.10), получим (4.8), (4.9). Предложение доказано. □

Качество общей оценки (4.8) проиллюстрируем численным расчетом. Последовательно подставим в (4.8) значения $n = 1,\, 2,\, 3,\, 4$ и запишем

$$0,4849\,\ldots = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{\pi}\right) < a_1 = \frac{1}{2} < \frac{3}{2e} = 0,5518\,\ldots,$$
$$0,4459\,\ldots = \frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{3\pi}\right) < a_2 = \frac{11}{24} = 0,458(3) < \frac{4}{3e} = 0,4905\,\ldots,$$
$$0,4264\,\ldots = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{2\pi}\right) < a_3 = \frac{7}{16} = 0,4375 < \frac{5}{4e} = 0,4598\,\ldots,$$
$$0,4147\,\ldots = \frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{5\pi}\right) < a_4 = \frac{2447}{5760} = 0,4248263(8) < \frac{6}{5e} = 0,4414\,\ldots,$$

с неплохим приближением, особенно снизу.

Отметим также, что из (4.10), (4.11) легко извлекается рекуррентная связь

$$a_{n+1} = a_n - \int\limits_0^1 \psi(\tau)\,\tau^n\,d\tau, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4.12}$$

где положительная функция ψ определена по формуле

$$\psi(\tau) \equiv \frac{1-\tau}{e}\,\varphi(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi e}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^{1-\tau}, \qquad \tau\in(0,\,1). \tag{4.13}$$

Тем самым, найден другой способ для обоснования предложения 2.2.

Укажем еще, что выбор контура в доказательстве предложения 4.1 представляется в определенном смысле оптимальным, хотя изначально имеется большой экспериментальный запас. Опуская подробности, приведем для сравнения результат, возникающий в случае, когда при подходящем сочетании параметров r, R контур $\widetilde{\Gamma}_{r,\,R}$ в области D составляется из следующих четырех частей:

– дуга окружности (против часовой стрелки)
$$\widetilde{\gamma}_R:\ z = Re^{i\theta}, \quad \theta\in\big[-\pi+\arccos(1/R),\,\pi-\arccos(1/R)\big]\,;$$
– вертикальный отрезок от точки $-1+i\sqrt{R^2-1}$ до точки $-1+ir$;
– полуокружность (по часовой стрелке) $\widetilde{\gamma}_r^-$, где $\widetilde{\gamma}_r:\ z=-1+re^{i\theta},\ \theta\in[-\pi/2,\,\pi/2]$;
– вертикальный отрезок от точки $-1-ir$ до точки $-1-i\sqrt{R^2-1}$.

Такой подход выглядит перспективным, но это иллюзия: формула

$$(-1)^n\,a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_{r,\,R}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4.14}$$

после соответствующих преобразований контурного интеграла, венчающихся предельным переходом $r\to 0+$, $R\to+\infty$, приводится к виду

$$a_n = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{(1-ix)^{n+1}}\,\exp\frac{\ln(ix)}{ix-1}\right\}dx\right), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4.15}$$

со сходящимся несобственным интегралом. Подынтегральная функция в (4.15) записывается выражением

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,\exp\left(\frac{\frac{\pi}{2}x-\ln x}{1+x^2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+x\ln x}{1+x^2}-(n+1)\,\mathrm{arctg}\,x\right).$$

Вряд ли простой анализ позволит вывести отсюда предложение 4.2. Сравнение (4.15) с (4.1) весьма показательно. Однако, в качестве своеобразной компенсации получаем возможность точного вычисления для счетного набора экзотических несобственных интегралов наподобие

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \exp\left(\frac{\frac{\pi}{2}x - \ln x}{1+x^2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x\ln x}{1+x^2} - 2\operatorname{arctg} x\right) dx = \frac{\pi(e-1)}{2},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, \exp\left(\frac{\frac{\pi}{2}x - \ln x}{1+x^2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x\ln x}{1+x^2} - 3\operatorname{arctg} x\right) dx = \frac{\pi(11e-12)}{24}.$$

Завершая параграф, предлагаем при малых r и больших R выбрать в интегральной формуле Коши (4.14) вместо $\widetilde{\Gamma}_{r,R}$ модифицированный контур, составленный так:

– дуга окружности (против часовой стрелки)

$$\gamma_{r,R}:\ z = Re^{i\theta}, \quad \theta \in \Big[-\pi + \arccos\big((1+r)/R\big),\, \pi - \arccos\big((1+r)/R\big)\Big]\,;$$

– вертикальный отрезок от точки $-(1+r) + i\sqrt{R^2-(1+r)^2}$ до точки $-(1+r)$;
– окружность (по часовой стрелке) γ_r^-, где $\gamma_r:\ z = -1 + re^{i\theta}, \quad \theta \in [-\pi,\, \pi]\,;$
– вертикальный отрезок от точки $-(1+r)$ до точки $-(1+r) - i\sqrt{R^2-(1+r)^2}$.

Было бы любопытно затем повторить mutatis mutandis схему доказательства предложения 4.1 и сравнить возникающее на этом пути интегральное представление для чисел a_n с формулой (4.15).

5. Заключительные замечания

Полученные результаты находят применение в исходной задаче об асимптотическом поведении уклонения $e - (1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$. Действительно, на основе степенного разложения

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}\,x + \frac{11e}{24}\,x^2 - \frac{7e}{16}\,x^3 + \ldots = e\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a_n\, x^n, \qquad -1 < x < 1,$$

эквивалентного (1.6), и известного свойства рядов типа Лейбница (учтено предложение 2.2) имеем серию двусторонних оценок

$$e\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1}\, a_n\, x^n < e - (1+x)^{\frac{1}{x}} < e\sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^{n-1}\, a_n\, x^n, \tag{5.1}$$

действующих для всех $x \in (0,\, 1)$ при любом $N \in \mathbb{N}$. Например, выбрав $x = 1/m$ и первое значение $N = 1$, из (5.1) получим, что

$$e\left(\frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2}\right) < e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e\left(\frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} + \frac{7}{16m^3}\right)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Отдельно проверяется, что и при $m = 1$ выписанное неравенство верно. Следовательно,

$$\frac{12m-11}{24m^2}\, e \,<\, e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{24m^2 - 22m + 21}{48m^3}\, e, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Положив в (5.1) $x = 1/m$ и увеличивая значение параметра N, можно сформировать сколь угодно большой запас двойных неравенств, последовательно уточняющих (5.2).

Сравним (5.2) с известной двусторонней оценкой

$$\frac{e}{2m+2} < e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{e}{2m+1}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{5.3}$$

взятой из [1, отдел первый, гл. 4, § 2, номер 170]. В силу очевидных неравенств

$$\frac{12m-11}{24m^2} > \frac{1}{2m+2}, \qquad m \geqslant 12,$$
$$\frac{24m^2-22m+21}{48m^3} < \frac{1}{2m+1}, \qquad m \geqslant 2,$$

новая оценка (5.2) лучше классической оценки (5.3) при $m \geqslant 12$, причем оценка сверху в (5.2) лучше оценки сверху в (5.3) для всех натуральных значений переменной, начиная с $m = 2$. Более того, (5.2) подкрепляет асимптотическую формулу

$$e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \frac{e}{2m} - \frac{11e}{24m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad m \to \infty,$$

в то время как (5.3) дает только более слабый результат

$$e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^n = \frac{e}{2m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \qquad m \to \infty.$$

В недавней заметке [3] указано справедливое для всех $m \in \mathbb{N}$ неравенство

$$e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{2m+1}\right) < \frac{1}{2(2m+1)^2}.$$

Перепишем его в форме

$$e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{2e(2m+1)+1}{4(2m+1)(m+1)}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Нетрудно проверить, что оценка (5.4) сильнее оценки сверху в (5.3) при любом $m \in \mathbb{N}$, но слабее оценки сверху в (5.2) при $m \geqslant 11$. Мы не будем продолжать разбор подобных примеров, демонстрирующих эффективность результата (5.1).

Разумеется, справедливо общее асимптотическое разложение

$$e - (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \sum_{n=1}^{p} (-1)^{n-1} a_n x^n + O\left(x^{p+1}\right), \qquad x \to 0+, \quad p \in \mathbb{N},$$

для вычисления коэффициентов которого можно использовать на выбор как рекуррентное правило (2.1), так и представления (3.3), (4.1). Кстати, порядковое соотношение (4.9) было бы полезно конкретизировать, указав точный закон стремления к нулю величины

$$\alpha_n \equiv a_n - 1/e = \frac{1}{\pi e} \int_0^1 \frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^\tau} \tau^n \, d\tau, \qquad n \to \infty.$$

Определенный интерес представляет также задача об асимптотическом поведении первых разностей (2.3), которые, согласно (4.12), могут быть записаны как моменты

$$d_n = \int_0^1 \psi(\tau) \, \tau^n \, d\tau, \qquad n \in \mathbb{N},$$

положительной на (0, 1) функции (4.13).

Есть основания полагать, что свойство обертывания (5.1) распространяется с интервала $x \in (0,\,1)$ на луч $x > 0$. Простейшим аргументом в пользу такой гипотезы выступает тот факт, что двойное неравенство

$$e - \frac{e}{2}\,x < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e$$

выполнено при всех $x > 0$. Вопрос важен еще и в связи с неожиданными аппроксимационными эффектами, обсуждаемыми в [11], [12].

Благодарности

Выражаем благодарность С.Р. Насырову за интерес к нашему сообщению на Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, август 2021 г.), что послужило одним из стимулов для написания данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Полиа, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций.* М.: Наука. 1978.
2. Б.М. Макаров, М.Г. Голузина, А.А. Лодкин, А.Н. Подкорытов. *Избранные задачи по вещественному анализу.* М.: Наука. 1992.
3. В.М. Федосеев. *Способы вычисления числа «е». Тема учебного исследования* // Матем. обр. **2**:98, 50–53 (2021).
4. Дж. Риордан. *Введение в комбинаторный анализ.* М.: Иностр. лит. 1963.
5. А.П. Поляков. *О выраженiи производной любого порядка функцiи отъ функцiи* // Матем. сб. **5**:2, 180–202 (1909).
6. В.А. Кудрявцев. *Общая формула для производной n-го порядка степени некоторой функции* // Матем. сб. **1**, 24–27 (1934).
7. С.В. Дворянинов, М.И. Сильванович. *О формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции* // Матем. обр. **1**:49, 22–26 (2009).
8. W.P. Johnson. *The curious history of Faà di Bruno's formula* // Amer. Math. Monthly. **109**, 217–234 (2002).
9. М.А. Евграфов. *Асимптотические оценки и целые функции.* М.: Наука. 1979.
10. М.А. Евграфов. *Аналитические функции.* М.: Наука. 1968.
11. А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович. *Об аппроксимации числа* π^2 // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск. **22**, 261–264 (2021).
12. A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, D.G. Tsvetkovich. *Enveloping of Riemann's zeta function values and curious approximation* // Lobachevskii Math. J. **43**:3, 1376–1381 (2022).

Андрей Борисович Костин,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, 31,
115409, г. Москва, Россия
E-mail: abkostin@yandex.ru

Владимир Борисович Шерстюков,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com