ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 63-73.

УДК 512.5

О C^1-СХОДИМОСТИ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА

А.А. КЛЯЧИН

Аннотация. В настоящей работе для вариационного уравнения 4-го порядка рассматривается краевая задача в многоугольной области. Предполагается, что данная область разбита на конечное число треугольников, образующих ее триангуляцию. Вводится класс кусочно-полиномиальных функций заданной степени и для рассматриваемого уравнения определяется понятие кусочно-полиномиального решения на треугольной сетке. Доказана теорема существования и единственности такого решения. Кроме того, установлено, что при определенных условиях на триангуляцию области вторые производные кусочно-полиномиальных решений оцениваются постоянной, независящей от мелкости разбиения. Данное обстоятельство позволило доказать C^1-сходимость кусочно-полиномиальных решений уравнения при стремлении к нулю мелкости разбиения сетки.

Ключевые слова: бигармонические функции, треугольная сетка, кусочно-полиномиальные функции, погрешность вычисления.

Mathematics Subject Classification: 35A15, 65N12

1. Введение

Мы рассматриваем функционал вида

$$I(f) = \int\limits_{\Omega} G(x, f, \nabla f, D^2 f)dx, \quad D^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}, \tag{1.1}$$

который определен для функций $f \in C^2(\overline{\Omega})$ и функция G имеет вид

$$G = G(x, u, \xi_1, ..., \xi_n, \eta_{11}, \eta_{12}, ..., \eta_{nn}).$$

Будем предполагать, что функция $G(x, u, \xi, \eta)$ имеет все непрерывные частные производные до третьего порядка включительно по всем своим переменным.

Для функционала $I(f)$ можно записать соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа вариационной задачи

$$\begin{aligned} Q[f] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \Big(G'_{\eta_{ij}}(x, f, \nabla f, D^2 f)\Big)''_{x_i x_j} \\ - \sum_{i=1}^{n} \big(G'_{\xi_i}(x, f, \nabla f, D^2 f)\big)'_{x_i} + G'_u(x, f, \nabla f, D^2 f) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

A.A. Klyachin, On C^1-convergence of piecewise polynomial solutions to a fourth order variational equation.

Поступила 18 мая 2022 г.

Отметим, что частным случаем уравнения (1.2) является бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} = 0,$$

которому соответствуют функции $G = \eta_{11}^2 + 2\eta_{12}^2 + \eta_{22}^2$ и $G = (\eta_{11} + \eta_{22})^2$. В качестве еще одного примера приведем функционал полной свободной энергии деформированной пластинки (см. [1, гл. II]), играющий важную роль в теории упругости,

$$\iint\limits_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \right\} dxdy.$$

Численному решению уравнений 4-го порядка, в том числе и бигармоническому уравнению, посвящено огромное количество работ как в отечественных, так и в зарубежных журналах. Например, в работе [2], при решении краевой задачи для вариационного нелинейного неравенства с бигармоническим оператором, используется метод Ньютона-Канторовича, на каждом шаге которого решается линейная задача разностным методом. В работе [3] устанавливается неулучшаемая оценка погрешности вычисления собственных значений дискретной задачи для бигармонического оператора в прямоугольной области. Автором показывается, что данная погрешность имеет второй порядок точности, причем, удается вычислить ее главную часть как бесконечно малой величины. Отметим также работу [4], в которой автор устанавливает оценку сходимости приближенных решений по сеточной норме W_2^2 через шаг сетки $h \to 0$. Заметим, что как и в предыдущей статье результаты получены в прямоугольной области. Интересно упомянуть статью [5], в которой выводятся интегральные представления для точных решений первой краевой задачи для некоторого семейства эллиптических уравнений, в которое входит и бигармоническое уравнение. Приведем также статью [6], где показано существование и единственность решения одной задачи типа Робена для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре. Для прямоугольной области автору работы [7] удалось свести задачу Неймана для некоторого класса линейных уравнений 4-го порядка к интегральным уравнениям Фредгольма и доказать их разрешимость при определенных условиях на коэффициенты уравнения. В работе [8] рассматривается эллиптическое уравнение четвертого порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях. Его решение строится на итерационной факторизации оператора, энергетически эквивалентного оператору решаемой задачи, дискретизация исходной задачи производится по методу конечных элементов. Достаточно полно исследована проблема сходимости приближенных решений, полученных методом конечных элементов, в статье [9]. Автор доказывает однозначную разрешимость соответствующих вариационных задач и сходимость построенных вариационным методом решений в пространстве W_p^1. В следующей работе [10] разработан новый вариант метода коллокации и наименьших квадратов (КНК) для численного решения неоднородного бигармонического уравнения. Идея основана на проектировании исходной задачи в пространство полиномов четвертой и восьмой степеней. Отметим, что метод дает весьма хорошие результаты даже для небольшого количества точек сетки. Однако, в случае нелинейных уравнений требует переработки. Приближенному решению бигармонического уравнения посвящена и работа [11]. В ней авторы представляют результаты расчетов с помощью некоторой разностной схемы с достаточно хорошей степенью точности. Причем так же как и в предыдущей статье, область, в которой ищется решение, имеет общий вид. Так же стоит отметить, что в этой работе идет сравнительный анализ с результатами еще одной работы [12], отмечая при этом лучшие и худшие показатели своего метода. В работе [13] определяется уклонение кусочно-кубического почти-решения бигармонического уравнения и выводится общая формула его вычисления. На основе данного понятия авторами этой статьи получена аппроксимация данного уравнения. Проведен ряд численных расчетов с целью экспериментального подтверждения полученной формулы.

В настоящей работе мы получаем условия, в том числе на треугольную расчетную сетку, которые гарантировали бы равномерную ограниченность, как минимум, вторых производных приближенных решений в ячейках сетки при стремлении к нулю размеров этих ячеек. Используя данный факт, нам удается доказать C^1-сходимость кусочно-полиномиальных решений к точному решению соответствующей краевой задачи.

2. Кусочно-полиномиальные решения

Пусть задана многоугольная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим произвольное разбиение этого многоугольника на невырожденные треугольники T_1, T_2, ..., T_N и пусть M_1, M_2, ..., M_p – все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что этот набор треугольников образует триангуляцию области Ω. Через Γ_l обозначим стороны всех треугольников, $l = 1, 2, ..., L$, а максимальный диаметр всех треугольников обозначим через h, т.е. $h = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N} \mathrm{diam} T_k$.

Далее, будем через $\alpha > 0$ обозначать минимум углов во всех треугольниках T_k. Сформулируем еще одно условие на треугольную сетку. Предположим, что найдется постоянная $C_1 > 0$, независящая от h и такая, что

$$h \cdot \sum_{\Gamma_l} |\Gamma_l| \leqslant C_1, \tag{2.1}$$

где сумма берется по всем внутренним сторонам Γ_l треугольников триангуляции. Это условие сформулировано в работе [14] и дает нужную степень погрешности вычисления интеграла $I(f)$ при замене f на кусочно-полиномиальную функцию.

Зафиксируем произвольное натуральное число m. В области Ω будем рассматривать функцию $f(x_1, x_2)$, у которой все производные порядка $4m+2$ ограничены некоторой постоянной M. Для каждого треугольника T_k будем строить полином степени $4m+1$ следующим образом (см. [15]). Пусть A_1^k, A_2^k, A_3^k — вершины этого треугольника. На каждой из сторон $[A_i^k, A_j^k]$ выделим множество точек $\{B_{l,ij}^k\}_{l=1}^r$, $r = 1, ..., m$, таких, что при каждом фиксированном r эти точки делят сторону, на которой они лежат, на $r+1$ равных отрезков. Для построения интерполяционного многочлена P_{4m+1} на T_k зададим значения функции и всех ее производных до порядка $2m$ в вершинах треугольника и по r производных r-го порядка ($r = 1, ..., m$) по нормалям к каждой из сторон треугольника

$$\frac{\partial^r P_{4m+1}(A_i^k)}{\partial x_1^{r-l} \partial x_2^l} = \frac{\partial^r f(A_i^k)}{\partial x_1^{r-l} \partial x_2^l}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2m, \quad 0 \leqslant l \leqslant r, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^r P_{4m+1}(B_{l,ij}^k)}{\partial n_{ij}^r} = \frac{\partial^r f(B_{l,ij}^k)}{\partial n_{ij}^r}, \ 1 \leqslant r \leqslant m, \quad 1 \leqslant l \leqslant r, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \tag{2.3}$$

В [15] и [16] для условий (2.2), (2.3) и выбираемых некоторыми способами оставшихся условий доказаны оценки

$$\left| \frac{\partial^s (f(x_1, x_2) - P_{4m+1}(x_1, x_2))}{\partial x_1^l \partial x_2^{s-l}} \right| \leqslant C(m) M h^{4m+2-s} (\sin \alpha)^{-s}. \tag{2.4}$$

Получившаяся кусочно-полиномиальная функция принадлежит классу $C^m(\Omega)$ (см. [15]).

Исходя из сказанного, введем следующие обозначения. Множество m раз непрерывно дифференцируемых кусочно-полиномиальных функций с нулевыми краевыми условиями обозначим через $P^m_{0,4m+1}$, т.е. $v \in P^m_{0,4m+1}$, если $v \in C^m(\Omega)$, в каждом треугольнике T_k функция v является многочленом степени $4m+1$ и удовлетворяет условиям

$$v = 0, \quad \nabla v = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Множество всех m раз непрерывно дифференцируемых кусочно-полиномиальных функций степени $4m+1$, т.е. без краевых условий, обозначим через P^m_{4m+1}.

Отметим, что если функция $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (1.2), то для любой функции $\psi \in C^1_0(\Omega)$ и такой, что $\psi \in C^2(T_k)$ в каждом треугольнике T_k, выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{T_k} \Bigg(& \sum_{ij=1}^{2} G'_{\eta_{ij}}(x, f, \nabla f, D^2 f)\psi_{x_i x_j} \\ & + \sum_{i=1}^{2} G'_{\xi_i}(x, f, \nabla f, D^2 f)\psi_{x_i} + G'_u(x, f, \nabla f, D^2 f)\psi \Bigg) dx = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Данное равенство получается с применением формулы Гаусса-Остроградского и с учетом того, что функция ψ непрерывно дифференцируема в области Ω. Таким образом, получающиеся при этом интегралы по сторонам границы ∂T_k будут взаимно компенсироваться для любых двух соседних треугольников.

Введем в рассмотрение величину

$$\begin{aligned} \delta(u', u'', \xi', \xi'', \eta', \eta'') = & G(x, u'', \xi'', \eta'') - G(x, u', \xi', \eta') - G'_u(x, u', \xi', \eta')(u'' - u') \\ & - \sum_{i=1}^{2} G'_{\xi_i}(x, u', \xi', \eta')(\xi'_i - \xi''_i) - \sum_{i,j=1}^{2} G'_{\eta_{ij}}(x, u', \xi', \eta')(\eta'_{ij} - \eta''_{ij}). \end{aligned}$$

Отметим, что условие $\delta(u', u'', \xi', \xi'', \eta', \eta'') \geqslant 0$ для всех $u', u'', \xi'\xi'', \eta', \eta''$ равносильно тому, что функция $G(x, u, \xi, \eta)$ выпукла вниз по совокупности переменных u, ξ, η. Мы будем далее предполагать, что для функции $\delta(u', u'', \xi', \xi'', \eta', \eta'')$ выполняется одно из следующих условий. Для первого предположим, что найдется константа $\mu > 0$ такая, что

$$\delta(u', u'', \xi', \xi'', \eta', \eta'') \geqslant \mu \sum_{i,j=1}^{2} (\eta''_{ij} - \eta'_{ij})^2 \tag{2.6}$$

для всех $u', u'', \xi', \xi'', \eta', \eta''$. Второе условие более слабое – для некоторой постоянной $\mu > 0$ справедливо неравенство

$$\delta(u', u'', \xi', \xi'', \eta', \eta'') \geqslant \mu \left(\sum_{i=1}^{2} (\eta''_{ii} - \eta'_{ii}) \right)^2 \tag{2.7}$$

для всех $u', u'', \xi', \xi'', \eta', \eta''$.

Используя равенство (2.5), легко видеть, что если функция $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (1.2), то выполнено

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} \delta(f, g, \nabla f, \nabla g, D^2 f, D^2 g) dx \\ & \quad = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} G(x, g, \nabla g, D^2 g) dx - \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} G(x, f, \nabla f, D^2 f) dx, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где функция $g \in C^1(\Omega)$ и такая, что $g \in C^2(T_k)$ в любом треугольнике T_k и

$$g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}, \quad \nabla g|_{\partial\Omega} = \nabla f|_{\partial\Omega}. \tag{2.9}$$

Для более краткой записи будем применять обозначение $I(g)$ для описанных выше функций g, понимая под ним следующее

$$I(g) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} G(x, g, \nabla g, D^2 g) dx.$$

Пример 2.1. *Пусть*

$$G(x, u, \xi_1, \xi_2, \eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{21}, \eta_{22}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl} \eta_{ij} \eta_{kl},$$

где набор дважды непрерывно-дифференцируемых функций $a_{ij}^{kl} = a_{ij}^{kl}(x)$ *такой, что*

$$a_{ij}^{kl} = a_{kl}^{ij}$$

и для любой ненулевой матрицы η_{ij} *выполняется неравенство*

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl} \eta_{ij} \eta_{kl} > 0.$$

Отметим, что в этом случае уравнение (1.2) примет вид

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right) = 0.$$

Равенство (2.8) для такой функции G *будет выглядеть следующим образом*

$$\sum_{s=1}^{N} \int\limits_{T_s} \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl} (f_{x_i x_j} - g_{x_i x_j})(f_{x_k x_l} - g_{x_k x_l}) dx = I(g) - I(f).$$

В частности, выполняется равенство

$$\sum_{s=1}^{N} \int\limits_{T_s} (\Delta f - \Delta g)^2 \, dx = \sum_{s=1}^{N} \int\limits_{T_s} (\Delta g)^2 \, dx - \sum_{s=1}^{N} \int\limits_{T_s} (\Delta f)^2 \, dx.$$

Отметим, что равенство (2.8) дает следующее свойство. Если функция f удовлетворяет уравнению (1.2), то функционал (1.1) достигает минимума на f среди функций вида g, $g \in C^1(\Omega)$ и таких, что $g \in C^2(T_k)$ в каждом T_k и удовлетворяющих (2.9).

В связи с этим введем понятие кусочно-полиномиального решения уравнения (1.2). Пусть $f \in C^{4m+2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ – решение уравнения (1.2) и пусть задана произвольная функция $\varphi \in C^{4m+2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая граничным условиям

$$\varphi|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}, \quad \nabla \varphi|_{\partial\Omega} = \nabla f|_{\partial\Omega}.$$

Далее, чтобы не вводить новых констант, будем считать, что вторые производные функции φ также ограничены постоянной M.

Определение 2.1. *Если на функции* v^* *достигается минимум интеграла*

$$I(\varphi + v) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} G(x, \varphi + v, \nabla \varphi + \nabla v, D^2 \varphi + D^2 v) dx,$$

среди всех $v \in P^m_{0,4m+1}$, *то функцию* $f^* = \varphi + v^*$ *будем называть кусочно-полиномиальным решением уравнения (1.2), удовлетворяющее граничным условиям*

$$f^*|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \quad \nabla f^*|_{\partial\Omega} = \nabla\varphi|_{\partial\Omega}. \tag{2.10}$$

Еще нам понадобится величина

$$\lambda_q = \inf_P \frac{\int\limits_{T_k} |P(x)|dx}{|T_k| \max\limits_{T_k} |P(x)|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам P в T_k степени q и $|T_k|$ – площадь треугольника T_k. Отметим, что $\lambda_q > 0$ и с помощью линейной замены переменных можно показать, что эта величина зависит только от степени многочленов и не зависит от треугольника T_k.

Теорема 2.1. *Если найдутся постоянные* $\nu_1, \nu_2 > 0$ *такие, что*

$$G(x, u, \xi, \eta) \geqslant \nu_1|\eta|^2 - \nu_2, \qquad |\eta|^2 = \eta_{11}^2 + \eta_{12}^2 + \eta_{21}^2 + \eta_{22}^2, \tag{2.11}$$

для всех x, u, ξ, η, *то кусочно-полиномиальное решение существует и единственно.*

Доказательство. Пусть последовательность $v_r \in P^m_{0,4m+1}$, $r = 1, 2, 3, ...$, такая, что $I(\varphi + v_r) \to I_0$, где $I_0 = \inf\limits_{v \in P^m_{0,4m+1}} I(\varphi + v)$. Ясно, что при достаточно больших r выполнено $I(\varphi + v_r) \leqslant 2I_0$. Учитывая, что вторые производные функции φ ограничены постоянной M, из условия (2.11) легко видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^N \int\limits_{T_k} |D^2 v_r|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\frac{2I_0 + \nu_2}{\nu_1}} + 2M\sqrt{|\Omega|}.$$

Заметим, что $|D^2 v_r|^2$ в каждом треугольнике T_k есть многочлен степени $8m - 2$. Поэтому, выполнено

$$|T_k| \max_{T_k} |D^2 v_r|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{8m-2}} \int\limits_{T_k} |D^2 v_r|^2 dx.$$

Тогда приходим к оценке

$$\left(|T_k| \max_{T_k} |D^2 v_r|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_{8m-2}}} \left(\sqrt{\frac{2I_0 + \nu_2}{\nu_1}} + 2M\sqrt{|\Omega|}\right).$$

Так как триангуляция фиксирована, то из полученного неравенства следует, что последовательность $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} \max\limits_{T_k} |D^2 v_r(x)|$ ограничена. Из-за того, что v_r имеет нулевые граничные значения, ограниченными будут и последовательности

$$\max_\Omega |\nabla v_r(x)|, \quad \max_\Omega |v_r(x)|.$$

Далее, учитывая, что в каждом треугольнике T_k функция v_r есть многочлен фиксированной степени и, если нужно, переходя к подпоследовательности, заключаем, что существует $v^* \in P^m_{0,4m+1}$ такая, что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} (\max_{T_k} |v_r - v^*| + \max_{T_k} |\nabla v_r - \nabla v^*| + \max_{T_k} |D^2 v_r - D^2 v^*|) \to 0.$$

Тогда очевидно $I(\varphi + v^*) = I_0$. Покажем единственность кусочно-полиномиального решения. Отметим, что для кусочно-полиномиального решения также можно показать, что справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{T_k}\left(\sum_{ij=1}^{2} G'_{\eta_{ij}}(x,f^*,\nabla f^*,D^2 f^*)v_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{2} G'_{\xi_i}(x,f^*,\nabla f^*,D^2 f^*)v_{x_i} + G'_u(x,f^*,\nabla f^*,D^2 f^*)v\right)dx = 0 \tag{2.12}$$

для всякой $v \in P^m_{0,4m+1}$. Поэтому, если f_1^* и f_2^* два кусочно-полиномиальных решения, удовлетворяющих краевому условию (2.10), то

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{T_k}\delta(f_1^*,f_2^*,\nabla f_1^*,\nabla f_2^*,D^2 f_1^*,D^2 f_2^*)dx = I(f_2^*) - I(f_1^*),$$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{T_k}\delta(f_2^*,f_1^*,\nabla f_2^*,\nabla f_1^*,D^2 f_2^*,D^2 f_1^*)dx = I(f_1^*) - I(f_2^*).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{T_k}(\delta(f_1^*,f_2^*,\nabla f_1^*,\nabla f_2^*,D^2 f_1^*,D^2 f_2^*) + \delta(f_2^*,f_1^*,\nabla f_2^*,\nabla f_1^*,D^2 f_2^*,D^2 f_1^*))dx = 0.$$

Тогда из условий (2.6) и (2.7) следует, что $f_1^* = f_2^*$. □

3. Сходимость кусочно-полиномиальных решений

Мы хотим исследовать поведение таких приближенных решений f^* при мелкости сетки h, стремящейся к нулю. В связи с этим, рассмотрим дополнительное условие на триангуляции. Именно, будем предполагать отделимость от нуля минимального угла α постоянной C_2, не зависящей от h,

$$\alpha \geqslant C_2 > 0. \tag{3.1}$$

В первую очередь мы покажем, что вторые производные этих решений будут ограничены некоторой постоянной, не зависящей от h, при сформулированных условиях на треугольную сетку.

Теорема 3.1. *Если выполнено условие (2.1) и одно из неравенств (2.6) или (2.7), то в каждом треугольнике T_k для кусочно-полиномиального решения f^* выполняется оценка*

$$\sqrt{\max_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(f^*_{x_ix_j})^2} \leqslant 2M + \frac{1}{\lambda_{8m-2}}\left(4M + \frac{1}{\sin^2\alpha}\sqrt{\frac{2C}{\mu}}(\operatorname{diam}\Omega)^{2m-1/2}\right), \tag{3.2}$$

где C – некоторая константа, независящая от h.

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено условие (2.6). Тогда для функций $g \in C^1(\Omega)$ таких, что $g \in C^2(T_k)$ в любом треугольнике T_k и удовлетворяющих условию

(2.9), из (2.8) получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(f_{x_ix_j}-g_{x_ix_j})^2\leqslant\frac{1}{\mu}\left(I(g)-I(f)\right). \tag{3.3}$$

Поэтому из неравенства (3.3) для каждого треугольника, полагая $g=f^*$, имеем

$$\sqrt{\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(f^*_{x_ix_j})^2dx}\leqslant\sqrt{\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(f_{x_ix_j})^2dx}+\sqrt{\frac{1}{\mu}(I(f^*)-I(f))}.$$

Разделим обе части неравенства на корень квадратный из площади треугольника $|T_k|$ и, учитывая, что $|f_{x_ix_j}|\leqslant M$, получаем

$$\sqrt{\frac{1}{|T_k|}\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(f^*_{x_ix_j})^2dx}\leqslant 2M+\sqrt{\frac{I(f^*)-I(f)}{|T_k|\mu}}.$$

Используя, что вторые производные функции φ также ограничены постоянной M, применяя неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{|T_k|}\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(f^*_{x_ix_j})^2dx}\geqslant\sqrt{\frac{1}{|T_k|}\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(v^*_{x_ix_j})^2dx}-\sqrt{\frac{1}{|T_k|}\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(\varphi_{x_ix_j})^2dx},$$

имеем

$$\sqrt{\frac{1}{|T_k|}\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(v^*_{x_ix_j})^2dx}\leqslant 4M+\sqrt{\frac{I(f^*)-I(f)}{|T_k|\mu}}.$$

Так как выражение $\sum\limits_{i,j=1}^{2}(v^*_{x_ix_j})^2$ есть многочлен степени $8m-2$, то

$$\max_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(v^*_{x_ix_j})^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{8m-2}}\frac{1}{|T_k|}\int\limits_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(v^*_{x_ix_j})^2dx.$$

Итак, окончательно приходим к неравенству

$$\sqrt{\max_{T_k}\sum_{i,j=1}^{2}(v^*_{x_ix_j})^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda_{8m-2}}}\left(4M+\sqrt{\frac{I(f^*)-I(f)}{|T_k|\mu}}\right).$$

Из полученного неравенства видно, что вопрос об ограниченности вторых производных кусочно-полиномиального решения сводится к исследованию поведения величины

$$\frac{I(f^*)-I(f)}{|T_k|}$$

при $h\to 0$. Обозначим через v_f функцию из $P^m_{0,4m+1}$, построенную по значениям и производным функции $f-\varphi$. В таком случае, так как $I(\varphi+v^*)\leqslant I(\varphi+v_f)$, верно неравенство

$$\frac{I(f^*)-I(f)}{|T_k|}\leqslant\frac{I(\varphi+v_f)-I(f)}{|T_k|}.$$

Рассмотрим функционал

$$\tilde{I}(g) = I(\varphi + g).$$

В работе [14] нами было показано, что значение функционала на функции $f \in C^{4m+2}(\Omega)$ приближается кусочно-полиномиальными функциями степени $4m+1$ с точностью $O(h^{4m+1})$ для треугольной сетки, удовлетворяющей условию (2.1). Следовательно, так как мы предполагаем, что $(f - \varphi) \in C^{4m+2}(\Omega)$, найдется постоянная $C > 0$, независящая от h и такая, что

$$|\tilde{I}(v_f) - \tilde{I}(f - \varphi)| \leqslant Ch^{4m+1}.$$

Легко видеть, что $|T_k| \geqslant 0.5h^2 \sin^2 \alpha$. Тогда приходим к неравенству

$$\sqrt{\max_{T_k} \sum_{i,j=1}^{2} (f^*_{x_i x_j})^2} \leqslant 2M + \frac{1}{\lambda_{8m-2}} \left(4M + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\frac{2C}{\mu}} (\operatorname{diam} \Omega)^{2m-1/2} \right).$$

Предположим теперь, что вместо неравенства (2.6) выполняется более слабое неравенство (2.7). Тогда из (2.8) получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} (\Delta(f - g))^2 dx \leqslant \frac{I(g) - I(f)}{\mu}.$$

Далее воспользуемся неравенством Кальдерона-Зигмунда ([17, Следствие 9.10]) для функции $f - g$. Именно, выполнено равенство

$$||D^2 u||_2 = ||\Delta u||_2,$$

где $u \in W^2_0(\Omega)$. Поясним возможность использования этого равенства. Если $m > 1$, то условия следствия 9.10 выполняются. При $m = 1$ функция $g \in C^1(\Omega)$ и $g \in C^2(T_k)$ для каждого треугольника T_k. Если в каждом треугольнике вторые производные функции g ограничены, то, учитывая, что $f = g$ на $\partial\Omega$, функция $f - g \in W^2_0(\Omega)$. Таким образом, полагая $g = f^*$, приходим к неравенству

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \sum_{i,j=1}^{2} (f_{x_i x_j} - f^*_{x_i x_j})^2 dx \leqslant \frac{I(f^*) - I(f)}{\mu}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые мы провели в случае выполнения условия (2.6) и также приводят к оценке (3.2). □

Теорема 3.2. *Пусть $f \in C^{4m+2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ – решение уравнения (1.2), удовлетворяющее краевым условиям*

$$f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \quad \nabla f|_{\partial\Omega} = \nabla\varphi|_{\partial\Omega}$$

и f^* – приближенное кусочно-полиномиальное решение с теми же краевыми условиями. Если выполнены условия (2.1), (3.1) и одно из неравенств (2.6) или (2.7), то

$$\lim_{h\to 0} \max_{\Omega} |f^*(x) - f(x)| = 0, \quad \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{2} \max_{\Omega} |f^*_{x_i} - f_{x_i}| = 0.$$

Доказательство. При сформулированных условиях на треугольную сетку нами показано, что при ее измельчении в каждом треугольнике T_k вторые производные приближенных решений остаются ограниченными постоянной, независящей от h. Покажем теперь, что следствием такого поведения решений будет их равномерная сходимость к точному решению в пространстве C^1. Итак, пусть $|f^*_{x_ix_j} - f_{x_ix_j}| \leqslant K$, где K – не зависит от h. Далее воспользуемся неравенством Соболева (см. [17, Теорема 7.10]) для $p > 2$ и доказанным неравенством (3.3)

$$\begin{aligned}
\max_{\Omega} |f^*_{x_i} - f_{x_i}| &\leqslant C_0 |\Omega|^{1/2-1/p} ||D^2(f^* - f)||_p \\
&\leqslant C_0 |\Omega|^{1/2-1/p} K^{1-2/p} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} (f^*_{x_ix_j} - f_{x_ix_j})^2 dx \right)^{1/p} \\
&\leqslant C_0 |\Omega|^{1/2-1/p} K^{1-2/p} \left(\frac{I(f^*) - I(f)}{\mu} \right)^{1/p} \leqslant C_0 |\Omega|^{1/2-1/p} K^{1-2/p} \left(\frac{C}{\mu} \right)^{1/p} h^{\frac{4m+1}{p}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равномерная сходимость первых производных при $h \to 0$. Так как $f^* = f$ на $\partial\Omega$, получаем

$$\lim_{h\to 0} \max_{\Omega} |f^*(x) - f(x)| = 0.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L.D. Landau, E.M. Lifshits. *Theoretical physics. Volume VII. Theory of elasticity: Textbook. allowance*, M.: Science. Ch. ed. physical -mat. Lit., 1987.
2. П.Н. Вабищевича. *Численное решение вариационных эллиптических неравенств четвёртого порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **24**:9, 1312–1319 (1984).
3. В.Г. Приказчикова. *Асимптотическая оценка точности дискретной спектральной задачи для уравнения четвертого порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **31**:3, 372–380 (1991).
4. Г.К. Берикелашвили. *О скорости сходимости разностного решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения четвертого порядка* // Дифференц. уравнения, **35**:7, 958–963 (1999).
5. Ю.А. Боган. *О методе потенциала для эллиптического уравнения четвертого порядка из анизотропной теории упругости* // Сиб. журн. индустр. матем., **3**:2, 29–34 (2000).
6. В.В. Карачик. *Решение задачи типа Робена для бигармонического уравнения* // Изв. вузов. Матем., **2**, 39–53 (2018).
7. Е.А. Уткина. *Задача Неймана для одного уравнения четвёртого порядка* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **2(19)**, 29–37 (2009).
8. А.Л. Ушаков. *Итерационная факторизация для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области* // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., **6**:1, 42–49 (2014).
9. М.М. Карчевский. *Смешанный метод конечных элементов для неклассических граничных задач теории пологих оболочек* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.- матем. науки, **158**:3, 322–335 (2016).
10. В.П. Шапеев, В.А. Беляев. *Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов* // Выч. мет. программирование, **19**:4, 340–355 (2018).
11. M. Ben-Artzi, I. Chorev, J.-P. Croisille, D. Fishelov. *A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains* // SIAM J. Numer. Anal. **47**:4, (2009).
12. I. Altas, J. Dym, M.M. Gupta, R. Manohar. *Multigrid solution of automatically generated high-order discretizations for the biharmonic equation* // SIAM J. Sci. Comput., **19**, 1575–1585 (1998).

13. А.А. Клячин, В.А. Клячин. *Аппроксимация уравнений с частными производными 4-го порядка в классе кусочно-полиномиальных функций на треугольной сетке* // Математическая физика и компьютерное моделирование, **22(2)**, 65–72 (2019).
14. А.А. Клячин. *Оценка погрешности вычисления функционала, содержащего производные второго порядка, на треугольной сетке* // Сиб. электрон. матем. изв., **16**, 1856–1867 (2019).
15. A. Ženišek. *Interpolation Polynomials on the Triangle* // Numer. Math. **15**, 283–296 (1970).
16. J.H. Bramble, M. Zlamal. *Triangular elements in the finite element method* // Math. Comp., **24(112)**, 809–820 (1970).
17. Д. Гилбарг, М. Трудингер. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989.

Алексей Александрович Клячин,
Волгоградский государственный университет,
проспект Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `klyachin-aa@yandex.ru, aleksey.klyachin@volsu.ru`